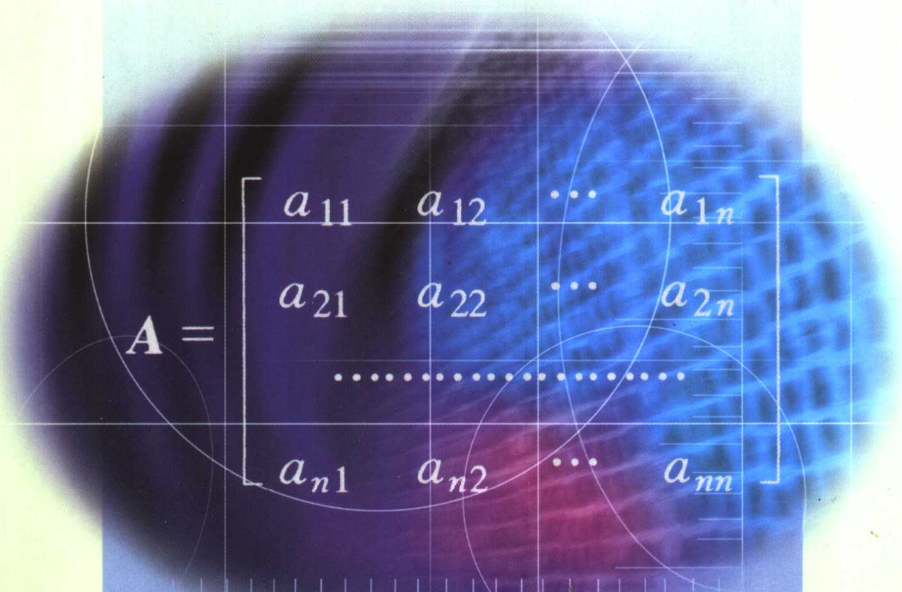
高等农林院校十五规划教材

全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教学指导委员会审定

线性代数

鲁春铭　何延治　主编



中国农业出版社

全 国 高 等 农 业 院 校 教 材

全国高等农业院校教学指导委员会审定

线 性 代 数

鲁春铭 何延治 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 鲁春铭，何延治主编. —北京：中国农业出版社，2003.12
全国高等农业院校教材
ISBN 7-109-08678-X

Ⅰ.线… Ⅱ.①鲁…②何… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 104197 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
出版人：傅玉祥
责任编辑 朱 雷

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：787mm×960mm 1/16 印张：12.75
字数：222 千字
定价：17.80 元

编 写 人 员

主　编　鲁春铭　何延治

副主编　李喜霞　李海春　丰　雪

参　编　韩国涛　马　鸿　崔根成

主　审　惠淑荣

前　言

随着科学技术的迅速发展和电子计算机的广泛应用，越来越多的实际问题需要用线性代数知识解决．而且，线性代数又是一门抽象性很高的学科，长期以来，一直被公认为理论不容易掌握，解题比较困难．因此，我们根据几年来编写教材的一些经验和教学实践，按照农业部学科组关于“线性代数教学的基本要求”及高等农、林、牧、水产院校大纲的要求编写了这本教材．

全书内容包括 n 阶行列式、矩阵、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、矩阵微分法等，编写中力求概念准确，内容清晰易懂，推理严谨．在例题与习题的选择上注重典型性和代表性．

本书出版过程中得到了沈阳农业大学及编者所在院校的大力支持，在此一并表示感谢．

书中不妥之处，恳请读者批评指正．

编　者

2003 年 8 月

目　录

第一章　n 阶行列式 …… 1
第一节　n 阶行列式的概念 …… 1
一、全排列及其逆序数 …… 1
二、二、三阶行列式 …… 2
三、n 阶行列式 …… 5
习题 1.1 …… 6
第二节　行列式的性质 …… 7
习题 1.2 …… 13
第三节　行列式的展开与运算 …… 14
习题 1.3 …… 20
第四节　克莱姆法则 …… 21
习题 1.4 …… 25
总复习题一 …… 26
第二章　矩阵 …… 30
第一节　矩阵的概念 …… 30
一、矩阵的定义 …… 30
二、几种重要矩阵 …… 31
三、矩阵的相等 …… 32
习题 2.1 …… 33
第二节　矩阵的运算 …… 33
一、矩阵的线性运算 …… 33
二、矩阵与矩阵的乘法 …… 34
三、方阵的幂与方阵的多项式 …… 36
四、矩阵的转置 …… 37

