新编高中数学解题途径

夏益辉 徐惠芳 刘定一 鲍宜国 编

华东师范大学出版社

新编高中数学解题途径

夏益辉　　徐惠芳
刘定一　　鲍宜国　编

华东师范大学出版社

责任编辑 倪 明

新编高中数学解题途径

夏益辉 徐惠芳 刘定一 鲍宜国 编

华东师范大学出版社出版发行

(上海中山北路3663号)

邮政编码：200062

新华书店上海发行所经销 江苏省句容市排印厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 17.75 字数 390 千字

1995 年 3 月第一版 1998 年 2 月第 5 次印刷

印数：59,001—64,000 本

ISBN 7-5617-1247-2/G·534 定价：14.00元

前　言

《中学数学解题途径》出版以后，深受广大中学生、自学青年的爱护和支持。我们曾接到很多读者来信，对之深表欢迎，认为它能帮助读者寻求解题的途径，指导解题的思路方法；同时希望调整某些内容，增补一些练习题，并能给出解答。为此，我们华东师大一附中数学组的四位同志，根据这些很好的意见重新编写了本书，取名为《新编高中数学解题途径》。

在确定本书的内容时，我们以现行教学大纲和教材为主要依据，兼顾高考和会考的要求，贯彻教学改革的精神。编写中，力求做到：探讨分析合理的解题方法，或揭示解题的规律，或指出解题的关键，或说明容易出错的地方，以帮助读者找到正确的解题途径，提高解题能力。

本书习题分A、B两组，其中A组题为基本要求，着重于基础知识、基本技能、基本方法的训练。B组题的综合性、灵活性较大，着重于思路分析和解题能力的训练。所有的习题都附有答案，对难度较大和综合性较强的习题，给出了解题思路和主要步骤。例题和习题的要求多数还在大纲范围之内，以供读者选用。

为了提高阅读本书的效果，减少学习过程中的困难，希望读者边阅读边练习，并在阅读每一章内容或解练习题前，先复习一下课本中有关知识。本书限于篇幅，对基础知识不作全面复习。

本书适用于高中各年级学生课外阅读，或课外选修，对高

中数学教师、师范院校学生和自学青年也有裨益。

本书第一、二、三、四章由夏益辉执笔，第五、九章由徐惠芳执笔，第六、七、八章由刘定一执笔，第十、十一、十二章由鲍宜国执笔。

限于水平，书中难免会有不当之处，我们恳切希望读者提出宝贵意见。

编　　者

于华东师大第一附属中学

一九九四年八月

目　　录

前言
第一章　幂函数、指数函数和对数函数……………（1）
第二章　三角函数……………………………………（59）
第三章　三角变换……………………………………（79）
第四章　反三角函数和简单三角方程………………（99）
第五章　数列、数学归纳法…………………………（133）
第六章　不等式………………………………………（175）
第七章　复数…………………………………………（216）
第八章　排列、组合、二项式定理…………………（241）
第九章　立体几何……………………………………（268）
第十章　直线与圆锥曲线……………………………（339）
第十一章　轨迹方程…………………………………（374）
第十二章　参数方程与极坐标………………………（403）
高中数学综合题………………………………………（443）
习题答案与提示………………………………………（449）

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　集　合

一组对象的全体形成一个集合．集合的元素必须具有两个特征：一是元素的确定性，二是元素的互异性．

元素同集合的关系是“属于”或“不属于”．集合同集合的关系有“包含”(或“包含于”)、“不包含”、“相等”．要注意符号“$\in$”、“$\notin$”，只能用在元素与集合的符号之间，符号“$\supseteq$”、“$\supset$”、“$\subseteq$”、“$\subset$”、“$=$”，只能用在两个集合符号之间，不能用错．

集合的交与并：　$A\cap B=\{x|x\in A,且x\in B\}$，

$A\cup B=\{x|x\in A,或x\in B\}$．

“$x\in A$，且 $x\in B$”是说 x 既是 A 的元素，又是 B 的元素，也就是说 x 是 A 和 B 的公共元素．“$x\in A$，或 $x\in B$”就包含三种可能情况：①$x\in A$，但 $x\notin B$；②$x\in B$，但 $x\notin A$；③$x\in A$，同时 $x\in B$．明确“且”和“或”的上述含义，以正确地使用“交”和“并”．

集合 A 的补集是相对于给定的全集 I 来说的，A 必须是 I 的子集，于是由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，就叫做 A 在全集 I 中的补集，记作 $\bar{A}$．

要熟悉关于交集、并集、补集的一些性质：

$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup A=A$，$A\cap A=A$，

$A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\varnothing$，$\bar{\bar{A}}=A$，

