高等学校专科教材

高等数学

盛祥耀 编

上册（第二版）

高等教育出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册。上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用和空间解析几何。下册内容包括多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程及附录“数学史料”。

为适应不同专业的需要，书中适量配置了一些标有 * 的内容，以供选学。

本书可作为大学专科和高等专科学校各专业的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　上册/盛祥耀编。—2版。—北京：高等教育出版社，1996(2000重印)

ISBN 7-04-005170-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.盛…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第01225号

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京华文印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	1987年10月第1版
印　　张	10.375		1996年5月第2版
字　　数	260 000	印　　次	2000年9月第7次印刷
		定　　价	10.20元

第二版前言

本书根据国家教委组织制定的高等学校工程专科“高等数学课程教学基本要求”及第一版使用情况，对第一版作了以下的一些修改：

一、在内容的要求和安排上作了适度的调整.

空间解析几何中增加二、三阶行列式的简介，这是因为中学没有学，并将这一章调至定积分之后；降低了对极限 ε-δ 定义的要求；泰勒公式作为泰勒级数的准备知识来处理，并将它放在级数一章之中；洛必达法则中删去“0^0”，“1^∞”，“∞^0”等未定型的极限；略去了富氏级数中在 $[-l, l]$ 上的展开式等.

二、更加注意教学法.

向量代数中的叉积定义由洛伦兹力引入. 中学生对此是非常熟悉的，从而使叉积定义容易理解和接受；加强了微分运算，使之与工程技术要求更加接近；对一些重要理论和方法加强了分析和解释，增加了小结等.

三、文字上作了一些修改.

经过以上的修改，作者相信这一版会更受读者的欢迎.

感谢读者对第一版的厚爱，希望第二版能继续得到读者的帮助和支持.

作者

1994.6.27.于清华园.

第一版前言

这本《高等数学》是为大学专科各专业编写的. 全书共十二章，分上下两册出版. 上册包括: 空间解析几何、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分及其应用等七章. 把空间解析几何放在第一章讲授，是考虑到新生入学时学习热情很高，他们期待学习新的知识. 如把函数作为第一章似不能满足这个要求. 几年实践说明,这样安排较合适. 当然,把它放在定积分之后,也是可以的. 下册包括: 多元函数及其微分法、重积分、线面积分、级数和常微分方程等五章,最后附有数学史料.

在编写过程中除考虑到大学专科各专业的要求和特点外，还参考了为大学本科四年制所制订的高等数学课程的教学基本要求(讨论稿)及中央电大的教学大纲. 另外，我们吸收了不少从事大学专科各专业高等数学教学的教师的想法: 全书不写多余的内容，所写内容均为教学所必需，但根据各专业的需要可以有所选取. 例如,某些专业可以不学面积分、富氏级数. 类似这些内容我们用 * 号表示. 为了便于自学,安排了不少数量的例题,讲授时可酌情采用. 本书每节后有习题,每章后有总习题. 习题数量适中,多数应让学生完成. 答案附在每章之后.

本书内容用 150 学时左右就能讲完，如果每学期以 17 周计算,那么第一学期每周可排5学时,第二学期每周可排 4 学时.

编写本书时,参考了清华大学应用数学系盛祥耀、居余马、李欧、程紫明等编的《高等数学》，同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第二版),盛祥耀、葛严麟、胡全德、张元德四人编的《高等数学辅导》,同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》,别尔曼著、

景鍬等译的《数学解析习题集编》及盛祥耀、葛严麟编的《习题集》（未出版）. 在此，对以上所提到的作者表示感谢.

限于编者水平，有不当之处，希望广大读者提出宝贵意见.

盛祥耀

1985年12月于清华园

目　录

第一章　函　　数

§1. 集合　绝对值　区间

I. 集合

一般可以把集合理解为具有某种属性的一些对象所组成的全体. 例如某班全体同学组成一个集合;所有三角形组成一个集合;地球上所有的国家组成一个集合; 数 1、2、3、4、5 组成一个集合;满足不等式 $a<x<b$ 的 x 组成一个集合; 第一、三象限分角线上所有的点组成一个集合等等. 集合里的各个对象叫做这个集合的元素. 习惯上集合用大写字母如 A、B、C ···等表示,而元素用小写字母如 a、b、c ···等表示.

