全国高等教育自学考试

工程数学复变函数与积分变换自学辅导

组编/全国高等教育自学考试指导委员会
主编/贺才兴 童品苗

辽宁大学

全国高等教育自学考试

工程数学
复变函数与积分变换
自学辅导

贺才兴　童品苗　编

辽宁大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学复变函数与积分变换自学辅导/贺才兴、童品苗编.
沈阳：辽宁大学出版社，2002．1
ISBN 7－5610－3775－9

Ⅰ．复…
Ⅱ．贺…
Ⅲ．①复变函数－高等教育－教学参考资料
②积分变换－高等学校－教学参考资料
Ⅳ．017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 10328 号

辽宁大学出版社出版
网址：http://www lnupress com cn
Email：mailer@lnupress com cn
(沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　邮政编码　110036)

开本：880 毫米×1230 毫米 1/32　字数：240 千字　印张：9
丹东日报印刷厂印刷　印数：10101－20100 册
2002 年 1 月第 2 版　2002 年 1 月第 2 次印刷

责任编辑：李洪革　责任校对：王中文

定价：12.00 元

出版前言

为了完善高等教育自学考试教育形式，促进高等教育自学考试的发展，我们组织编写了全国高等教育自学考试自学辅导书。

自学辅导书以全国考委公布的课程自学考试大纲为依据，以全国统编自考教材为蓝本，旨在帮助自学者达到学习目标，顺利通过国家考试。

自学辅导书是高等教育自学考试教育媒体的重要组成部分，我们将根据专业的开考情况和考生的实际需要，陆续组织编写、出版文字、音像等多种自学媒体，由此构成与大纲、教材相配套的、完整的自学媒体系统。

全国高等教育自学考试指导委员会

2002年1月

编者的话

本书是为帮助广大读者学习复变函数与积分变换，配合全国高等教育自学考试指定教材《复变函数与积分变换》而编写的一本学习指导书。

全书紧扣教材，分为二篇共八章，外加一个附录，每章包括下列4个部分：

一、基本内容提要

二、典型例题选讲

三、习题与解答

四、自我检查题及解答

本书力求做到基本内容重点突出，叙述简炼，便于读者系统地掌握基本知识点；典型例题丰富而具代表性，能帮助读者理解基本概念，学习基本方法，掌握基本技能；习题与自我检查题的解答则起到了释疑解难的作用，向读者展示了一些基本的解题思路、解题方法与解题技巧。读者持有本书就仿佛请到了一位贴心的辅导“教师”。

学习《复变函数与积分变换》，首要的是自己独立思考与演算，多做练习题是学好这些内容的关键；其次是吸取别人的有益经验，参考本书提供的解题方法与技巧，开阔思路，提高解题能力。希望读者在独立演算教材中的习题之后，再参阅本书的解法，才会真正受益。

本书可供广大自学考生及学习复变函数与积分变换的高等工科院校、成人教育等学生参考，也可供从事这一内容教学的教师参考。

参加本书编写工作的还有李舰、王鹰等同志，书中难免有不妥之处，欢迎读者予以指正。

编者

目　　录

第一篇　复变函数

第二篇　积分变换

第一篇　复变函数

第一章　复　数

一、基本内容提要

§1　复数及其表示法

（一）复数的概念

1. $i=\sqrt{-1}$称为**虚数单位**，它是方程 $x^2+1=0$ 的一个根，即 $i^2=-1$.

当 x 和 y 都是实数时，称 $z=x+iy$ 为**复数**，实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

2. 若虚部 $y\neq0$，则称 z 为**虚数**；若 $y\neq0$ 且 $x=0$，则称 z 为**纯虚数**；若 $y=0$，则 $z=x$ 就是一个**实数**.

各数集之间的关系如下：

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{cases}\\ \text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\ \text{非纯虚数}\end{cases}\end{cases}$$

3. 若 $x=y=0$，则称 $z=0$.

两个复数之间不能比较大小.

当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时，才称复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相等，记为 $z_1=z_2$.

