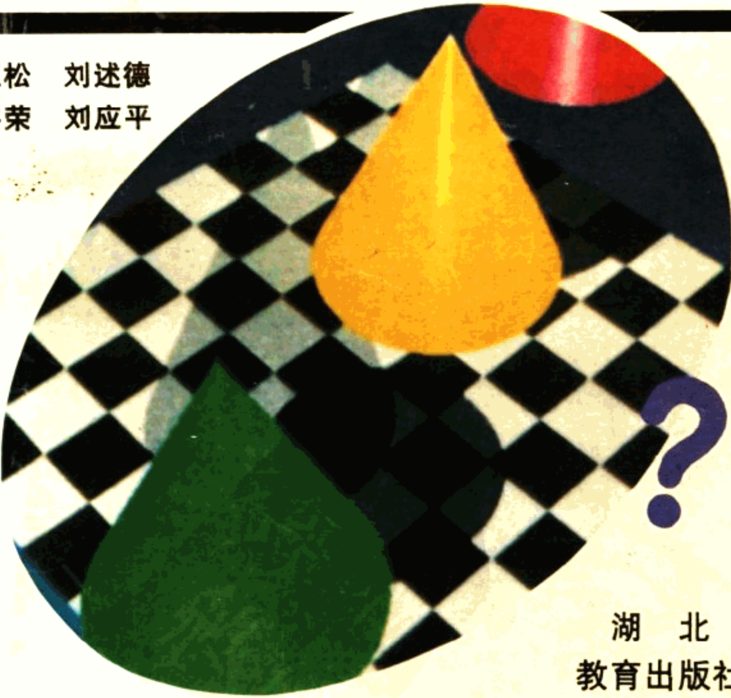
WEISHEN
MECUO

为什么错

初二数学习题错解评析

汪江松　刘述德
王卉荣　刘应平



湖　北
教育出版社

为什么错

——初二数学习题错解评析

汪江松　刘述德
王卉荣　刘应平　编

湖 北 教 育 出 版 社

(鄂)新登字02号

图书在版编目(CIP)数据

初二数学习题错解评析/汪江松等编.—武汉:湖北教育出版社,1996
(为什么错)
ISBN 7-5351-1948-4

Ⅰ.初… Ⅱ.汪… Ⅲ.数学课-初中-解题-教学参考资料 Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第01839号

出版发行:湖北教育出版社　　汉口解放大道新育村33号
邮编:430022　电话:5830435

经　销:新[illegible]书　店
印　刷:湖北教育出版社印刷厂　(433100·潜江市环城路62号)
开　本:787mm[illegible]m　1/32　6.5印张
版　次:1996[illegible]8月第1版　1996年8月第1次印刷
字　数:149千字　印数:1—10 000册

ISBN 7—5351—1948—4/G·1579　定价:6.00元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

前　言

在中学数理化各科教学实践中，解答习题，错误常难避免，发生错误和改正错误贯穿于整个教学过程。为什么错？错在哪里？如何解决这一问题？这就需要我们找出产生错误的原因，研究纠正和避免错误的方法，从而吸取有益的教训，加深基础知识的理解，提高分析问题和解决问题的能力。基于以上目的，我们编写了这套《为什么错丛书》。

本套丛书根据九年义务教育初中数理化各科教材和新的教学大纲，按年级编写，本册《初二数学习题错解评析》为这套丛书之一种。本书按照现行九年义务教育初中二年级教科书的内容和顺序进行编写。每章开篇简要地介绍全章的主要内容及重点难点，指出该章中一些常见的错误及值得注意的问题，然后给出与教材内容同步的例题。本书的编写特色是，对每道例题以错解、剖析、正确解答三个层次进行编写。其中错解多收集于日常教学中学生的作业或数学答卷，颇具典型性和代表性；对错解的剖析，既指明错误，又找出产生错误的原因，极具对症性；其正确解答，对照错解，正误鲜明，具有批判性。在每章之后，还配备有一定数量的练习题，每道练习题也给出了具有代表性的错误解答，以供读者指错纠错用，使自己不犯类似的错误。书末附有全部练习题的正确答案或提示。因此，本书是一本很好的课外辅导读物。