五、方阵的行列式 …… 38

六、共轭矩阵 …… 39

习题 2.2 …… 39

第三节　逆矩阵 …… 40

一、逆矩阵的概念 …… 40

二、逆矩阵存在的条件与求法 …… 40

三、逆矩阵的运算性质 …… 43

习题 2.3 …… 44

第四节　分块矩阵 …… 45

一、分块矩阵的概念 …… 45

二、分块矩阵的运算 …… 46

习题 2.4 …… 50

总复习题二 …… 50

第三章　向量组的线性相关性与矩阵的秩 …… 53

第一节　n 维向量 …… 53

一、n 维向量的概念 …… 54

二、n 维向量的线性运算 …… 54

三、向量组与矩阵的关系及线性方程组的向量表示 …… 55

习题 3.1 …… 55

第二节　线性相关与线性无关 …… 56

一、线性表示与线性相关 …… 56

二、线性相关性与方程组解的关系 …… 60

习题 3.2 …… 61

第三节　线性相关性的判别定理 …… 61

习题 3.3 …… 63

第四节　向量组的秩 …… 64

一、向量组的等价 …… 64

二、最大线性无关组 …… 65

三、向量组的秩 …… 66

习题 3.4 …… 67

第五节　矩阵的秩 …… 67

一、矩阵秩的概念 …… 67

二、矩阵的初等变换 …… 69

习题 3.5 …… 72
第六节　初等方阵 …… 72
习题 3.6 …… 76
第七节　向量空间 …… 76
习题 3.7 …… 77
总复习题三 …… 77

第四章　线性方程组 …… 80

第一节　齐次线性方程组 …… 80
一、齐次线性方程组解的判定 …… 81
二、齐次线性方程组的解空间 …… 81
三、齐次线性方程组的基础解系 …… 81
习题 4.1 …… 86
第二节　非齐次线性方程组 …… 87
一、非齐次线性方程组有解的条件 …… 87
二、非齐次线性方程组解的结构 …… 88
习题 4.2 …… 91
总复习题四 …… 92

第五章　相似矩阵及二次型 …… 96

第一节　正交变换 …… 96
一、正交矩阵 …… 96
二、正交变换 …… 101
习题 5.1 …… 102
第二节　方阵的特征值与特征向量 …… 104
一、特征值与特征向量 …… 104
二、实对称矩阵的特征值、特征向量的性质 …… 108
习题 5.2 …… 108
第三节　实对称矩阵的对角化 …… 109
一、相似矩阵 …… 109
二、实对称矩阵的对角化 …… 110
习题 5.3 …… 113
第四节　二次型及其标准形 …… 113
一、二次型与矩阵 …… 113

二、用正交变换化二次型为标准形 …… 115
三、用配方法化二次型为标准形 …… 118
习题 5.4 …… 120
第五节　正定二次型 …… 120
一、惯性定律 …… 120
二、正定二次型 …… 121
习题 5.5 …… 124
总复习题五 …… 125

第六章*　矩阵微分法 …… 127

第一节　函数矩阵的导数 …… 127
第二节　矩阵数量函数的微分 …… 129
习题 6 …… 131

附录　MATLAB 软件在线性代数中的应用 …… 133
习题答案 …… 179
参考文献 …… 192

第一章　n 阶行列式

行列式是由研究线性方程组而产生的，在科学技术的许多领域里都会用到它，特别是在线性代数中更是不可缺少的工具.

为了研究 n 阶线性方程组，需要讨论 n 阶行列式的问题.为此，这一章我们将在二、三阶行列式的基础上给出 n 阶行列式的定义，行列式的性质，行列式的展开与计算及克莱姆法则.

第一节　n 阶行列式的概念

这一节主要目的是建立 n 阶行列式的概念，为此先介绍全排列、逆序数及其二、三阶行列式的知识.

一、全排列及其逆序数

在初等数学中讨论过全排列，即由 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列(简称排列).特别地，从 1 到 n 的这 n 个自然数，规定由小到大的排列为标准次序.如果这 n 个自然数的一个排列为：

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

有大数 p_i 在小数 p_j 的前面，则称此排列有一个逆序.一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.