（二）复数的表示法

1. 复平面

复数 $z=x+iy$ 对应且只对应着一个有序实数对（x，y），有序实数对（x，y）的全体与平面上的点一一对应，一个建立了直角坐标系的平面可以表示复数，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**，这样表示复数的平面称为**复平面**或 **Z 平面**

2. 复数的向量表示

复数 $z=x+iy$ 可以用起点为原点、终点为 P（x，y）的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，x 与 y 分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影.

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 称为复数 $z=x+iy$ 的**模**或**绝对值**，记为 $|z|=r$，显然，$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$.

当 P 不是原点，即 $z\neq 0$ 时，向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记为

$$\theta=\operatorname{Arg}z.$$

显然有

$$\begin{cases} x=|z|\cos\theta,\ \ y=|z|\sin\theta \\ \operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

复数 z 有无穷多个辐角，即 $\operatorname{Arg}z$ 有无穷多个值，它们彼此之间相差 2π 的整数倍，其中有唯一的一个 $\arg z$，称为 $\operatorname{Arg}z$ 的**主值**，它满足关系

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi,$$

且有

$$\operatorname{Arg}z=\arg z+2n\pi,\ \ n=0,\ \ \pm1,\ \cdots.$$

$\arg z$ 可用主值规定在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的反正切函数 $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ 来确定，其关系如下：

$$\arg z=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第 Ⅰ 、Ⅳ 象限} \\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第 Ⅱ 象限} \\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第 Ⅲ 象限.} \end{cases}$$

3. 复数的三角表示与指数表示

由 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$ 可得复数的**三角表示式**

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

和指数表示式

$$z=re^{i\theta}.$$

§2 复数的运算及几何意义

(一) 复数的加法和减法

1. 定义 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

2. 几何意义 设向量$\overrightarrow{OP}_1$与$\overrightarrow{OP}_2$分别表示复数 z_1 与 z_2，则复数的加减法与向量的加减法一致，且有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\quad |z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|,$$

其中$|z_1-z_2|$表示复平面上点 z_1 与 z_2 之间的距离，即向量$\overrightarrow{P_2P_1}$的长.

(二) 复数的乘法和除法

1. 定义 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0).$$

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

或

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

2. 几何意义

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

在使用上述两个关于辐角的等式时，必须注意辐角的**多值性**. 若等式左端任意指定一值，则必有右端 $\mathrm{Arg}z_1$ 与 $\mathrm{Arg}z_2$ 的各一值使等式成立，反之亦然.

复数 z_1 与 z_2 的乘积 z_1z_2 是一个向量，它是将 z_1 的模放大（或缩小）$|z_2|$倍，再按逆时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$ 而得到的；复数 z_1 与 z_2 的商$\dfrac{z_1}{z_2}$也是一个向量，它是将 z_1 的辐角按顺时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$，再将 z_1 的模放大（或缩小）$\dfrac{1}{|z_2|}$倍而成.

3. $z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)] = r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$,

其中 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_ke^{i\theta_k} \quad (k=1,2,\cdots,n)$.

若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad$ (n 为正整数)，具有棣莫佛公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

（二）复数的方根

1. 定义　若 $w^n=z$（n 为正整数），则称**复数 w 为 z 的 n 次方根**，记为 $w=\sqrt[n]{z}$.

若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$ 其中$\sqrt[n]{r}$为 r 的算术根，$k=0,1,2,\cdots,n-1$.

若令 $w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，则 1 的 n 次方根为

$$1,\ w,\ w^2,\ \cdots,\ w^{n-1}.$$

2. 几何意义　对应于$\sqrt[n]{z}$的 n 个点是以原点为中心、$\sqrt[n]{|z|}$为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

（四）共轭复数及其运算性质

1. 定义　复数 $x-iy$ 称为复数 $z=x+iy$ 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=x-iy$.