参加本书编写工作的有汪江松、刘述德、王卉荣、刘应平等

老师，全书由汪江松先生审定。

由于时间和水平所限，书中错误难免，敬请读者指正。

编　　者

1995 年 7 月

目　　录

第八章 因式分解

一、基本内容

本章的主要内容是因式分解的意义和把多项式分解因式的四种基本方法.

本章的重点是掌握提公因式法、运用公式法、分组分解法、十字相乘法这四种分解因式的基本方法. 难点是十字相乘法和分组分解法,以及各种方法的综合运用.

二、易出现的错误

1. 不能正确理解因式分解的意义:因式分解是把一个多项式化为几个整式的积的形式. 它是把整式乘法的过程反过来,因此,其分解的过程"形"变而"值"不变. 如把 x^2-4x+3 分解成 $(x-2)^2$ 或 $(x-2)^2-1$ 而终止都是不正确的.

2. 必须分解到每个因式在有理数范围内不能再分解为止,不能"半途而废".

3. 在提取公因式时,当某一项恰好为公因式被整体提出时,在其相应的位置不要漏写"1".

4. 要善于从整体观察和发现多项式公因式和套用五个基本公式. 不要一味盲目展开后,再来分解.

5. 分组分解法的目的是为了分组后便于提取公因式或套用公式(包括十字相乘法),这是分组的出发点. 因此,分组前要

预见下一步分解因式的可能性，否则胡乱分组而导致中途受阻.

6. 因疏忽某一项的符号或疏漏括号是因式分解中的“多发病”，应特别加以注意.

7. 分解因式的方法较多，具体解题时如何思考和采用解题策略呢？一般而言，其思维程序可概括为：“一提二套三分组”. 即首先考虑是否可以提取公因式，然后考虑是否能套用公式或应用十字相乘法，最后才考虑进行分组分解. 这样可以避免走弯路的错误.

8. 注意用多项式的乘法来检查自己分解的结果正确与否，以避免计算上的错误.

三、例题与评析

【例 1】 把多项式 $3(x-y)^3-(y-x)^2$ 分解因式，其结果是(　　).

①$(x-y)^2(3x-3y+1)$　　②$3(x-y)^2(x-y+1)$

③$(x-y)^2[3(x-y)-0]$　　④$(y-x)^2(3x-3y-1)$

错误解答 1　$3(x-y)^3-(y-x)^2=3(x-y)^3+(x-y)^2$

$=(x-y)^2[3(x-y)+1]=(x-y)^2(3x-3y+1)$.

选①.

错误解答 2　$3(x-y)^3-(y-x)^2=3(x-y)^3-(x-y)^2$

$=(x-y)^2[3(x-y)-0]$

选③.

评析　错误解答 1 错在 $(y-x)^2=-(x-y)^2$，因为 $(y-x)^2=[(-1)(x-y)]^2=(-1)^2(x-y)^2=(x-y)^2$；错误解答 2 错在 $(x-y)^2$ 被作为公因式提出后，中括号内相应的位置应是“1”而不是零.

正确解答　应选④.

因为 $3(x-y)^3-(y-x)^2=3(x-y)(y-x)^2-(y-x)^2$

$=(y-x)^2(3x-3y-1)$.

【例 2】 若 $-2a^{n-1}-4a^{n+1}$ 的公因式是 M，则 M 等于（　　）.

①$2a^{n-1}$　　②$-2a^n$　　③$-2a^{n-1}$　　④$-2a^{n+1}$

错误解答 1　选①.

错误解答 2　选②.

错误解答 3　选④.