含有有限个元素的集合称为有限集,含有无限个元素的集合称为无限集. 如果 a 是集合 A 的元素,则记作 $a\in A$, 读作"a属于 A". 否则记作 $a\bar{\in}A$, 读作"a 不属于 A".

所谓给定一个集,就是给出这个集合由哪些元素组成. 给出的方式不外两种: 列举法和描述法. 所谓列举法就是把集合中所有元素都列举出来写在大括号内. 例如集合 A 包含 1、2、3、4、5 五个数,就可记为

$$A=\{1,2,3,4,5\}.$$

所谓描述法,就是把集合中的元素的公共属性描述出来. 它记为

$$A=\{x|x \text{ 具有性质 } p\}$$

或

$$A=\{x:x \text{ 具有性质 } p\}.$$

大括号内先写上这个元素的一般形式,再划一竖线或":", 然后写

上这个集合的元素所具有的共同属性.例如满足不等式 $a<x<b$ 的所有 x 的集合,可表示为

$$A=\{x|a<x<b\},$$

或

$$\boldsymbol{A}=\{x:a<x<b\}.$$

集合 $\boldsymbol{M}=\{C|C$ 是圆心在原点的圆$\}$

表示所有圆心在原点的圆的集合. 集合

$$P=\{(x,y)|y=2x+1,x\in R\}$$

表示所有在直线 $y=2x+1$ 上的点的集合,其中 R 表示全体实数集合. 显然点 $(1,2)\in P$,而点 $(1,3)\in P$.

不含任何元素的集合叫做空集,记为 $\varnothing$,例如,方程 $x^2+y^2=-1$ 的实数解是一个空集.

II. 子集、交集、并集和补集

定义一 如果集合 A 中的每一个元素都属于集合 B,则称 A 为 B 的子集. 记为

$$A\subseteq B,$$

或

$$B\supseteq A.$$

例如 R 表示全体实数的集合, Q 表示全体有理数的集合. 显然 Q 中每一个元素都属于 R. 所以集合 Q 是集合 R 的子集.

如果 A 是 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A. 那么集合 A 叫集合 B 的真子集, 记作

$$A\subset B.$$

例如,所有有理数集合 Q 是所有实数集合 R 的真子集. 即

$$Q\subset R.$$

由定义可知,任何一个集合 A 是它自己的子集,即 $A\subseteq A$. 空集可认为是任何集合的子集.

定义二 设两个集合 A, B. 如果 $A\subseteq B$, 同时 $B\subseteq A$, 则称集合 A 与集合 B 相等. 记作

$$A = B.$$

这里要注意，如果集合A只有一个元素a组成，不能写为

$$A = a,$$

应写为

$$A = \{a\}.$$

如果元素a属于A，不能写为

$$a \subset A,$$

应写为

$$a \in A.$$

也就是说记号$\subset$，$\subseteq$是在集合之间使用的.

定义三 既属于集合A又属于集合B的所有元素的集合叫做集合A与集合B的交集，记作

$$A \cap B.$$

如图 1.1.

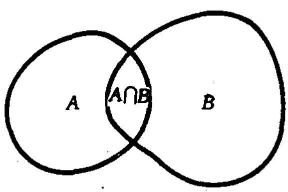

图 1.1

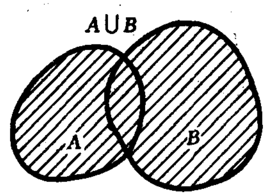

图 1.2

定义四 所有属于A或属于B的元素组成的集合叫做集合A与集合B的并集. 记作

$$A \cup B.$$

如图 1.2 中阴影部分表示集合A与B的并集.

例如，$A = \{x | 1 < x < 3\}$，$B = \{x | 0 \leqslant x < 2\}$，那么

$A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$；而 $A \cup B = \{x | 0 < x < 3\}$.

又例如，$\{1, 2, 3, 4, 6\} \cap \{0, 2, 4, 8, 10\} = \{2, 4\}$，

$\{1, 2, 3, 4, 6\} \cup \{0, 2, 4, 8, 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$.

如果所讨论的集合都是某一个集合 I 的子集，那么集合 I 称为全集.