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，$\cdots$．

△ 确定一个集合，常利用集合的元素的两个特征——确定性和互异性．从集合的交、并、补等概念上作分析，可把集合问题转化为代数问题或几何问题来求解．借助于数轴、图象、文氏图进行思考，能帮助我们寻找集合问题的解答途径．

例 1 已知集合 $A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{-4, a+3, a^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\}$，且 $A\cap B=\{2,5\}$．求实数 a 的值．

分析： 依据集合中元素的确定性和互异性，从已知条件 $A\cap B=\{2,5\}$入手，可知 A 中元素 a^3-2a^2-a+7 必为 5．

解： $\because$ $A\cap B=\{2,5\}$，$\therefore$ $A=\{2,4,5\}$，

$\therefore$ $a^3-2a^2-a+7=5$，$a^2(a-2)-(a-2)=0$，

从而$(a-2)(a^2-1)=0$，得 $a=2$，或 $a=\pm1$．

当 $a=2$ 时，$B=\{-4,5,2,25\}$，这时 $A\cap B=\{2,5\}$，符合题意．

当 $a=1$ 时，$B=\{-4,4,1,12\}$，这时 $A\cap B=\{4\}$，与已知 $A\cap B=\{2,5\}$矛盾，不合题意．

当 $a=-1$ 时，$B=\{-4,2,5,4\}$，这时 $A\cap B=\{2,4,5\}$，与已知 $A\cap B=\{2,5\}$矛盾，不合题意．

因此，$a=2$ 为所求的值．

注：本题要深刻理解交集的概念，$A\cap B$ 中元素既属于 A，又属于 B，也就是说 $A\cap B$ 是 A 的子集，又是 B的子集，即 $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$．

例 2 已知集合 $A=\{x|x^2-mx+m^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$．求实数 m 的值．

分析： 不难求出 B、C 的元素，然后根据题中条件来确定 A 的元素，从而求得 m 的取值．

解：不难求得，$B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$。由$A\cap C=\varnothing$，可知$2\notin A$，$-4\notin A$；又由$A\cap B\neq\varnothing$，可知2、3之中至少有一个属于A；于是只有$3\in A$。

由此用3代入$x^2-mx+m^2-19=0$中的x，得$3^2-3m+m^2-19=0$，解得$m=5$，或$m=-2$。

当$m=5$时，$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，此时$A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$与已知条件矛盾，不合题意。

当$m=-2$时，$A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$，此时满足所有已知条件。

因此，$m=-2$即为所求的值。

注：若集合的表示式中含有字母(如例1中的a，例2中的m)，在求得字母的值之后，必须进行检验。

例3 设$A=\{x|x^2-9<0\}$，$B=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}$，$I=\mathrm{R}$，求：(1)$A\cap B$； (2)$A\cup B$； (3)$\overline{B}$； (4)$\overline{A}\cap B$； (5)$\overline{A\cup B}$； (6)$\overline{A}\cup\overline{B}$。

解：化简得 $A=\{x|-3<x<3\}$，$B=\{x|x\leqslant 1，或x\geqslant 3\}$，把$A$、$B$、$I$在数轴上表示出来，如图1-1所示。

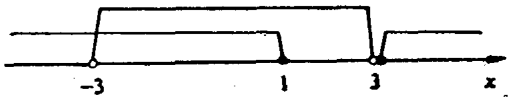

图 1-1

(1) $A\cap B=\{x|-3<x\leqslant 1\}$；

(2) $A\cup B=\mathrm{R}$；

(3) $\overline{B}=\{x|1<x<3\}$；

(4) $\overline{A}\cap B=\{x|x\leqslant -3，或x\geqslant 3\}$；

(5) $\overline{A\cup B}=\varnothing$；

(6) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{x|x\leqslant -3，或x>1\}$。

注： 借助于数轴，可直观地得到解答。

例 4 确定下列各题中两个集合之间的包含关系或相等关系：

(1) $A=\{x|x=2n-1,n\in Z\}$，$B=\{x|x=4m\pm1,\ m\in Z\}$；

(2) $C=\{x|x=2n,n\in Z\}$，$D=\{x|x=4m\pm2,m\in Z\}$。

分析： 根据集合的包含与相等关系的意义，常把集合与集合之间的关系归结到元素与集合的关系来处理。

解： (1) 1) 设 $x\in A$，则 $x=2n-1$，$n\in Z$。

当 n 是偶数时，令 $n=2m$，$m\in Z$，则有 $x=2(2m)-1=4m-1\in B$；当 n 是奇数时，令 $n=2m+1$，$m\in Z$，则有 $x=2(2m+1)-1=4m+1\in B$；因为整数n只有偶数和奇数两类，故不论 n 为何整数，都有 $2n-1\in B$。所以 $A\subseteq B$。