评析　错误解答 1 是当多项式的各项的系数是负的，通常要把“－”号提出；错误解答 2、错误解答 3 错在对某一字母作为公因式被提取，其指数的次数应是最低的.

正确解答　选③.

【例 3】 用公式法分解因式：

(1)$m^2-mn+\frac{1}{4}n^2$;

(2)$(a^2+1)^2-4a^2$.

错误解答　(1)$m^2-mn+\frac{1}{4}n^2=4m^2-4mn+n^2$

$=(2m+n)^2$

(2)$(a^2+1)^2-4a^2=(a^2+1+2a)(a^2+1-2a)$

$=(a+1)^2(a-1)^2=[(a+1)(a-1)]^2$

$=(a^2-1)^2$

评析　(1)分解因式是“恒等变换”，分解前后“形”变“值”不变，这里第一个等号就不成立.

(2)混淆了因式分解与多项式的乘法，以致最后两步为“画蛇添足”.

正确解答　(1)$m^2-mn+\frac{1}{4}n^2=\frac{1}{4}(4m^2-4mn+n^2)$

$$=\frac{1}{4}(2m-n)^2$$

或 $m^2-mn+\frac{1}{4}n^2=(m-\frac{1}{2}n)^2$

(2) $(a^2+1)^2-4a^2=(a+1)^2(a-1)^2$

【例 4】 分解因式:x^2-8x-9.

错误解答 1 $x^2-8x-9=x(x-8)-9$

错误解答 2 $x^2-8x-9=(x^2-9)-8x$

$$=(x+3)(x-3)-8x$$

错误解答 3 $x^2-8x-9=x(x-8-\frac{9}{x})$

评析 错误解答 1 与错误解答 2 是“局部”进行分解因式,错在对因式分解的意义的错误理解. 应将被分解的多项式化成为几个整式的积的形式,即“整体”上是多项式的乘积;而错误解答 3 显然$\frac{9}{x}$不是整式,而是分式,显然与因式分解的意义相违背.

正确解答 $x^2-8x-9=(x-9)(x+1)$

【例 5】 分解因式 $8a-4a^2-4$.

错误解答 $8a-4a^2-4=4(2a-a^2-1)$

评析 错误解答看到多项式含有公因数 4,且首项系数是正的,不加思考地认为把 4 提了出来就行,没有考虑还能不能进一步分解因式. 如果能按着字母 a 的幂次排列,无论是降幂还是升幂,首项都是负的,就会提出公因数 -4,错误也可能就不会发生了.

正确解答 $8a-4a^2-4=-4a^2+8a-4$

$$=-4(a^2-2a+1)$$

$$=-4(a-1)^2$$

【例 6】 在甲:$\frac{1}{2}x^2-2y^2$,乙:$4x^2+y^2$,丙:$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{9}a$,

丁：$(-3x)^2-(x-y)^2$四式中，在有理数范围内能用平方差公式分解因式的个数是(　　).

①1 个　　②2 个　　③3 个　　④4 个

错误解答　因为甲式的系数不是平方数，乙式的运算符号都是正号，丙式提出公因数$\frac{1}{3}a$后括号内的常数也不是平方数．所以，只有丁式能用平方差公式分解因式．所以选①.

评析　错误解答仅在表面上看到了甲式的两个系数都不是平方数而不能用平方差公式分解.

正确解答　若把甲式中的系数$\frac{1}{2}$或 2 提出后，则该二项式变为$\frac{1}{2}(x^2-4y^2)$或$2(\frac{1}{4}x^2-y^2)$；加之丁式能用平方差公式分解因式，故选②.

【例 7】　分解因式 $4(m+\frac{1}{2}n)^2-9(\frac{2}{3}m-n)^2$.