下面给出计算排列的逆序数的方法.不失一般性设从 1 至 n 这 n 个自然数的一个排列为 $p_1 p_2 \cdots p_n$，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i.全体元素的逆序数的总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数.

例 1　求排列 4　3　1　2 的逆序数.

解：在排列 4　3　1　2 中，

4 排在首位，逆序数为 0；

3 的前面 4 比 3 大，有 1 个逆序；

1 的前面 4、3 都比 1 大,有 2 个逆序;

2 的前面 4、3 都比 2 大,有 2 个逆序;

因此,该排列的逆序数为:

$$t=0+1+2+2=5$$

通常,逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

逆序数有一个重要性质:

互换排列中任意两个数,其逆序数的奇偶性改变.

例如在例 1 中若互换 3 与 2,得到的新排列是 4 2 1 3,它的逆序数是 4,与原来排列 4 3 1 2 相比,逆序数的奇偶性改变了.

推论:奇排列调成标准排列的互换次数为奇数,偶排列调成标准排列的互换次数为偶数.

二、二、三阶行列式

为了引进二、三阶行列式,让我们回顾二、三元线性方程组的求解.

二元线性方程组的一般形式为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用加减消元法消去方程组(1-1)中第二式的 x_2,得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

同理

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆上述解的公式,我们引进二阶行列式的定义:

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为二阶行列式.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-2}$$

于是,二元线性方程组的解可以表示为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

即 D 是方程组(1-1)的系数按它们在(1-1)式中的次序排列构成的行列式,称为二元线性方程组的系数行列式,$D_i(i=1,2)$是把系数行列式中的第 i 列元素用方程组右端的常数代替后构成的二阶行列式.

类似地,三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

的解可用三阶行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中系数行列式为 D,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-4}$$

三阶行列式表示的 6 项代数和，可用图 1-1 记忆. 其中，实线连接的三个数之积取正号，虚线连接的三个数之积取负号.

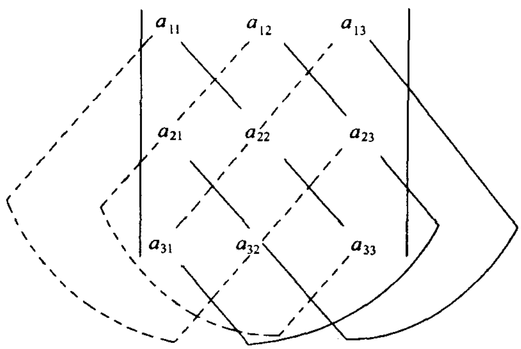


图 1-1

为了给出 n 阶行列式定义，我们分析三阶行列式的结构：

(1) 在三阶行列式定义中，a_{ij}表示行列式中的第 i 行(称行标)第 j 列(称列标)的元素. 三阶行列式共有 3! =6 项代数和.

(2) (1-4)式右边的每一项都恰是不同行不同列上三个元素的乘积，右边的任意项除正负号外，可写成如下形式：

$$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$$

这里行标排成标准排列 1 2 3，而列标排成 $i_1i_2i_3$，它是 1,2,3 的一个排列.

(3) (1-4)式右边的每一项的符号是：当这一项的行标是 1 2 3 标准次序，那么，列标的逆序数是奇数时，这一项取“-”号，逆序数是偶数时，这一项取“+”号.

例如　三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 0\times 5+2\times(-2)\times(-3)+3\times(-1)\times 4$$
$$-1\times(-2)\times 4-2\times(-1)\times 5-3\times 0\times(-3)$$
$$=18$$

若采用“∑”符号，三阶行列式可写成如下形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \qquad (1-5)$$

这里 $i_1 i_2 i_3$ 是 1,2,3 的一个排列，t 是 $i_1 i_2 i_3$ 的逆序数，∑表示对 1,2,3 这三个数所有排列 $i_1 i_2 i_3$ 取和.

三、n 阶行列式

依照二、三阶行列式定义，把行列式推广到一般情形.

定义　用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当这一项中元素的行标按自然顺序排列时，若对应的列标的逆序数是偶数，这一项取“+”号，若对应的列标的逆序数是奇数，这一项取“−”号.

n 阶行列式可表示为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \quad (1-6)$$

其中，$i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 是这个排列的逆序数，∑表示对 $1,2,\cdots,n$ 的一切排列取和，共有 $n!$ 项.

例 2　证明对角行列式(其中对角线上的元素是 a_i，未写出的元素都是 0).