2. 性质

(1) $|\bar{z}|=|z|$;

(2) $\text{Arg}\bar{z} = -\text{Arg}z$;

(3) $\bar{\bar{z}} = z$;

(4) $z\bar{z} = |z|^2$;

(5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

(6) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$;

(7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2 \neq 0)$;

(8) $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$;

(9) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1 \overline{z_2})$;

(10) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\text{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

§3 平面点集和区域

(一) 点集概念

定义 1 在平面上以 z_0 为中心，正数 ρ 为半径的圆的内部的点集，称为**点 z_0 的 ρ 邻域**，简称为**邻域**，表示为 $|z - z_0| < \rho$.

定义 2 设 E 为一点集. 若点 z_0 的某一个邻域包含在 E 内，则称 z_0 为 E 的**内点**；若点 z_0 的某一个邻域内的点都不属于 E，则称 z_0 为 E 的**外点**；若在点 z_0 的任意一个邻域内，既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的**界点**.

定义 3 若点集 E 能完全包含在以原点为圆心、某一个正数 R 为半径的圆域内部，则称 E 为一个**有界点集**.

(二) 区域

定义 4 设点集 D 满足下列两个条件：

(1) D 是开集，即 D 完全由内点组成；

(2) D 是连通的，即 D 中任何两点都可以用一条完全属于 D 的折线连接起来，则称 D 为一个**区域**.

区域 D 的全体界点称为 D 的**边界**. 由区域 D 及其边界所构成的点集称为**闭区域**或**闭域**，记为 $\overline{D}$.

若区域 D 可以包含在某个以原点为中心、某一正数 R 为半径的圆内，则称 D 为**有界区域**.

（三）简单曲线

定义 5 若$x(t)$与$y(t)$是两个定义在区间〔α，β〕上的连续实变量函数，则方程

$$z = x(t) + iy(t) = z(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

在平面上确定了一条连续曲线. $z(\alpha)$及$z(\beta)$分别称为该曲线的**起点与终点**. 若对$\alpha \leqslant t_1 \leqslant \beta$，$\alpha < t_2 < \beta$，$t_1 \neq t_2$，有$z(t_1) = z(t_2)$，则称$z(t_1)$为曲线的**重点**；凡无重点的连续曲线，称为**简单曲线或约当曲线**；满足$z(\alpha) = z(\beta)$的简单曲线称为**简单闭曲线或约当闭曲线**.

以一条简单闭曲线C为公共边界可以把平面分为两个区域：一个是有界的，称为C的**内部**；另一个是无界的，称为C的**外部**.

沿一条简单闭曲线C有正、负两个方向. 若沿C前进一周时，C的内部始终在C的左方，则称此前进方向为**正方向**；若沿C前进一周时，C的内部始终在C的右方，则称此前进方向为**负方向**.

定义 6 设$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$是一条简单曲线（闭或者不闭）. 若$z(t)$在$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$上有连续导数

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), \quad z'(t) \neq 0,$$

即此曲线有连续变动的切线，则称此曲线为**光滑曲线**.

（四）单连通区域与多连通区域

定义 7 设D为一区域. 若属于D的任何简单闭曲线的内部仍属于D，则称D为**单连通区域**. 非单连通区域称为**多连通区域**.

小结

本章学习了复数及其表示法、复数的运算及几何意义及平面点集和区域等内容.

1. 必须牢固掌握复数z的3种不同表示式：

代数表示式 $z = x + iy$

三角表示式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

指数表示式 $z = re^{i\theta}$

之间的相互转化，其中主要是复数$z = x + iy$与复平面上一点$P(x, y)$、向量$\overrightarrow{OP}$之间的一一对应关系. 熟练掌握由此而生的复

数的各种运算的几何意义.

2. 正确理解两个复数 z_1 与 z_2 的乘积和商的辐角公式:

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.$$

注意这两个等式对多值函数的意义.

3. 共轭复数的概念与性质在解题时经常用到, 应多加关注.

4. 复平面内的曲线与区域是十分重要的, 应该熟记几种经常遇到的曲线与区域及其表示式.