2) 设 $x\in B$，则 $x=4m\pm1$，$m\in Z$，而 $x=4m+1=2(2m+1)-1\in A$，$x=4m-1=2(2m)-1\in A$，所以 $B\subseteq A$。

由1)、2)得到 $A=B$。

(2) 设 $x\in D$，则 $x=4m\pm2=2(2m\pm1)\in C$，所以$D\subseteq C$。

又 $0\in C$，而$0\notin D$；因此 $D\subset C$。

注： 利用"形如 $2n(n\in Z)$的整数叫偶数，形如 $2n+1(n\in Z)$的整数叫奇数"，(1)中2)的结论还可这样来证明：由于 m 是整数，$4m$ 必是偶数，从而 $4m\pm1$ 必是奇数。

利用集合相等的定义来证明两个集合相等，必须证明两点，即证"左边$\supseteq$右边"与"左边$\subseteq$右边"都成立。

任意整数被 4 除，余数只可能是 0、1、2、3，因此所有整数可分为 $4n$、$4n+1$、$4n+2$、$4n+3$(或 $4n$、$4n\pm1$、$4n+2$)四类；同理，被 3 除的余数只能是 0、1、2，所有整数就可分为 $3n$、$3n+1$、$3n+2$(或 $3n$、$3n\pm1$)三类；依此类推。(以上$n\in Z$)

由此可知$\{x|x=2n-1,\ n\in Z\}=\{x|x=2m+1,\ m\in Z\}=$

$\{x|x=4k\pm1,\ k\in Z\}\supset\{x|x=4k+1,k\in Z\}$，$\{x|x=4n\pm2,n\in Z\}=\{x|x=4n+2,\ n\in Z\}$。

例 5 设全集$I=\{(x,\ y)|x,\ y\in R\}$，集合$M=\left\{(x,y)\middle|\frac{y-3}{x-2}=1,\ x,\ y\in R\right\}$，$N=\{(x,y)|y=x+1,x,\ y\in R\}$，求$\overline{M}\cap N$。

解：$M=\left\{(x,y)\middle|\frac{y-3}{x-2}=1\right\}=\{(x,\ y)|y=x+1,\ 且x\neq 2,y\neq 3\}$，$\overline{M}=\{(x,y)|y\neq x+1\}\cup\{(2,3)\}$。

$\therefore\qquad\qquad \overline{M}\cap N=\{(2,3)\}$。

注：(1) 由$\frac{y-3}{x-2}=1$化为$y=x+1$，不是同解变形。

(2) 不能把$\{(2,3)\}$写成$\{2,3\}$，因为两者的意义不相同。

例 6 已知集合$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$，$B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0\}$，求使$A\subseteq B$的实数$a$的取值范围。

解：由$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$，得$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$。

1) 当$3a+1\geqslant 2$即$a\geqslant\frac{1}{3}$时，得$B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$，

由$A\subseteq B$，必须 $\begin{cases}2\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 3a+1.\end{cases}$

解得 $\qquad 1\leqslant a\leqslant 3$。

2) 当$3a+1<2$即$a<\frac{1}{3}$时，得$B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$，由

$A\subseteq B$，必须 $\begin{cases}3a+1\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 2.\end{cases}$

解得 $\qquad a=-1$。

综合1)和2)可知，使$A\subseteq B$的a的取值范围是

$$\{a|1\leqslant a\leqslant 3,或a=-1\}.$$

注：借助于数轴，可以直观地处理两个区间的覆盖问题。

例 7　(1) 写出集合$\{1,2,3\}$的所有子集；

(2) 集合$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$有多少个不同的子集？

解：(1) $\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$。

(2) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$。

注：本题解答是依据集合中元素的互异性及子集的定义得到的。

注意题(2)的结论，由 n 个元素组成的集合，其子集的个数为2^n。

例 8　单项选择题：集合 M 和 N 表示同一集合的是……………………………………………………………(　　)