错误解答　原式$=[4(m+\frac{1}{2}n)+9(\frac{2}{3}m-n)][4(m+\frac{1}{2}n)-9(\frac{2}{3}m-n)]$

$=[4m+2n+6m-9n][4m+2n-6m+9n]$

$=(10m-7n)(-2m+11n)$

$=(10m-7n)(11n-2m)$

评析　套用公式必须“规范”．没把二项式变为$[2(m+\frac{1}{2}n)]^2-[3(\frac{2}{3}m-n)]^2$就用平方差公式分解因式，显然系数出现了错误.

正确解答　原式$=[2(m+\frac{1}{2}n)]^2-[3(\frac{2}{3}m-n)]^2$

$=[2(m+\frac{1}{2}n)+3(\frac{2}{3}m-n)][2(m+\frac{1}{2}n)$

$-3(\frac{2}{3}m-n)]$

$=[2m+n+2m-3n][2m+n-2m+3n]$

$=(4m-2n)4n$

$=2(2m-n)4n$

$=8n(2m-n)$

【例 8】 下面有四个多项式,能用完全平方公式分解因式的是(　　).

①$4x^2+4x-1$　　②$x^2-2xy+4y^2$

③$-16x^2+y^2$　　④$\frac{x^2}{9}-\frac{2xy}{3}+y^2$

错误解答 1　因为①式的首尾两项是平方式,即$(2x)^2$、1^2,中间项 $4x$ 恰是 $2x$ 与 1 之积的 2 倍,所以选①.

错误解答 2　因为②式的首尾两项是平方式,即 x^2、$(2y)^2$,中间项是 x 与 y 之积的 2 倍,所以选②.

评析　错误解答 1 错在尾项 1 前面的"－"号;错误解答 2 错在中间项 $2xy$ 不是 x 与 $2y$ 之积的 2 倍.

正确解答　因为④式的首尾两项是平方式,即$(\frac{x}{3})^2$、y^2,中间项$\frac{2xy}{3}$恰是$\frac{x}{3}$与 y 之积的 2 倍,且首尾两项是正号、中间项是负号,符合差的完全平方公式,故选④.

【例 9】 多项式$(x^2-5)^2+8(5-x^2)+16$ 分解因式的正确结果是(　　).

①$(3+x)^2(3-x)^2$　　②$(x+1)^2(x-1)^2$

③$(x^2-9)^2$　　④$(x+3)(x-3)^2$

错误解答 1　原式$=[(x^2-5)+4]^2=(x^2-1)^2$

$=(x+1)^2(x-1)^2$

所以选②.

错误解答 2　原式$=(x^2-5)^2-8(x^2-5)+16$

$$=[(x^2-5)-4]^2=(x^2-9)^2$$

所以选③.

错误解答 3　原式$=(x^2-5)^2-8(x^2-5)+16$

$$=(x^2-9)^2=[(x+3)(x-3)]^2$$

$$=(x+3)(x-3)^2$$

所以选④.

评析　错误解答 1 错在没有把$(x^2-5)^2$变为$(5-x^2)^2$就用了和的完全平方公式;错误解答 2 的结果$(x^2-9)^2$没有分解完,应分解为$(x+3)^2(x-3)^2$;错误解答 3 用错了“积的乘方”法则,只把积中的一个因式进行乘方.

正确解答　原式$=(5-x^2)^2+8(5-x^2)+16$

$$=[(5-x^2)+4]^2=(9-x^2)^2$$

$$=[(3+x)(3-x)]^2=(3+x)^2(3-x)^2$$

故选①.

【例 10】　分解因式$-2a+\frac{1}{32}a^4$.

错误解答 1　$-2a+\frac{1}{32}a^4=-a(2-\frac{1}{32}a^3)$

错误解答 2　$-2a+\frac{1}{32}a^4=\frac{1}{32}a^4-2a=a(\frac{1}{32}a^3-2)$

错误解答 3　$-2a+\frac{1}{32}a^4=-2a(1-\frac{1}{64}a^3)$

$$=-2a(1-\frac{1}{4}a)(1-\frac{1}{4}a+\frac{1}{16}a^2)$$

评析　前两个错误解答,没有把系数的公因数 2 或$\frac{1}{32}$提出来,致使因式分解半途而废;错误解答 3 错在记错立方差公式的符号.

