数学课程与教学研究丛书

实变函数

SHIBIAN HANSHU

赵焕光 / 编著

SB Hs

四川大学出版社

责任编辑:王　锋
责任校对:李桂兰
封面设计:罗　光
责任印制:杨丽贤

图书在版编目(CIP)数据

实变函数／赵焕光编著．—成都：四川大学出版社，2004.12
(大学数学课程与教学研究丛书／赵焕光,林长胜主编)
ISBN 7-5614-2967-3

Ⅰ.实...　Ⅱ.赵...　Ⅲ.实变函数-教学研究-高等学校　Ⅳ.O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 119120 号

书　名　实变函数

编 著　赵焕光
出 版　四川大学出版社
地 址　成都市一环路南一段 24 号（610065）
发 行　四川大学出版社
印 刷　华西医科大学印刷厂
开 本　850mm×1168mm　1/32
印 张　6.75
字 数　165 千字
版 次　2004 年 12 月第 1 版
印 次　2005 年 3 月第 2 次印刷
印 数　1 001～3 000 册
定 价　20.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　　言

《实变函数》是大学数学系本科阶段理论性较强的一门基础课程. 该课程的主要研究对象是定义在实数集上的实函数,集合论方法与极限方法是其主要的研究方法,因而该课程又称“实分析”. 该课程的核心内容是 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分,Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分理论的产生来自于对 Riemann 积分的改良.

Lebesgue 与 Riesz 等数学家运用创造性思维创建与完善的实变函数论已成为现代数学分析学不可缺少的理论基础. 实变函数论的结果与方法已被广泛地应用于微分方程、积分方程、调和分析、逼近论等学科. 泛函分析的某些重要例子往往取材于实变函数,现代概率论则是完全建立在测度论与抽象积分论的基础之上,可以毫不夸张地说,概率论就是“概率测度空间上的实变函数”. 此外,目前许多很热门的数学学科,比如集值分析与分形数学则是实分析内容与方法的进一步深化. 因此,学好实变函数是进一步学习现代分析数学课程的必备基础.

对于将来准备从事中学数学教学工作的数学系学生来说,学好实变函数还有另一层面上的意义,那就是实变函数所蕴涵着的数学思想、数学精神及其数学方法对中学数学教学的确能起到居高临下的作用. 然而,实情却是实变函数课程的吸引力欠佳,尤其数学基础不是很好的数学系学生学习实变函数课程更会感到困难,因而导致学习该课程的收效甚微. 无论是教实变函数课程的教师,还是学习实变函数课程的学生,对实变函数课程的教学效果总是感到不尽如人意. 应当承认,实变函数课程中的许多概念具

有一定的抽象性，许多重要结论异常深刻，要掌握这些都需要理论性较强的推理技巧. 但实际上，只要熟悉了实变函数这门课程的特点，善于运用集合论的语言、映射的观点与极限的方法处理实变函数问题，掌握实变函数课程的基本内容与基本方法并不存在不可逾越的鸿沟. 当然，学习过实变函数课程的人都有体会，实变函数的习题特别难做，这是因为实变函数习题涉及的知识面较广，而且需要广泛运用发散思维去解决问题.

笔者通过多年实变函数课程的教学与教改实践，积累了点滴经验，形成了自己的一些肤浅见解. 本书就是笔者根据自己学习与教学的体会，对实变函数课程的核心内容进行整理而形成的. 本书以块状格式呈现材料的写作方式与以往的实变函数教材以及实变函数学习指导书的写作方式有较大的不同. 笔者认为，这种写作方式，一方面有利于突现实变函数课程的学科结构，另一方面可留给该书读者更大的思考与创意空间. 考虑到初学实变函数者做实变函数习题普遍感到难以入门，本书后面附有一部分实变函数常见习题的解答参考或提示.

