数学模型

洪 毅 林健良 陶志穗 编

高等教育出版社

41.4
6

数 学 模 型

洪　毅　林健良　陶志穗　编

高等教育出版社

内容提要

现今的世界，数学已经显示出第一生产力的本性。它不但是支撑其他科学的“幕后英雄”，而且是活跃在技术革命第一线、屡建奇功的“方面军”。在各行各业的激烈竞争中，数学已经成为强者的翅膀。因此，开设数学模型课程、训练学生数学建模的能力、训练学生使用数学工具的能力，已成为潮流。

本书是数学模型课程的教材。重点阐述：(1) 如何从具体事物抽象出数学概念，又了解这种抽象只是一种近似，只反映具体事物的某些本质特性；(2) 如何从复杂的实际问题中寻找最重要的因素；(3) 如何既注意思考的逻辑性、严密性，又紧密结合实际情况；(4) 如何将所得结果应用于实践、通过实践进一步改进模型。

本书采取案例教学的形式，内容有数学模型导言、建模方法示例、优化模型、微分方程模型、稳定性方法建模、代数模型、图论模型、动态规划、随机模型、决策与对策模型等，并附有近几年数学建模竞赛题以及部分题目的解答。

本书选取大量浅显案例，叙述严谨，可读性、趣味性强，适宜高职高专学生阅读，也可供本科各专业特别是文科、医药等专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型/洪毅，林健良，陶志穗编．—北京：高等教育出版社，2004.5

ISBN 7-04-014698-3

Ⅰ．数… Ⅱ．①洪…②林…③陶… Ⅲ．数学模型-教材 Ⅳ．O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第012807号

策划编辑 蒋 青 **责任编辑** 薛春玲 **封面设计** 杨立新 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 王 莹 **责任校对** 康晓燕 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	北京铭成印刷有限公司		
开 本	787×1092 1/16	版 次	2004年5月第1版
印 张	15	印 次	2004年5月第1次印刷
字 数	360 000	定 价	17.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

目　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章 数学模型导言

§1.1 数学与数学模型

在当今时代,电子计算机的应用深刻地改变了人类的生活方式,在人类历史上引起了一场新的革命.在这场革命中,数学方法的应用已不再局限于物理领域,而是逐步深入到各种非物理领域,例如生物学、生态学、经济学、社会学、政治学等领域.数学的重要性正在为越来越多的人所认识.

科学技术的进步,经济的发展,即使是一个普通的工程师、管理人员都会经常遇到许多实际问题,而这些实际问题是难以应用现成的数学方法解决的.因此,建模已不仅仅是少数专家的专利,而已经成为普通工程师、管理人员都需要掌握的方法.

1.1.1 何谓数学模型

模型是把对象实体通过适当的过滤,用适当的表现规则描绘出的简洁的模仿品.通过这个模仿品,人们可以了解到所研究实体的本质,而且在形式上便于人们对实体进行分析和处理.

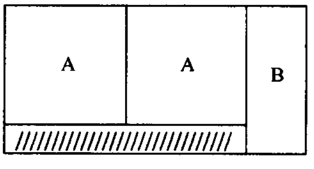
模型是人们十分熟悉的东西,例如:玩具、照片及展览会里的电站模型、火箭模型等实物模型;电路图、分子结构图等经过一定抽象的符号模型;大型水箱中的舰艇模型、风洞中的飞机模型等物理模型.

那么,什么是数学模型?先让我们来看一个简单的例子.

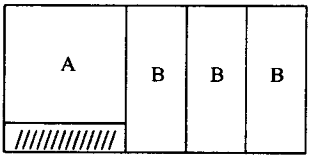
例 1.1.1 现要用 100×50 厘米的板料裁剪出规格分别为 40×40 厘米与 50×20 厘米的零件,前者需要 25 件,后者需要 30 件.问如何裁剪,才能最省料?

解 先设计几个裁剪方案.

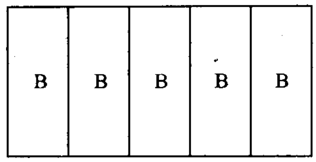
方案 1,如下图,在 100×50 的板料上可裁剪出两块 40×40 的零件和一块 50×20 的零件(图中分别用 A、B 表示).



