21世纪高等院校教材

大学数学

王崇祜 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

大 学 数 学

王崇祜 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要包括微积分、概率统计、线性代数中的基础内容，其中有数列的极限、一元函数的连续性和极限、导数及其应用、不定积分与定积分、二元函数的偏导数与极值问题、随机事件与概率、随机变量的数学期望与方差、线性方程组与矩阵等内容. 附录中还简单介绍了 Fuzzy 集论的基本概念.

本书可作为高等院校人文社会科学（非经济类）学生的教材或参考书，也适合作为经济类、理工科类学生学习高等数学的入门参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/王崇祜 编 .—北京：科学出版社，2004

（21 世纪高等院校教材）

ISBN 7-03-012983-0

Ⅰ. 大… Ⅱ. 王… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 020045 号

策划编辑：杨 波 姚莉丽/文案编辑：贾瑞娜/责任校对：鲁 素

责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 5 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2004 年 5 月第一次印刷 印张：15 1/2

印数：1—3 500 字数：293 000

定价：22.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

前　　言

本教材是根据南京大学人文社会科学（非经济类）学生一个学期的大学数学课程的教学需要而编写的．我们认为，作为一个学期的课程，大学数学（文科）的设计目标应当是：通过给文科的学生介绍最有用的基本数学概念与方法，在一定程度上提高学生的数学素养，主要指抽象思维与逻辑推理能力、运算能力，以及分析问题与解决问题的综合能力．因此编写时力求简单易懂，尽量使学生能够较快地掌握基本数学概念与方法，同时注意本质上不损害逻辑上的严格性，并设法用现代数学的一些基本思想贯穿其中，力争在较短的篇幅内自成体系．

按照前面所述的原则，我们精选了微积分、概率统计、线性代数中既有理论意义又有广泛应用的基本概念、定理及方法，在若干重要部分（也即学生学习中的难点部分）的讲法方面与传统讲法相比较，我们做了新的尝试，如函数的连续性与极限、定积分、随机变量的分布函数的引入、线性方程组与矩阵等部分的处理．我们在相当程度上降低了基本内容的学习难度，这样反而促进学生在较短时间内学到更多有用的知识．另外，在大多数基本概念与方法的引入之前我们尽量先讲直观背景，书中还选编了不少具有实际意义的例题，这些对培养学生解决实际问题的能力，促进学生对基本概念的深刻理解非常有益．

本书是 2000 年 9 月同名讲义及 2002 年 9 月同名讲义的修改稿．本次修改除了文字上的修改以外，与 2000 年 9 月的初稿相比，主要变动是：删去了“线性规划简介”一章；把“线性方程组与矩阵”一章安排为最后一章，并在此章中增写了“行列式”一节；在“不定积分与定积分”一章中增写了“不定积分的应用——求解微分方程”以及“关于闭区间上连续函数的原函数存在性的评注”两节；增写了附录 A 二元函数的可微性与附录 C 习题参考答案．另外，参考文献新列了 5 条，其中文献［14］、［15］、［16］、［17］是比较近期的．

从 2000 年 9 月起，编者已经在南京大学文科强化班及新闻系、历史系多次试用了本书的初稿讲义，其中微积分部分的讲法编者自 1999 年秋起在南京大学外国语学院的小语种各系、中文系等做了多次使用．教学实践表明，本教材可作为人文社会科学及相关专业的教材或教学参考书．每周 6 学时，一学期可授完本书的大部分内容；每周 4 学时，一学期可授完前 4 章及第 5 章的部分内容（使用每章的 A 组习题）．书中打 * 号的内容在理论及方法上一般具有一定的难度与深度，读者可根据自己的需要选择阅读．

本书是南京大学推行本科教学改革项目的成果之一．在此，编者衷心感谢南

京大学教务处的有力支持，感谢南京大学基础学科教育学院院长卢德馨教授、基础学科教学强化部主任许望教授的真诚鼓励、帮助与支持. 同时，编者对南京大学数学系副系主任丁南庆教授在本书编写试用过程中自始至终的极大关心与支持，对南京大学数学系姚天行教授、丁德成教授的热情关心，表示由衷的谢意.

最后对于书中不妥之处，请广大读者批评指正.