借本书正式出版的机会，笔者衷心感谢时任温州师范学院院长的马大康教授、温州师范学院主管教学工作的副院长丁金昌教授、温州师范学院数学与信息科学学院院长陆正一教授、温州师范学院数学与信息科学学院戴梅红书记对笔者在实变函数课程教学中做出的教学改革探索所给予的大力支持与鼓励.

赵焕光

2004 年 6 月 30 日于温州

目　　录

第1章　集合与点集

集合论由德国数学家康托尔(Cantor，1845—1918)首创于19世纪70年代. 集合论的早期工作与数学分析的深入研究密切相关. 随着集合理论的逐渐系统化，集合论发展为现代数学的一个独立分支. 集合论是关于无穷集合与超穷数的数学理论，主要研究无穷集合的各种性质.

集合论的创立是数学发展史上的一个里程碑，它不仅给数学大厦奠定了坚实的基础，而且引发了数学中无穷观的一场革命. "集合论观点"与现代数学的发展不可分割地联系在一起，集合论的思想不仅渗透到现代数学的各个领域，甚至渗透到许多自然科学学科(例如物理学、现代力学、生物学等)与社会科学学科(例如语言学、经济学等)中，并促进了这些学科的进一步发展.

本章介绍集合论的基本知识、基数的基本理论以及直线上点集的简单特性.

关键概念　集合，映射，基数，可数集，连续基数集，开集，闭集.

本章预览　通过本章学习，你应能够：

(1)理解集合概念，掌握集合的代数运算，了解集列的极限运算.

(2)理解映射与基数概念，掌握对等的概念，掌握构造一一映射的基本方法，了解基数比较的基本知识.

(3)理解可数集与连续基数集概念，掌握可数集与连续基数集的基本性质，掌握可数集与连续基数集的基本判别法，了解无穷集合的特征.

(4)理解开集、闭集、完备集的概念，掌握直线上开集、闭集、完备集的特性及其构造方法，掌握 Cantor 完备集的构造方法及其特性.

1.1 集合及其运算

1.1.1 问题提出

(1)何谓集合?

(2)集合的代数运算如何进行?

(3)集列的极限运算如何进行?

1.1.2 概念入门

1.1.2.1 集合概念

集合是原始概念，Cantor 运用“概括性”原则直观描述如下：**具有某种特定性质的事物的全体称之为集合，组成集合的每一事物称为该集合的元素.** 通常用大写英文字母 A, B, C 等表示集合，用小写英文字母 a, b, c, x, y 等表示元素.

注 ①人们通常把 Cantor 给出集合概念的日子——1873 年 12 月 7 日作为集合论的生日，并把此时期认作现代数学的开端.

②集合通常有列举法与描述法两种表示方法，能用集合语言准确表述数学问题是学好实变函数的基本功之一.

1.1.2.2 集族与集列

设 I 是一个非空的集合，若对每个 $i\in I$，都指定了一个集合 A_i，则称这样所得到的集合全体为集族，记作 $\{A_i \mid i\in I\}$ 或 $\{A_i\}_{i\in I}$. 当 I 为自然数集 $\mathbf{N}$ 时，则称 $\{A_n \mid n\in \mathbf{N}\}$ 为集列，简

记作$\{A_n\}$.

1.1.2.3 集合的代数运算

集合的代数运算包括：并、交、差(对称差)、余、直积等. 下设A，B，S是给定的集合，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是给定的集族.

(1)集合的并：

①$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$，读作集合A与B的并；

②$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\ \exists\alpha\in I$ 使得 $x\in A_\alpha\}$，读作$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$的并.

(2)集合的交：

①$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，读作集合A与B的交；

②$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\ \forall\alpha\in I,\ x\in A_\alpha\}$，读作$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$的交.

(3)集合的差：

$A\backslash B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，读作集合A与B的差.

(4)集合的对称差：

$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$，读作集合$A$与$B$的对称差.

(5)集合的余集：

$A\subset S$，$C_SA=\{x|x\in S$ 且 $x\notin A\}=S\backslash A$，读作集合$A$在集合$S$中的余集. 在全集不混淆的情形下，简记$C_SA=A^C$.