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

证明：第一式显然．下面仅证明第二式．

第二个行列式中，除了乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 这一项外，其他项中都包含数零，从而等于零，不等于零的这一项符号由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的位置确定，当它们的行标按照 $1,2,\cdots,n$ 的标准顺序时，对应的列标排列顺序是 $n,n-1,\cdots,2,1$，其逆序数为

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

例 3 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明：因为 n 阶行列式 D 的一般项为

$$(-1)^t a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

而 D 的第 n 行除 a_{nn} 外，其他元素都为零，所以只能取 $i_n=n$．又因为第 $n-1$ 行除 $a_{n-1\,n-1},a_{n-1\,n}$ 这两个元素外，其他元素都为零，因此 i_{n-1} 只能取 $n-1,n$ 这两种可能，但是 $i_n=n$，故 i_{n-1} 不能取 n，只能是 $i_{n-1}=n-1$．这样逐步推上去，其他项都等于零．不等于零的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$．此项的符号是 $(-1)^t=(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

利用逆序数的性质，可以证明行列式的另一种表示．

定理 1 ***n* 阶行列式也可以表示为**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

其中 t 为行标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数．

证明略．

习 题 1.1

1．按自然数从小到大为标准次序，求下列排列的逆序数．

(1) 2 4 3 1 6 5

(2) $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ \cdots\ (2n)$

(3) $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ (2n)\ (2n-2)\ \cdots\ 2$

2. 下面的乘积是否为四阶行列式的乘积项？如果是，请确定其符号.

(1) $a_{13}\ a_{21}\ a_{33}\ a_{42}$　　(2) $a_{32}a_{21}a_{43}a_{24}$　　(3) $a_{43}a_{31}a_{12}a_{24}$　　(4) $a_{12}a_{33}a_{41}a_{24}$

3. 写出四阶行列式中所有带负号且包含因子 a_{23} 的项.

4. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. 利用定义计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

第二节　行列式的性质

对于二、三阶行列式可以直接用定义计算它们的值，但当 n 较大时，例如 $n=10$，直接用定义计算需要计算 $10!=3\,628\,800$ 项，由此可见用定义直接计算高阶行列式是很麻烦的.因此，实际计算行列式时，必须采取另外的途径.下面介绍的行列式的性质，不仅可以简化行列式的计算，而且对行列式的理论研究起到重要作用.

性质 1　互换行列式的两行(列)，其行列式的值变号.

例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{调换第 2 行与第 3 行}} -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

证明：设行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1i_1}\cdots a_{pi_p}\cdots a_{qi_q}\cdots a_{ni_n}$$

变换行列式 D 的第 p、q 两行得到的行列式为 D_1.

因此，D 中每一项也是 D_1 中的项.

其次，D 中任一项 $(-1)^t a_{1i_1} \cdots a_{pi_p} \cdots a_{qi_q} \cdots a_{ni_n}$，它在 D_1 中相当于 $(-1)^t a_{1i_1} \cdots a_{qi_p} \cdots a_{pi_q} \cdots a_{ni_n}$，把这一项的行标 $1 \cdots q \cdots p \cdots n$ 调换成 $1 \cdots p \cdots q \cdots n$ 后，其列标的顺序为 $i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$，与 D 中相应项的列标 $i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$ 相比，仅将 i_p 与 i_q 对调，根据逆序数性质，其逆序数的奇偶性改变了，设 $i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$ 的逆序数为 t_1，则有 $(-1)^t = -(-1)^{t_1}$，因此有 $D = -D_1$.

用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_i 表示第 i 列，交换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

性质 2　行列式的某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式外面(第 i 行提出公因子 k，记作 $r_i \div k$).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i \div k} k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明：左端

$$= \sum (-1)^t a_{1i_1} \cdots (ka_{ii_i}) \cdots a_{ni_n} = k \sum (-1)^t a_{1i_1} \cdots a_{ii_i} \cdots a_{ni_n} = \text{右端}$$

推论　行列式的某一行(列)中的各元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式(第 i 行乘以 k，记作 $r_i \times k$).

性质 3　如果行列式的某一行(列)都是两项之和，则这个行列式等于两个行列式之和.

例如

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

其证明类似性质 2.

性质 4　行列式中若有两行(列)对应元素成比例，则这个行列式的值等于零.