王崇祜

2003 年 8 月

于南京大学数学系

目　录

第 1 章　现代数学的一些基本概念

这里我们将介绍本教材常用的,或者有助于更深刻理解本教材的主要内容的一些基本概念:集合、实数集、点的邻域、映射与函数、线性空间与线性映射.

1.1 集　合

集合(set)现已成为现代数学的一个基本概念,最早是由德国数学家康托尔(G. Cantor, 1845~1918)引入的.一段时期中一些数学家对集合的定义颇有争论.后来,20 世纪的数学家发现集合的概念在数学的各个领域都非常有用,能够带来很多方便,因此现在数学的各个分支已经很自然地运用集合与集合之间的运算了.

何为集合? 我们可以认为:一个集合是指具有某性质的一些对象的全体,人们能够根据它所具有的性质判定一个已知对象是否属于它.

我们约定用大写英文字母表示集合,小写英文字母表示集合中的元素.因此我们可以记集合 $A=\{x:x$ 具有某性质 $p\}$.

如果集合 A 所含的元素共有有限多个(总数可记为 $n(A)$),则称 A 是有限集. 当集合 A 是有限集时,我们也可用列举法表示 A. 例如,$A=\{0,1,2,3,\cdots,100\}$.

下面的定义中给出集合运算的一些常用术语及其记号.

定义 1.1.1 (集合运算)　$x\in A$ 表示 x 是集合 A 中的元素,$x\notin A$ 表示 x 不是集合 A 中的元素.不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$.

$A\subset B$ 表示 A 中任一元素是 B 的一元素,此时称 A 是 B 的子集.

$A=B$ 表示 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,即 A 与 B 含有全部相同的元素.

$A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的并集.

$A\cap B=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的交集.

我们可将集合的交并运算推广到许多集合的情形.

例如,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{x:$ 存在自然数 n,使得 $x\in A_n\}$,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{x:x\in A_n$ 对一切自然数 n 成立$\}$.

现在我们给出一些关于集合的例子,其中点的邻域属于基本概念,我们写为定义的形式.

例 1.1.1　某班学生共 40 人,现有甲、乙两门课程允许每人选择且每人至少

选一门课，已知选甲课程的共 30 人，同时选甲、乙两门课程的有 16 人，问此班选乙课程的学生共有多少人？

解　设 A 表示选甲课程的学生的集合，B 表示选乙课程的学生的集合，则 $n(A)=30, n(A\cap B)=16, n(A\cup B)=40$. 可作草图帮助解题. 注意，只选甲课程而不选乙课程的人数 $=30-16=14$，故 $n(B)=40-14=26$.

例 1.1.2（实数集 $\mathbf{R}$）　我们用 $\mathbf{R}$ 表示实数集. 大家知道，每一实数可用数轴上的一个点表示，反之也成立. 因此 $\mathbf{R}$ 可用数轴表示，$\mathbf{R}$ 与数轴可视为同一个集合. $\mathbf{R}$ 也表示为 $(-\infty,+\infty)$.

定义 1.1.2（$\mathbf{R}$ 中点的邻域）　任取 $a\in\mathbf{R}, \varepsilon>0$，则开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 是集合 $\mathbf{R}$ 的包含 a 的子集，记为 $U_\varepsilon(a)$，称 $U_\varepsilon(a)$ 为 a 的 **ε 邻域.**

邻域的直观意义是明显的. 注意 $x\in U_\varepsilon(a)$ 等价于 $x\in\mathbf{R}$ 且 $|x-a|<\varepsilon$. 如 $U_\varepsilon(a)$ 中去掉 a 点，则记为 $U_\varepsilon(a)\setminus\{a\}$，即 $(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$，称之为 a 的 **去心 ε 邻域，或空心 ε 邻域.**

在实数轴上，如果定义点 x 与点 a 的距离 $d(x,a)=|x-a|$，则 a 的 ε 邻域也可表示为 $U_\varepsilon(a)=\{x: d(x,a)<\varepsilon\}$.

这里我们指出，**点的邻域**(neighborhood of a point)是现代数学中最重要的基本概念之一，今后我们将经常用点的邻域来刻画诸如点的附近，任意接近某一点等这些具有丰富实际意义的陈述.