(6)集合的直积：

①$A\times B=\{(x,\ y)|x\in A,\ y\in B\}$，读作$A$与$B$的直积；

②$\prod\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=\{(x_\alpha)|x_\alpha\in A_\alpha,\ \alpha\in I\}$，读作集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$的直积.

注 集合的分解与合成是探讨集合之间的相互关系以及组成新的集合的一种有效手段，也是使集合论方法在数学各个分支中得以运用的重要途径，而集合的分解与合成正是通过集合间的运算来实现的. 因此，熟悉集合的运算是学好集合论的基本功.

1.1.2.4 集列的极限运算

(1)若$\{A_k\}$是单调上升集列：$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$，则称$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$为集列$\{A_k\}$的极限，并记作$\lim\limits_{k\to\infty}A_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(2)若$\{A_k\}$是单调下降集列：$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$，则称$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$为集列$\{A_k\}$的极限，并记作$\lim\limits_{k\to\infty}A_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(3)设$\{A_k\}$是给定的集列，分别称$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$与$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$为集列$\{A_k\}$的上、下极限集.

(4)如果$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$，则称集列$\{A_k\}$有极限，并称其公共集合为集列$\{A_k\}$的极限.

1.1.3 主要事实

1.1.3.1 集合代数运算的基本性质

(1)幂等律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$.

(2)吸收律：若$A\subset B$，则$A\cap B=A$，$A\cup B=B$.

(3)交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(4)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(5)分配律：$A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A\cup A_\alpha)$，

$A\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\cup A_\alpha)$.

(6)互补律：$A\cup A^C=S$，$A\cap A^C=\varnothing$.

(7)转换律：$A\backslash B=A\cap B^C$.

(8)反对称律：若$A\subset B$，则$B^C\subset A^C$；

若$A\cap B=\varnothing$，则$A\subset B^C$，$B\subset A^C$.

(9)对称律：$A\Delta B=B\Delta A$，$A\bigcup B=(A\Delta B)\bigcup(A\bigcap B)$.

(10)De Morgan 对偶法则：

$$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^C=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C,\ (\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^C=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^C.$$

证　性质(5)第二个等式.

①若 $x\in A\bigcup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$，则 $x\in A$ 或 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$. 此时分以下两种情况讨论：

(ⅰ)当 $x\in A$ 时，对 $\forall\alpha\in I$ 有 $x\in A\bigcup A_\alpha$，于是有

$$x\in\bigcap_{\alpha\in I}(A\bigcup A_\alpha).$$

(ⅱ)当 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ 时，对 $\forall\alpha\in I$ 有 $x\in A_\alpha$，于是对 $\forall\alpha\in I$ 有 $x\in A\bigcup A_\alpha$，因而 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}(A\bigcap A_\alpha)$. 这样证得

$$A\bigcup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in I}(A\bigcup A_\alpha).$$

②若 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}(A\bigcup A_\alpha)$，则对 $\forall\alpha\in I$ 有 $x\in A\bigcup A_\alpha$. 此时也分以下两种情况讨论：

(ⅰ)当 $x\in A$ 时，$x\in A\bigcup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$；

(ⅱ)当 $x\notin A$ 时，对 $\forall\alpha\in I$ 有 $x\in A_\alpha$，于是 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$，因而有 $x\in A\bigcup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$. 这就证得

$$\bigcap_{\alpha\in I}(A\bigcup A_\alpha)\subset A\bigcup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha).$$

综合①与②得

$$A\bigcup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\bigcap A_\alpha).$$

注　以上是运用相互包含的方法证明集合相等.

证　性质(10)第二个等式.

由 $x\in(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^C\Leftrightarrow x\notin\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Leftrightarrow\exists\alpha\in I,\ x\notin A_\alpha$

$$\Leftrightarrow\exists\alpha\in I,\ x\in A_\alpha^C\Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^C$$

得

$$(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^C=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^C.$$

注　这里是采用等价描述法证明集合相等. 其余的请读者自证.