二、典型例题选讲

例 1 求复数 $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$ $(-\pi<\theta\leqslant\pi)$ 的三角表示式与指数形式.

解 $$z=1-\cos\theta+i\sin\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}+i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

当 $-\pi<\theta\leqslant0$ 时, $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}\leqslant0$, $\sin\frac{\theta}{2}<0$, 因为

$-\sin\frac{\theta}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$, $\cos\frac{\theta}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$, 所以 z 的三角表示式为

$$z=\begin{cases}2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right], & -\pi<\theta\leqslant0\\ 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right], & 0<\theta\leqslant\pi,\end{cases}$$

z 的指数表示式为

$$z=\begin{cases}-2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}, & -\pi<\theta\leqslant0\\ 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}, & 0<\theta\leqslant\pi.\end{cases}$$

例 2 计算 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n}$ 的值.

解 因为 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$, 所以 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n}$

$= (-i)^{2n} = [(-i)^2]^n = (-1)^n$.

例3 解方程 $(1+z)^5 = (1-z)^5$.

解 原方程与方程$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5 = 1$同解，解得

$\frac{1+z}{1-z} = \sqrt[5]{1} = e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ $(k=0,1,2,3,4)$.

于是

$$z = \frac{e^{\frac{2k\pi}{5}i} - 1}{e^{\frac{2k\pi}{5}i} + 1} = \frac{\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} - 1}{\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} + 1}$$

$$= \frac{2\sin\frac{k\pi}{5}\left(-\sin\frac{k\pi}{5} + i\cos\frac{k\pi}{5}\right)}{2\cos\frac{k\pi}{5}\left(\cos\frac{k\pi}{5} + i\sin\frac{k\pi}{5}\right)} = i\operatorname{tg}\frac{k\pi}{5},$$

其中 $k=0, 1, 2, 3, 4$.

例4 设 $x^2+x+1=0$，试计算 $x^{11}+x^7+x^3$ 的值.

解 由 $x^2+x+1=0$，可得 $(x-1)(x^2+x+1)=0$.

即 $x^3-1=0$，于是

$$x^{11} = x^2,\quad x^7 = x,\quad x^3 = 1,$$

从而

$$x^{11}+x^7+x^3 = x^2+x+1 = 0.$$

例5 用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 表示 $\cos5\theta$ 与 $\sin5\theta$.

解 由棣莫佛公式，有

$$\begin{aligned}\cos5\theta + i\sin5\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\ &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta \\ &\quad + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta \\ &= (\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta) + i(5\cos^4\theta\sin\theta \\ &\quad - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta),\end{aligned}$$

于是

$$\cos5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta,$$

$$\sin5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta.$$

例6 证明：$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$，并说明其

几何意义.

证一 设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$,则因为

$$|z_1+z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2,$$

$$|z_1-z_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

所以

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=2({x_1}^2+{x_2}^2+{y_1}^2+{y_2}^2)\\&=2(|z_1|^2+|z_2|^2).\end{aligned}$$

证二 因为

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}),$$

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}),$$

所以

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

几何意义：平行四边形两对角线的平方和，等于各边的平方和.

例 7 设 $z_1+z_2+z_3=0$，且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，试证：z_1、z_2、z_3 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的正三角形的三个顶点.

证一 因为 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，所以点 z_1、z_2、z_3 在单位圆 $|z|=1$ 上，于是只要证明

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}.$$

由例 6 和 $z_1+z_2+z_3=0$，有

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=|-z_3|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2),$$

于是

$$|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)-|z_3|^2=3.$$

因此可证明 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$.

证二 用复数的代数表示证明三边相等.

设 $z_k=x_k+iy_k$（$k=1,2,3$），则由 $z_1+z_2+z_3=0$，得

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad y_1+y_2+y_3=0. \qquad (*)$$

由 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，有

$${x_1}^2+{y_1}^2={x_2}^2+{y_2}^2={x_3}^2+{y_3}^2=1.$$

于是由（*），有