例 1.1.3（实平面集 $\mathbf{R}^2$）　$\mathbf{R}^2=\{(x,y): x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，大家知道 $\mathbf{R}^2$ 中每一元素 (x,y) 可用平面上一个点 P 表示，可令 $P=(x,y)$，x,y 分别是点 P 的 x 坐标，y 坐标. 反之，平面上每一点与 $\mathbf{R}^2$ 中一元素 (x,y) 对应. 因此，$\mathbf{R}^2$ 与平面视为同一个集合.

定义 1.1.3（$\mathbf{R}^2$ 中点的邻域）　设 $P_1=(x_1,y_1), P_2=(x_2,y_2)$，则由勾股定理，两点 P_1, P_2 的距离

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

则以 $P_0=(x_0,y_0)$ 为中心，$\varepsilon>0$ 为半径的圆形区域

$$U_\varepsilon(P_0)=\{P=(x,y): d(P,P_0)<\varepsilon\},$$

即满足 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2$ 的点 (x,y) 的集合，$U_\varepsilon(P_0)$ 称为 P_0 的 ε 邻域，$U_\varepsilon(P_0)\setminus\{P_0\}$ 称为 P_0 的去心 ε 邻域.

例 1.1.4（实 $\mathbf{R}^n$）　与 $\mathbf{R}^2$ 相类似，我们可以定义

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}.$$

当 $n=3$ 时，$\mathbf{R}^3$ 可以以图示之. 令 $P_1=(x_1,x_2,\cdots,x_n), P_2=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，与 $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2$ 中情形类似可以定义 P_1, P_2 之间距离

$$d(P_1,P_2)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对任 $\varepsilon>0$,也可定义 P_1 的 ε 邻域.

1.2 映射与函数

设某大学某班级的学生集合为 A,每一学生均有一个学号(一个自然数)与之对应,这种对应便是数学中的映射(mapping).映射也是现代数学中最重要的基本概念之一.中学里已经知道的函数是一种特殊的映射.下面给出映射与函数(function)的一般的定义.

定义 1.2.1 (映射与函数) 设 A,B 是两非空集合,如果存在某一法则 f,对 A 中每一个元素 x,按照法则 f,B 中有惟一的元素 y 与之对应,记为 $y=f(x)$,则称 f 是从 A 到 B 中的**映射**,一般称 $y=f(x)$ 为 x 的像.

特别地,如果 $B\subset\mathbf{R}$,则称 f 是 A 上的一个**函数**.

如果 $A\subset\mathbf{R}$,$B\subset\mathbf{R}$,则称 f 是一元函数,x 为自变量,y 为因变量,A 称为 f 的定义域,$\{f(x):x\in A\}$ 为 f 的值域,它是 B 的一个子集,有时记为 $f(A)$. $\mathbf{R}^2$ 中子集 $\{(x,f(x)):x\in A\}$ 称为 f 的图形.

如果 $A\subset\mathbf{R}^2$,$B\subset\mathbf{R}$,则 $f:A\to B$,$y=f(x)$,f 称为二元函数.以后二元函数常表示为 $z=f(P)$ 或 $z=f(x,y)$,式中 $P=(x,y)\in A\subset\mathbf{R}^2$.

类似我们可以定义 n 元函数($n=3,4,\cdots$).

在中学数学课程中,大家已见过以下许多一元函数.

例 1.2.1

$$
\begin{aligned}
&y=ax^2+bx+c,\\
&y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\\
&y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arccot} x,\\
&y=\ln x,\ y=\mathrm{e}^x,\ y=a^x(a>0,a\neq 1).
\end{aligned}
$$

分别称为二次多项式函数,三角函数,反三角函数,对数函数,指数函数.

请每个读者指出并熟悉上述每个函数的定义域,值域,每个函数的图形,其中反三角函数的定义域与值域可参见注 2.2.1.

再举一例.设 $A=\{x:x>0\}$,令 $y=x^\mu=\mathrm{e}^{\mu\ln x}$($\mu$ 为常数),称为 A 上的幂函数. $\mu=1,\mu=2$ 时,我们可以画出相应的函数图形.

注 1.2.1 (一元函数的表示) 由上述函数的例子可见,一般地,我们要表示一个一元函数 $y=f(x)$,我们要给出 $y=f(x)$ 的一个解析表达式,同时指出其定义域 A.我们约定,当只给出 $y=f(x)$ 的一个解析表达式,而未指明定义域 A 时,则 f 的定义域理解为使得 $y=f(x)$ 的解析表达式有意义的 x 的全体.需要指出,表示一个函数还有其他方法,如列表法和作图法,甚至可用语言描述的方法等.注意,说两个函数相同,是指定义两个函数的法则及其定义域均相同.