定义五 如果集合 A 是全集 I 的子集，则在 I 中不属于 A 的元素所组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 的补集，简称集合 A 的补集，记作 $\bar{A}$. 如图 1.3 中阴影部分是集合 A 的补集 $\bar{A}$（长方形表示全集 I），它可表示为

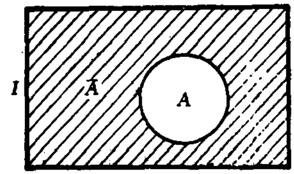

图 1.3

$$\bar{A}=\{x \mid x \in I, \text{ 且 } x \bar{\in} A\}.$$

显然，$A \cup \bar{A}=I$, $A \cap \bar{A}=\varnothing$. $\bar{\bar{A}}=A$. 其中 $\bar{\bar{A}}$ 表示：集合 $\bar{A}$ 的补集. 例如，全集 I 为所有实数集合. Q 表示所有有理数的集合，则

$$\bar{Q}=\{x \mid x \in R, \text{ 且 } x \bar{\in} Q\}.$$

即 $\bar{Q}$ 为所有无理数集合.

III. 绝对值

定义六 实数 a 的绝对值（记作 $|a|$）规定为

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{若 } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{若 } a<0.\end{cases}$$

a 的绝对值在数轴上表示点 a 到原点的距离.

绝对值有以下的一些性质：

(1) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

(2) 如果 $|x|<\varepsilon$, 则 $-\varepsilon<x<\varepsilon$, 反之亦然；

(3) 如果 $|x|>N$, 则 $x>N$ 或 $x<-N$, 反之亦然.

绝对值有以下的一些运算规则：

(1) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ (a, b 为实数).

事实上
$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$
$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

两式相加，得

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

所以

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

(2) $|a - b| \geqslant |a| - |b|$ (a,b 为实数)

事实上,

$$|a| = |a - b + b| \leqslant |a - b| + |b|,$$

即

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

(3) $|ab| = |a||b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

这两个公式是显然的.

IV. 区间

集合 $\{x|a < x < b\}$ 称为开区间,记作 (a,b). 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,但不包括端点 a 及端点 b(图 1.4);集合 $\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$. 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,包括其两个端点(图 1.5).

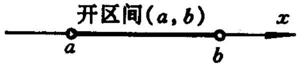

图 1.4

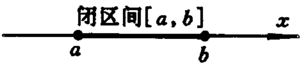

图 1.5

还有其它类型的区间:

$\{x|a < x \leqslant b\}$ 记作 $(a,b]$, 称为半开区间;

$\{x|a \leqslant x < b\}$ 记作 $[a,b)$, 称为半开区间;

$\{x|x > a\}$ 或 $\{x|x < a\}$ 记作 $(a,+\infty)$ 或 $(-\infty,a)$, 称为半无穷区间;

$\{x|x$ 为任何实数$\}$记作$(-\infty,+\infty)$,称为无穷区间等.

集合 $\{x||x - a| < \varepsilon\}$ 称为点 a 的 ε 邻域. 它也可以用开区间来表示. 事实上

$$|x - a| < \varepsilon,$$

去绝对值，得 $$-\varepsilon < x - a < \varepsilon,$$
即 $$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$
就是说，点 a 的 ε 邻域就是开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. 从数轴上看，点 a 的 ε 邻域表示：以点 a 为中心，长度为 2ε 的开区间(图 1.6)：

图 1.6

例如，把 -1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域表示成开区间. 即

$$|x-(-1)| < \frac{1}{2}.$$

去绝对值，得

$$-\frac{1}{2} < x + 1 < \frac{1}{2},$$

即

$$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2},$$

即为开区间 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

习　题

1. 设 $A=\{-1,2,4,9,10\}$, $B=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$. 求 $A\cap B$, $A\cup B$.
2. 设 $A=\{x \mid x\geqslant 0\}$, $B=\{x \mid x<5\}$. 求 $A\cap B$, $A\cup B$.
3. 设全集为所有整数的集合，A 为所有自然数的集合，求 A 的补集，即 $\bar{A}$.
4. 写出集合 $A=\{1,2,0\}$ 的所有子集.
5. 解不等式 $|x|>|x+1|$.
6. 解不等式 $|x+1|+|x-1|=4$.
7. 把集合 $A=\{x \mid |x-2|\leqslant 3\}\cap B=\{x \mid |x+1|<2\}$ 用区间记号表示.