(A)　$M=\{x|x(x+3)<0,\ x\in Z\}$，$N=\{x|x^2+3x+2=0\}$；

(B)　$M=\{(-1,-2)\}$，$N=\{-1,\ -2\}$；

(C)　$M=\{(-1,-2)\}$，$N=\{(-2,-1)\}$；

(D)　$M=\varnothing$，$N=\{\varnothing\}$。

解法一：在(A)中，$M=\{x|x(x+3)<0,x\in Z\}$

$$=\{x|-3<x<0,x\in Z\}$$

$$=\{-2,-1\},$$

$$N=\{x|x^2+3x+2=0\}=\{x|(x+1)(x+2)=0\}$$

$$=\{-1,-2\},$$

$$\therefore\qquad M=N.$$

因此，应选(A)。

解法二：易知(B)中集合 M 只有一个元素，而集合 N 中有两个元素，$M\neq N$，故答案(B)不对。

(C)中两元素$(-1,-2)$与$(-2,-1)$不是同一元素，故$M\neq N$，因此答案(C)也不对。

(D)中M是空集，它不含任何元素；而$\{\varnothing\}$表示以一个空集为元素的集合，显然$M\neq N$，所以答案(D)也不对。

于是，应选(A)。

注：本书中的选择题，在给出的四个选项中，都是有一项且只有一项是正确的。

解选择题有以下几种常用方法。(1)直接法，就是直接从题设条件出发，通过运算或推证，得到正确结果，从而确定应选答案(如解法一所用方法)。(2)排除法，就是利用题中隐含条件、已知概念、性质、定理对错误的选项逐一排除，从而剩下的一项便是正确答案(如解法二所用方法)。排除法是解选择题特有的方法，要注意排除法必须在所有的选项中有且只有一项是正确答案时使用。(3)特殊值法，就是用满足题设条件的特殊数值代替有关字母进行演算和推理，据此来判断选项的正、误的方法。它也是解选择题所特有的方法。(4)验证法，就是把各个选项逐一代入题设条件进行验证，或用适当的手段进行验证，以判断选项正、误的方法。(5)图象法，就是利用函数图象，找出正确答案的方法。

在解选择题时，要善于选用或综合运用各种方法，以便迅速地正确地得到应选答案。

例 9 设a、b是两个实数。

$A=\{(x,y)|x=n,\ y=na+b,\ n\text{是整数}\}$，

$B=\{(x,y)|x=m,\ y=3m^2+15,m\text{是整数}\}$，

$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$

是平面xOy内的点集合，讨论是否存在a和b，使得

1) $A\cap B\neq\varnothing$；

2) $(a,b)\in C$ 同时成立。

分析： 把题设条件综合整理，由1) $A\cap B\neq\varnothing$，可化成

$na+b=3n^2+15$，由2) $(a,b)\in C$ 得 $a^2+b^2\leqslant 144$，利用等价转化，本题就归结为二次不等式的有无实数解的问题；或者利用数形结合，转化为"形"的问题来思考，把本题解释成直线与圆的相交问题，由此得到如下两种解法。

解法一：如果实数 a 和 b 使得1)成立，那么必存在整数 m 和 n，使得 $(n,na+b)=(m,3m^2+15)$，即

$$\begin{cases}n=m,\\ na+b=3m^2+15.\end{cases}$$

由此得出，存在整数 n 使得 $na+b=3n^2+15$。即

$$b=3n^2+15-na. \tag{1}$$

由2)成立，得 $$a^2+b^2\leqslant 144. \tag{2}$$

现把(1)式代入(2)式，得到如下关于 a 的不等式：

$$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0, \tag{3}$$

它的判别式 $\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]$

$$=-36(n^2-3)^2,$$

但 n 是整数，$n^2-3\neq 0$，因而 $\Delta<0$，又因 $1+n^2>0$，故(3)式不可能有实数解 a，这就表明，不存在实数 a 和 b 使得1)、2)同时成立。

解法二：假如存在实数 a 和 b 使得 1)、2)同时成立，同解法一得

$$\begin{cases}na+b=3n^2+15, & (1)\\ a^2+b^2\leqslant 144. & (2)\end{cases}$$

这表明点 $P(a,b)$ 既在直线 l：$nx+y=3n^2+15$ 上，又在圆面：$x^2+y^2\leqslant 144$ 上，于是(1)、(2)两式同时成立的条件是，圆心 O 到直线 l 的距离不大于圆 O 的半径 12。即

$$\frac{|3n^2+15|}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12.$$

因此，$|n^2+5|\leqslant 4\sqrt{n^2+1}$，平方 $n^4+10n^2+25\leqslant 16n^2+16$，所以，$n^4-6n^2+9\leqslant 0$，$(n^2-3)^2\leqslant 0$。