注 1.2.2（集合的特征函数）　设 X 是一个基本集合，A 是 X 的任一子集，$\chi_A(x)$是定义在 X 上的一个函数，

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

$\chi_A(x)$称为集 A 的**特征函数**. 易见，X 上只取值 0 或 1 的函数的全体与 X 的所有子集的全体一一对应. 因此定义 1.1.1 中的集合运算，也可借助集合的特征函数的运算表示出来(参见附录 B).

自 20 世纪 60 年代起，一些应用科学的专家和数学家(如美国的 A. Zadeh)把上述想法推广，提出了较实用的 Fuzzy 集的概念和理论. 关于 Fuzzy 集的基本概念，可参见附录 B.

*1.3　线性空间与线性映射

由实平面 $\mathbf{R}^2$ 上向量的加法，向量与实数的乘法满足的性质的启发，我们可在 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$中引入类似的运算，进而介绍一般的线性空间(linear space)与线性映射(linear mapping)的概念.

首先我们再仔细地考察 $\mathbf{R}^2$，有下面的结论.

定理 1.3.1　任取 $\mathbf{R}^2$ 中的两个元素(也可称向量)，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$. 令 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2)$，$a\boldsymbol{x}=(ax_1,ax_2)$($a$ 是任一实数)，则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^2$，$a\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$，且满足下述 8 条性质：

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；
2. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$　(这里 $\boldsymbol{z}$ 也是 $\mathbf{R}^2$ 中任意一个元素)；
3. 令 $\boldsymbol{\theta}=(0,0)$，则 $\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$；
4. 令 $-\boldsymbol{x}=(-x_1,-x_2)$，则 $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\theta}$；
5. $a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}$　$(a,b\in\mathbf{R})$；
6. $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$；
7. $(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$　$(a,b\in\mathbf{R})$；
8. $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$　$(a\in\mathbf{R})$.

证　略.

很显然，这 8 条性质与 $\mathbf{R}$ 中实数的加法运算与数乘运算的性质完全类似. 因此我们可以分别把上述两种运算称为元素与元素的加法，元素与数的数乘.

与 $\mathbf{R}^2$ 中情形完全类似，当 $n=3,4,\cdots$，我们也可以在 $\mathbf{R}^n$ 中定义元素的加法运算以及元素与实数的数乘运算. 从而 $\mathbf{R},\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$成为抽象的线性空间的具体模型.

定义 1.3.1（实线性空间）　设 X 是一非空集合，如果对任意 $x\in X$，$y\in X$，

在 X 中有一称为 x 与 y 的和的元素,记为 $x+y$,与之对应.对任 $a\in\mathbf{R}$,$x\in X$,在 X 中有一称为 a 与 x 的积的元素,记为 ax,与之对应.上述两种运算对应满足下述 8 条性质:

1. $x+y=y+x$;
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (这里 z 也是 X 中的任意一个元素);
3. X 中存在"零"元素 θ,使对任意 $x\in X$,有 $\theta+x=x$;
4. 对任意 $x\in X$,存在加法逆元素,记为 $-x$,$x+(-x)=\theta$;
5. $a(bx)=(ab)x \qquad (a,b\in\mathbf{R})$;
6. $1\cdot x=x$;
7. $(a+b)x=ax+bx \quad (a,b\in\mathbf{R})$;
8. $a(x+y)=ax+ay \quad (a\in\mathbf{R})$.

则上述两种对应的运算 $x+y$,ax 称为 X 中的加法运算,数乘运算.集合 X 上定义了加法运算及数乘运算之后称为实线性空间.

$\mathbf{R},\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^n(n=3,4,\cdots)$按照通常的向量加法及向量与实数的数乘是实线性空间.

注 1.3.1 在前面的讨论中,$\mathbf{R}^n(n=1,2,\cdots)$的任一元素(或称为点,或称为向量)表示为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,这是行向量的形式.我们也可把 $\mathbf{R}^n$ 中的全部元素表示为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,这是列向量的形式,此时,前面所有的讨论依旧成立.本书今后在应用中,如果说 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,一般理解为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.当需要理解为列向量时,我们将加以指明.