正确解答 原式 $=-2a(1-\frac{1}{64}a^3)$

$$=-2a(1-\frac{1}{4}a)(1+\frac{1}{4}a+\frac{1}{16}a^2)$$

或 原式 $=\frac{1}{32}a(a^3-64)$

$$=\frac{1}{32}a(a-4)(a^2+4a+16)$$

【例 11】 分解因式 $a^2-b^2+\frac{2}{3}b-\frac{1}{9}$.

错误解答 1 原式 $=(a^2-b^2)+(\frac{2}{3}b-\frac{1}{9})$

$$=(a+b)(a-b)+\frac{1}{9}(6b-1)$$

错误解答 2 原式 $=(a^2-\frac{1}{9})-(b^2-\frac{2}{3}b)$

$$=(a+\frac{1}{3})(a-\frac{1}{3})-b(b-\frac{2}{3})$$

评析 两种分组方法，一类错误，就是只看到了第一步能分解因式，没有看到第二步不能分解因式.

正确解答 原式 $=a^2-(b^2-\frac{2}{3}b+\frac{1}{9})$

$$=a^2-(b-\frac{1}{3})^2=[a+(b-\frac{1}{3})][a-(b-\frac{1}{3})]$$

$$=(a+b-\frac{1}{3})(a-b+\frac{1}{3})$$

【例 12】 分解因式 $x^3+x^2y-xy^2-y^3$

错误解答 原式 $=(x^3-y^3)+(xy^2-x^2y)$

$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(y-x)$$

$$=(x-y)[(x^2+xy+y^2)-xy]$$

$$=(x-y)(x^2+y^2)$$

评析 错误解答原因在于分组时审题或抄题时马虎，把后

一组的两项符号张冠李戴.

正确解答 原式$=(x^3-y^3)+(x^2y-xy^2)$

$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)$$
$$=(x-y)[(x^2+xy+y^2)+xy]$$
$$=(x-y)(x+y)^2$$

【例 13】 含有 x 的二次三项式,它的 x^2 项的系数是 1,常数项是 -12,且能因式分解,这样的二次三项式的个数是(　　).

①3 个　　②4 个　　③6 个　　④8 个

错误解答 1 因为 -12 可以分解为:1 与 -12、2 与 -6、3 与 -4,且每组的两个因数之和是唯一的,这样的二次三项式有三个,所以选①.

错误解答 2 因为 -12 可以分解为:2 与 -6、6 与 -2、3 与 -4、4 与 -3,且每组的两个因数之和是唯一的,这样的二次三项式有四个,所以选②.

评析 错误解答 1 对每个因数的正负两种情况,只想到了一种,而忘记了另一种情况的 -1 与 12、-2 与 6、-3 与 4 三组因数;错误解答 2 丢掉了 -1 与 12、1 与 -12 两组特殊的因数.

正确解答 因为 -12 能分解为:1 与 -12、2 与 -6、3 与 -4、4 与 -3、6 与 -2、12 与 -1 六组因数,且每两个因数之和是唯一的,这样的二次三项式有六个,故选③.

【例 14】 下面有四幅十字交叉线图,其中只有一幅的值是表示式子 $3(2m^2+3m-2)$ 的,这幅十字交叉线图是(　　).

① $\begin{array}{ccc} 3 & & 6 \\ & \times & \\ 2 & & -1 \end{array}$　② $\begin{array}{ccc} 3 & & -6 \\ & \times & \\ 2 & & 1 \end{array}$　③ $\begin{array}{ccc} 3 & & -1 \\ & \times & \\ 2 & & 6 \end{array}$　④ $\begin{array}{ccc} 2 & & -1 \\ & \times & \\ 1 & & 2 \end{array}$

错误解答 因为④图左边一列的两个数 2 与 1 的积等于

$2m^2+3m-2$ 的二次项系数 2，右边一列的两个数 -1 与 2 的积等于它的常数项 -2，斜线交叉两个数的积之和正好等于它的一次项系数 $+3$，所以选④.