但$(n^2-3)^2\geqslant 0$，故只有 $n^2-3=0$，$n^2=3$，$n=\pm\sqrt{3}$。这与 n 是整数矛盾。

于是，不存在实数 a 和 b 使得1)、2)同时成立。

例 10 某班共有50名同学，其中参加数学小组的有20名，参加物理小组的有15名，既参加数学小组又参加物理小组的有5名。问这两个小组都不参加的有几名？

分析： 本题可考虑用集合来解。

解： 如图1-2所示，设 $I=\{$某班全体同学$\}$，$A=\{$参加数学小组的同学$\}$，$B=\{$参加物理小组的同学$\}$，则

$A\cap B=\{$既参加数学小组又参加物理小组的同学$\}$，

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{$既不参加数学小组又不参加物理小组的同学$\}$。

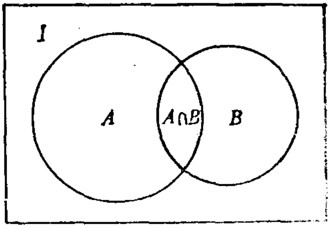

图 1-2

再设 $n(I)$、$n(A)$、$n(\overline{A}\cap\overline{B})$ 分别表示集合 I、A、$\overline{A}\cap\overline{B}$ 的元素的个数，其余类推。则

$$n(I)=50,\ n(A)=20,\ n(B)=15,\ n(A\cap B)=5.$$

于是
$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cap\overline{B})&=n(\overline{A\cup B})=n(I)-n(A\cup B)\\ &=n(I)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)\\ &=50-20-15+5=20. \end{aligned}$$

注： 常用的有限集合中元素个数的计算公式，有：

$n(\overline{A})=n(I)-n(A)$；

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$；

$n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\overline{B})=n(B)-n(B\cap\overline{A})$；

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C).$$

这些公式都可借助于文氏图直观地得到.

二 函数与反函数

函数概念中最基本的是函数的定义，要注意它是由对应法则和定义域两个要素确定的. 这两个要素都一样的两个函数，就是同一个函数. 函数的值域，决定于函数的定义域及其对应法则.反函数也是研究函数所用到的一个重要概念.

当函数 $y=f(x)$通过一个解析式给出时，它的定义域就是使该解析式有意义的自变量值的全体. 求定义域时必须使函数同时满足下列几点：

(1) 分式的分母不能为零；

(2) 偶次根式的被开方式应大于或等于零；

(3) 对数式的真数应大于零，底数大于零且底数不等于1；

(4) 正切函数符号下的式子不能等于$k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，余切函数符号下的式子不能等于$k\pi(k\in Z)$；

(5) 反正弦函数或反余弦函数符号下的式子的绝对值不能大于1.

如果一个函数反映的是某一实际问题，那么它的定义域中的自变量还应使实际问题有意义.

求函数的值域(包括最大值、最小值)，常用的方法是：

(1) 观察解析式，直接得出；

(2) 利用已知值域的函数；

(3) 利用图象；

(4) 求其反函数的定义域(若其反函数存在)；

(5) 利用判别式(须检验)；

(6) 通过求函数的最大值和最小值得到.

幂函数 $y=x^n(n\in Q)$的定义域和值域，可归纳如下：

(1) $n\in N$ 时，$x\in R$. n 为奇数时，$y\in R$；n 为偶数时，$y\in [0,+\infty)$.

(2) $n=0$ 时，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y\in\{1\}$.

(3) $n\in Z^-$ 时，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$n$ 为奇数时，$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；$n$ 为偶数时，$y\in(0,+\infty)$.

(4) $n=\dfrac{p}{q}$(p、q 互质，p、$q\in N$，$q>1$)时，若 q 是偶数，则$x\in[0,+\infty)$，$y\in[0,+\infty)$；若 q、p 都是奇 数，则 $x\in R$，$y\in R$；

若 q 是奇数、p 是偶数，则$x\in R$，$y\in[0,+\infty]$.

(5) $n=-\dfrac{p}{q}$(p、q互质，p、$q\in N$，$q>1$)时，若 q是偶数，则 $x\in(0,+\infty)$，$y\in(0,+\infty)$；若q、p都是奇数，则$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；若 q 是奇数、p 是偶数，则$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y\in(0,+\infty)$.

注：其定义域只有四类：$x\in R$，$x\geqslant 0$，$x>0$，$x\neq 0$.

求函数的解析式，可以从解析式的意义上和形式上来分析；如果题设、结论涉及某些知识，就需要运用有关知识探求解答，常用方法有：(1)待定系数法，(2)代换法，(3)解方程组法，(4)消去法.

对于二次函数的解析式，要掌握三种形式：

一般式　　$y=ax^2+bx+c$　$(a\neq 0)$；

顶点式　　$y=a(x-m)^2+k$