定义 1.3.2 (线性映射,线性性质,线性泛函) 设 X,Y 都是实线性空间,M 是 X 的一个线性子空间(即 X 的子集 M 本身按 X 中的加法与数乘是一线性空间),T 是从 M 到 Y 中的一个映射.如果对任意的 $x_1,x_2\in M$,有

$$T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2,$$

则称 T 具有可加性.如果对任意的数 $a\in\mathbf{R}$ 与任意的 $x\in M$,有

$$T(ax)=aTx,$$

则称 T 具有齐次性.同时具有可加性与齐次性的映射称为**线性映射**.可加性与齐次性合在一起称为**线性性质**.

易见,从 M 到 Y 中的线性映射 T 把 M 中零元素映射为 Y 中零元素.

值得注意的是:以后我们将看到**很多数学运算都是映射,很多映射都满足线性性质**.

特别地,设 f 是从实线性空间 X 到 $\mathbf{R}$ 中的一个线性映射,则称 f 是 X 上的一

个线性泛函. 换句话说,线性空间 X 上的一个线性泛函就是定义在 X 上的一个具有线性性质的函数.

习　题　1

(A)

1. 设 $y=f(x)=x^2-4x+3$,指出下述集合

(1) $\{x:f(x)=0\}$;　(2) $\{x:f(x)>0\}$;　(3) $\{x:f(x)<0\}$.

2. 设 $y=f(x)=\ln x$,指出下述集合

(1) $\{x:f(x)=0\}$;　(2) $\{x:f(x)>0\}$;　(3) $\{x:f(x)<0\}$;　(4) $\{x:f(x)>1\}$.

3. 指出下述集合

(1) $\{x:e^x\leqslant 0\}$;　(2) $\{x:\sin x=0\}$;　(3) $\{x:|\ln x|<3\}$.

4. 求下列每小题中所有集合的并集与交集.

(1) 设 $A_n=\left(2+\dfrac{1}{n},4-\dfrac{1}{n}\right),n=2,3,\cdots$;

(2) 设 $D_n=\left(3-\dfrac{1}{n},5\right],n=1,2,\cdots$.

5. (1) 在 $\mathbf{R}$ 中任取一数 a,令 A_n 是 a 的 $\dfrac{1}{n}$ 邻域,证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{a\}$.

(2) 如 B_n 是 a 的空心 $\dfrac{1}{n}$ 邻域,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ 如何?

6. 下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同? 指明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1},g(x)=x^2+x+1$;　(2) $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$;

(3) $f(x)=\sin x,g(x)=\sqrt{1-\cos^2x}$;　(4) $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$.

7. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$;　(2) $y=\sqrt{2+x-x^2}$;

(3) $y=\sqrt{3x+2}-\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;　(4) $y=\ln\dfrac{x}{2x+3}$;

(5) $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$;　(6) $y=\dfrac{\ln(x^2-9)}{\sin x-\cos x}$.

8. 设

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1\\ (x-2)^2, & 1\leqslant x<4,\end{cases},$$

试求 $f(-1),f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f(1),f(2)$,并指出函数的定义域与值域,作出函数的图形.

9. 一个旅行社为南京一群不超过200人的学生订了一架有200个座位的飞机去广州旅行. 每人需交旅行社的费用是900元外加附加费用. 附加费用的算法是与空位数成正比,每多空一座位,每人附加费用多加4.5元.

(1) 试写出旅行社的收益函数 $R(x)$(设自变量是空座位数 x,收益函数即毛收入函数);

(2) 指出 $R(x)$ 的定义域;

(3) 计算 $R(0),R(5),R(10),R(100)$.

(B)

1. 设 A,B 均是有限集,证明 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

2. 设某年级学生共 100 人,其中 30 人数学不及格,20 人英语不及格,15 人英语、数学同时不及格.求下列各种情形的人数.

(1) 英语与数学至少有一门不及格者;

(2) 英语不及格而数学及格者;

(3) 数学不及格而英语及格者;

(4) 数学不及格或者是英语及格者;

(5) 英语、数学同时及格者.

3. 集合的概念可以用来分析投票联盟的力量对比.设某委员会由 A,B,C,D,E 五人组成,为了通过一项决议,必须有超过半数的人赞成.因此,按以上规则如果五人组成的委员会的某子集中每人均投赞成票且人数≥3,我们可称这一子集为一获胜联盟.试列出所有可能的获胜联盟,并求出获胜联盟的总数.如委员会由 9 人组成,规则不变,获胜联盟的总数是多少?

4. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$,特别地,记 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$,证明 $\boldsymbol{x}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 惟一表示为线性形式 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$(因此我们可以把 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 这一子集称为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基底).

5. 按中国个人所得税法规定,某年中国境内的公民关于应纳个人所得税计算方法如下:公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税,超过 800 元的部分为全月应纳税所得额,个人所得税按下表分段累进计算

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元至 2000 元的部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元的部分	15
4	超过 5000 元至 20000 元的部分	20
5	超过 20000 元至 40000 元的部分	25
6	超过 40000 元至 60000 元的部分	30
7	超过 60000 元至 80000 元的部分	35
8	超过 80000 元至 100000 元的部分	40
9	超过 100000 的部分	45

设公民全月工资、薪金所得数为 x,应纳个人所得税为 y,令 $y=f(x)$,试给出 $f(x)$的表达式,并求 $f(4000)$的值.

6. 作出从 A 到 B 中一个映射,使得 $A\subset\mathbf{R},B\subset\mathbf{R}^3$,且该映射有实际意义.

第 2 章　数列的极限和函数的基本性质

本章是微积分学的基础.牛顿(I. Newton,1642～1728,英国人)与莱布尼茨(G. W. Leibniz,1646～1716,德国人)两位伟大的数学家可以说是微积分学的发明者,或者说他们做了微积分的最重要的开始工作,甚至现在微积分学中普遍使用的一些名称与记号,名称如“微分学”、“积分学”、“函数”、“坐标”,记号如$\frac{dy}{dx}$,$\int f(x)dx$ 等都是他们(主要是莱布尼茨)创立的.

任何一门科学的理论都需要不断完善,微积分学也不例外.微积分学从一开始很长一段时期,由于理论上缺少严格性,不断受到攻击,这大大促进了后来的数学家的研究工作.柯西(A. L. Cauchy,,1789～1857,法国人)是把微积分的基础建立在极限概念之上的奠基人.

对微积分以致所谓“数学分析”理论系统的进一步完善做出重要贡献的另一位伟大的数学家是魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass,1815～1897,德国人).例如,我们现在应用的极限理论中“ε-δ”方法就是他将柯西开创的方法加以完善而得到的.

因为我们这门课程的目的是要在较短的时间中给文科学生介绍最有用的基本数学概念与方法,在一定程度上提高学生的抽象思维与逻辑推理的能力以及运算能力,因此做法上要力求简单易懂,尽量使读者较快地掌握基本数学方法.从本章开始到第 5 章我们将介绍本课程的核心部分——微积分的基本内容.所有内容的安排与取舍我们将按照前述“简单、易懂、较快”的原则进行.

下面的数列的极限是微积分学理论基础中最重要的概念.虽然在我们这门课程后面的内容中较少用到它,但由于这一概念的地位特殊,且对某些重要的数学内容如无穷级数理论等(本课程不介绍)是必不可少的,因此这里我们仍作简单介绍.

2.1　数列的极限

定义 2.1.1 (数列)　1° 实数列(以后简称**数列**)是指定义在正整数集 **N** 上的函数 f.如果对任一 $n\in\mathbf{N}$,有 $f(n)=a_n$,则习惯上把数列 f 表示成$\{a_n\}$,或直接按 n 递增的次序排成

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots.$$

2° 从数列$\{a_n\}$中任意去掉若干项,如剩下无穷多项,按原来的次序仍可形成

一数列,则称之为$\{a_n\}$的**子数列**,常记为$\{a_{n_k}\}$,即$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$.

读者容易举出很多数列的例子.

数列可在实际问题中产生.如1(单位)代表一个长方形面包,n个人平均共享此面包,则需平均切成n片,随着人数n的增多,每人分享的厚度为$a_n=\frac{1}{n}$,将越来越小.

此处,$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$就是一个数列,可简单记为$\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

我们用圆规直尺不能立即获知一个圆周的长度s,但我们可在圆内依次作内接正多边形,如正四边形,八边形,……其相应的正多边形的周长可记为

$$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

式中,a_n是正4×2^n边形的周长,直观上n越大时,a_n越接近真正的圆周长s.