8.把点 2 的 $\frac{1}{3}$ 邻域用集合表示.

§ 2. 映射与函数　反函数

1. 映射

定义　设 A, B 是两个非空集合，如果按照一个确定的规则 f，对于集合 A 中每一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，则称 f 是由集合 A 到集合 B 的映射. 记作

$$f: A \to B.$$

如果 A 中的元素 a，对应的是 B 中的元素 b. 则称 b 为 a 的象，a 为 b 的原象.

在定义中，要注意按照规则 f 确定的集合 B 中的元素存在且是唯一的. 例如图 1.7(b)，1.7(c) 不表示由集合 A 到集合 B 的映射. 因为图 1.7(b) 中集合 A 的元素 a 对应集合 B 中的两个元素 b、c，不符合映射定义中唯一性的要求. 而图 1.7(c) 中集合 A 的元素 a_2 在集合 B 中无元素对应，也不符合映射定义中存在性的要

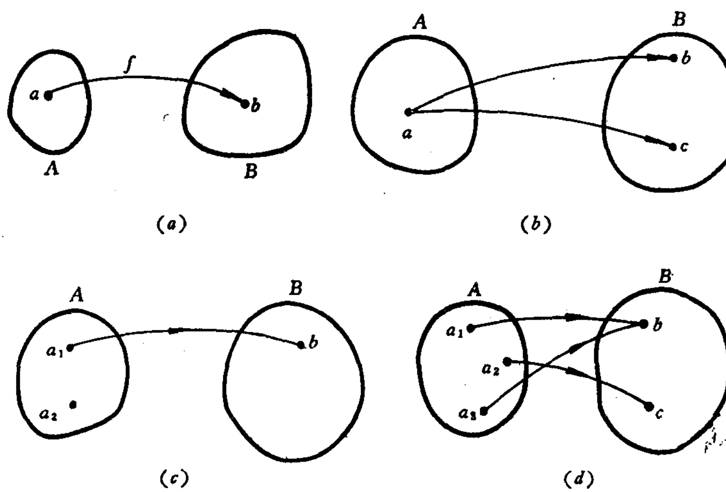

图 1.7

求，但要注意，图 1.7(d) 所表示的是映射，尽管集合 A 中存在两个元素 a_1,a_2 对应集合 B 中的同一个元素 b，但不违背映射的定义.

例 1 设 A 表示所有出生在中国的人的集合，B 表示所有中国的县的地名的集合，规则 f 是 A 中人对应其出生地的县名. 则 f 是由 A 到 B 的映射.

例 2 设 N 是所有大于 1 的整数集合，R^+ 是所有正实数的集合，对应规则 f 是将 N 中元素取对数(常用对数)，则 f 是由 N 到 R^+ 的映射.

例 3 设 $A=\{x|\ 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{y|\ 1\leqslant y\leqslant 9\}$，对应规则 f 是将集合 A 中元素取平方，则 f 是由 A 到 B 的映射.

II. 函数

定义 设有两个非空实数集合 D、B，如果对于数集 D 中的每一个数 x，按照确定的规则 f 对应着数集 B 中唯一的一个数 y，则称 f 是定义在集合 D 上的函数.

事实上，函数就是集合 D 到集合 B 的一种映射.

D 称为函数的定义域，与 $x\in D$ 对应的实数 y 记作 $y=f(x)$. 与 x_0 对应的 y 值有时记为 $f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，集合 $B_f=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域. 显然 $B_f\subseteq B$.

习惯上，x 称为自变量，y 称为因变量. 要注意 f 是函数，而 $f(x)$ 是函数值. 但是研究函数总是通过函数值来进行的. 为了方便，以后也把 $f(x)$ 称作 x 的函数. 或 y 是 x 的函数.

如果对于自变量 x 的某一个值 x_0，因变量 y 能得出一个确定的值，那么就说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义.

对于不同的函数，应该用不同的记号，如 $f(x)$，$g(x)$，$F(x)$，$G(x)$ 等等.

有时，会出现对于变量 x，有几个 y 值与之对应的情形，根据函数定义，y 不是 x 的函数. 但为了方便，我们约定把这种情况称之为 y 是 x 的多值函数. 对于多值函数通常是限制其 y 的变化范围使之成为单值，再进行研究. 例如，反三角函数 $y=\mathrm{Arc\,sin}\,x$