1.1.3.2 集列上、下极限集的特征

(1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\{x\mid 对\forall n\geqslant 1,\exists k\geqslant n 使得 x\in A_k\}$

$=\{x\mid 存在子列\{k_n\}使得 x\in A_{k_n}, n=1,2,\cdots\}$

$=\{x\mid x 属于无穷多个 A_k\}$.

(2) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\{x\mid \exists n(x)\geqslant 1, 当 k\geqslant n 时, x\in A_k\}$

$=\{x\mid x 属于除至多有限个 A_k 之外的所有 A_k\}$.

(3) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\subset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$.

(4) 若$\{A_k\}$是单调集列，则 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$.

证 (1) 由 $x\in\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k\Leftrightarrow\forall n\geqslant 1, x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$

$\Leftrightarrow x\in\{x\mid 对\forall n\geqslant 1,\exists k\geqslant n 使得 x\in A_k\}$

$\Leftrightarrow x\in\{x\mid 存在子列\{k_n\}使得 x\in A_{k_n}; n=1,2,\cdots\}$

及 $x\notin\{x\mid 对\forall n\geqslant 1,\exists k\geqslant n, 使得 x\in A_k\}$

$\Leftrightarrow\exists n_0\geqslant 1, 对\forall k\geqslant n_0, x\notin A_k$

$\Leftrightarrow\{x\mid x 至多属于有限个 A_k\}$

$\Leftrightarrow x\notin\{x\mid x 属于无穷多个 A_k\}$,

可知特征(1)成立.

若 $A_k\nearrow$，则

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}A_m=\underline{\lim_{m\to\infty}}A_m;$$

若 $A_k\searrow$，则

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\supset\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty}A_m=\overline{\lim_{m\to\infty}}A_m.$$

结合特征(3)，特征(4)得证.

其余的请读者自证.

1.1.4 例题选讲

例 1－1 求证：$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$.

证 $A\backslash(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^C=A\cap(B^C\cap C^C)$

$$=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)$$

$$=(A\backslash B)\cap(A\backslash C).$$

注 这里是运用集合的运算法则证明集合相等.

例 1－2 试问$(A\backslash B)\cup B=(A\cup B)\backslash B$成立的条件是什么？

解 $(A\backslash B)\cup B=(A\cap B^C)\cup B$

$$=(A\cup B)\cap(B^C\cup B)=A\cup B$$

$$(A\cup B)\backslash B=(A\cup B)\cap B^C$$

$$=(A\cap B^C)\cup(B\cap B^C)=A\backslash B$$

$$(A\backslash B)\cup B=(A\cup B)\backslash B\Leftrightarrow A\cup B=A\backslash B$$

因此$(A\backslash B)\cup B=(A\cup B)\backslash B$成立的条件是$B=\emptyset$.

例 1－3 设$A_n=\left[-1+\dfrac{1}{n},\ 1-\dfrac{1}{n}\right]$，$n=1, 2, \cdots$，试证明：

(1) $\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n=\left[-1+\dfrac{1}{m},\ 1-\dfrac{1}{m}\right]$.

(2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=(-1,\ 1)$.

(3) $\bigcap\limits_{n=1}^{m}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1=\{0\}$.

证 (1) $x_0\in(-1,\ 1)\Leftrightarrow|x_0|<1\Leftrightarrow 1-|x_0|>0$

$$\Leftrightarrow\exists n_0\in\mathbf{N}\text{ 使得 }1-|x_0|\geqslant\frac{1}{n_0}$$

$$\Leftrightarrow\exists n_0\in\mathbf{N}\text{ 使得 }|x_0|\leqslant 1-\frac{1}{n_0}$$

$$\Leftrightarrow\exists n_0\in\mathbf{N}\text{ 使得 }x_0\in\left[-1+\frac{1}{n_0},\ 1-\frac{1}{n_0}\right]$$

$$\Leftrightarrow x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$