仔细观察上面两个数列,第一个数列的通项$a_n=\frac{1}{n}$,随着n无限增大,$\frac{1}{n}$将随之无限接近常数0.第二个数列中如n无限增大,则通项a_n将随之无限接近常数s.

观察数列

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots,$$

则显然不存在一个常数l具有$0,s$分别与前两个数列的关系.关于上述三个数列中的前两个数列,数0与数s似乎处于一个共同的地位,即当n无限增大时,数列的通项a_n无限地接近于它.我们称0为数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限,$s$为正多边周长数列$\{a_n\}$的极限.

下面给出一般数列的极限(limit of a sequence)的定义及其等价说法.为了方便起见,我们把一个数列某项之前的所有项都去掉而剩下的部分(依然是一数列)称为原数列的一个**尾部**.

定义 2.1.2 (数列的极限) 设$\{a_n\}$是一数列,a是一固定实数.任取$\varepsilon>0$(无论ε多么小),a的ε邻域$U_\varepsilon(a)$都必包含$\{a_n\}$的一个尾部,则说$\{a_n\}$的**极限存在**,a是$\{a_n\}$的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad 或 \quad a_n\to a(当\ n\to\infty).$$

此时,我们也说数列$\{a_n\}$收敛于a,$\{a_n\}$是**收敛数列**.

由定义2.1.2立即可知,一个收敛数列前面添加任意有限多项得到的数列仍收敛,且极限与原来数列的极限相同.

注 2.1.1 (数列的极限的等价定义) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义有下述三条等价说法,每一说法均可作为定义.

1° 任取$\varepsilon>0$(无论ε多么小),当n充分大时,$a_n\in U_\varepsilon(a)$.

2° 对a的任意ε邻域$U_\varepsilon(a)$(不管ε多么小),存在N使得当$n\geqslant N$时,都有

$a_n \in U_\varepsilon(a)$.

3° 对任意 $\varepsilon>0$(不管 ε 多么小),存在 N 使得 $n\geqslant N$ 时,$|a_n-a|<\varepsilon$.

注意,由 3°及定义 2.1.2,得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

注 2.1.2　1° 利用 $\mathbf{R}^n$ 中的距离,定义 2.1.2 可以推广到 $\mathbf{R}^n$(例如,$n=2$)中点列 P_n 趋向于点 P 的情形.注意此时当 $n\to\infty$,$P_n\to P$,P_n 趋向于 P 可有许多方式,不是沿着某一特定的路径或方向.

2° $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 中记号 ∞ 既不是一个数,也不是数直线中的一个点,它只是表示 $n\to\infty$ 中的一个部分而已.

3° 由定义 2.1.2 知,当 $\{a_n\}$ 有极限 a(有限数)时,称 $\{a_n\}$ 是收敛数列.如数列不是收敛的,常称为是**发散的**.如 $a_n=n^2,b_n=(-1)^n n,c_n=1+(-1)^n$ 等.

要求直接用定义来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,很多时候较为困难,经常要用一些特别的技巧.

下面举一较简单的例子,仅仅希望读者对用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的一般思路有所领会而已.

例 2.1.1　用极限的定义证明　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{n}=1$.

证　我们欲证,对任意 $\varepsilon>0$,相应找 N 使得当 $n\geqslant N$ 时,$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{n}-1\right|<\varepsilon$.

注意,因 $\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{n}>1$,故

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+3}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+3}}{n}-1=\frac{\sqrt{n^2+3}-n}{n}$$
$$=\frac{n^2+3-n^2}{n(\sqrt{n^2+3}+n)}=\frac{3}{n(\sqrt{n^2+3}+n)}.$$

在 $\dfrac{3}{n(\sqrt{n^2+3}+n)}$ 中,分子分母均是正数,保持分子 3 不变,分母缩小为 n,从而 $\dfrac{3}{n(\sqrt{n^2+3}+n)}$ 放大为 $\dfrac{3}{n}$,于是得

$$\frac{3}{n(\sqrt{n^2+3}+n)}<\frac{3}{n}.$$

由不等式 $\dfrac{3}{n}<\varepsilon$,立即得 $n>\dfrac{3}{\varepsilon}$.令 N 为大于 $\dfrac{3}{\varepsilon}$ 的一个正整数,则当 $n\geqslant N$ 时

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+3}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$