评析 尽管④图与二次三项式 $2m^2+3m-2$ 的各项系数、常数项完全相符，但不是题目所要求的等值. 事实上，④所验证的二次三项式改变了题目所要求的式子 $3(2m^2+3m-2)$ 的值.

正确解答 因为 $3(2m^2+3m-2)=6m^2+9m-6$，它的二次项系数 6 可分解为 3 与 2、常数项 -6 可分解为 6 与 -1，且 $6\times2+3\times(-1)=9$，可见式子 $3(2m^2+3m-2)$ 与①图的"两积一和"三项数字结果完全相符，故选①.

【例 15】 在甲：$4x^2+8x-5$、乙：a^4-7a^2+1、丙：$4p^4+1$ 三个多项式中，能用配方法分解因式的个数是（　　）.

①0 个　　②1 个　　③2 个　　④3 个

错误解答

$$\begin{aligned}甲式&=4\left(x^2+2x-\frac{5}{4}\right)=4\left[x^2+2x+1^2-1^2-\frac{5}{4}\right]\\&=4\left[(x+1)^2-\frac{9}{4}\right]=4\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\\&=(2x+5)(2x-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}乙式&=a^4+2a^2+1-9a^2=(a^2+1)^2-(3a)^2\\&=[(a^2+1)+3a][(a^2+1)-3a]\\&=(a^2+3a+1)(a^2-3a+1)\end{aligned}$$

只有丙式 $4p^2+1$ 没法用配方法分解因式.

故选③.

评析 对丙式，也可采用配方法分解：

$$\begin{aligned}4p^4+1&=(4p^4+4p^2+1)-4p^2\\&=(2p^2+1)^2-(2p)^2=(2p^2+2p+1)(2p^2-2p+1)\end{aligned}$$

正确解答 选④.

【例 16】 分解因式$(x^2-4x)^2+(4x-x^2)-20$.

错误解答 原式$=(4x-x^2)^2+(4x-x^2)-20$

$=(4x-x^2+5)(4x-x^2-4)$

$=(5+4x-x^2)[-(x^2-4x+4)]$

$=-(x-2)^2(5+4x-x^2)$

评析 初学者一般不习惯于对升幂排列的二次三项式进行因式分解,所以,对二次三项式$5+4x-x^2$的因式分解就不顺手了,甚至认为不能分解.

正确解答 原式$=(4x-x^2)^2+(4x-x^2)-20$

$=(4x-x^2+5)(4x-x^2-4)$

$=(5+4x-x^2)[-(x^2-4x+4)]$

$=(5-x)(1+x)[-(x-2)^2]$

$=-(x-5)(x+1)[-(x-2)^2]$

$=(x+1)(x-5)(x-2)^2$

【例 17】 多项式$\frac{1}{3}x^2-x+3y-3y^2$分解因式如下:

甲:$\frac{1}{3}(x-3y)(x+3y-3)$ 乙:$3(\frac{1}{3}x-y)(\frac{1}{3}x+y-1)$

丙:$(x-3y)(\frac{1}{3}x+y-1)$ 丁:$(\frac{1}{3}x-y)(x+3y-3)$

在四个结果中正确的个数是( ).

①4 个 ②3 个 ③2 个 ④1 个

错误解答 原式$=\frac{1}{3}(x^2-3x+9y-9y^2)$

$=\frac{1}{3}[(x^2-9y^2)-(3x-9y)]$

$=\frac{1}{3}[(x+3y)(x-3y)-3(x-3y)]$

$=\frac{1}{3}(x-3y)(x+3y-3)$