同样,求出方案 2



方案 3



显然,若只用其中一个方案,都不是最省料的方法.最佳方法应是三个方案的优化组合.设方案 i 使用原材料 x_i 件($i=1,2,3$),共用原材料 f 件,则根据题意,可用如下数学式子表示:

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 25 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geqslant 30 \\ x_i \geqslant 0 \text{ 的整数}(i=1,2,3) \end{cases}$$

最优解有四个:

x_1	12	11	10	9
x_2	1	3	5	7
x_3	3	2	1	0

f 的最小值为 16.这是一个整数线性规划模型.

数学模型是描述实际问题数量规律的、由数学符号组成的、抽象的、简化的数学命题、数学公式或图表及算法.

当我们使用数学方法解决实际问题时,首先要把实际事物之间的联系抽象为数学形式,这就是所谓建立数学模型(Mathematical Modelling).可以说,从数学诞生的第一天起,就有了数学模型.原始的人类从具体的一只羊、一头牛等事物中抽象出自然数 1 的概念,而自然数 1 也就是具体的一只羊、一头牛等的数学模型;从光线、木棍等具体事物抽象出直线的概念,而直线也就是光线、木棍等的数学模型.因为每一个数学概念都是从客观世界中抽象出来的,所以每一种数学概念、每个数学分支都是客观世界中某些具体事物的数学模型.

1.1.2 数学建模的方法与步骤

一般来说数学建模方法大体上可分为机理分析和测试分析两种.机理分析是根据客观事物特征的认识,找出反应内部机理的数量规律,建立的数学模型常有明确的物理意义.

测试分析是将研究对象看作一个"黑箱"(不考虑内部机理),通过对测量数据的统计分析,找出与数据拟合得最好的模型.

建模的步骤一般分为下列几步.

(1) **模型准备** 首先要了解问题的实际背景,明确题目的要求,搜集各种必要的信息.

(2) **模型假设** 为了利用数学方法,通常要对问题作出必要的、合理的简化,使问题的主要

特征凸现出来,忽略问题的次要方面.

(3) **模型构成** 根据所作的假设以及事物之间的联系,构造各种量之间的关系把问题化为数学问题.要注意尽量采取简单的数学工具,因为简单的数学模型往往更能反映事物的本质,而且也容易使更多的人掌握和使用.

(4) **模型求解** 利用已知的数学方法来求解上一步所得到的数学问题,这时往往还要作出进一步的简化或假设.

(5) **模型分析** 对所得到的解答进行分析,特别要注意当数据变化时所得结果是否稳定.

(6) **模型检验** 分析所得结果的实际意义,与实际情况进行比较,看是否符合实际,如果结果不够理想,应该修改、补充假设或重新建模,有些模型需要经过几次反复,不断完善.

(7) **模型应用** 所建立的模型必须在实际中应用才能产生效益,在应用中不断改进和完善.

各步骤之间的关系可用图 1.1.1 表示.

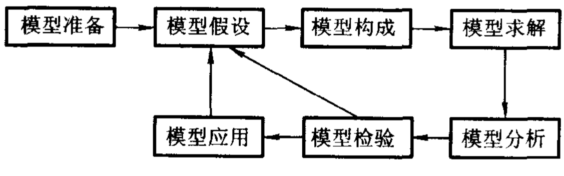


图 1.1.1

在数学建模和求解的过程中,归纳法和演绎法起了很重要的作用.模型假设和模型构成这两个步骤,主要是根据已知的数据和信息、已知的规律归纳出一些一般规律,这些规律由于尚未得到验证,因而往往以假设的形式出现,正确的归纳不是主观的、盲目的,而是必须善于透过现象看本质,透过偶然性发现必然性.然而这种归纳往往又是比较粗糙,往往停留在感性认识而未上升到理性认识的阶段,需要通过实践的检验予以深化和修正.在作出模型假设和模型构成以后,则应该使用严密的演绎法,使用逻辑推理和数学推导进行论证才能得出可靠的结论.如果在这一步没有使用严密的逻辑推理,则往往会引入暗含的假设,甚至导入互相矛盾的假定,使所得结论发生错误.利用严密逻辑推理所推导的结论,无论它是怎样地违反我们的常识,总是正确的(除非所做的假设错误),因而对解释现象、作出科学预见具有重要意义.归纳是演绎的前提,演绎是归纳的指导,善于把归纳和演绎结合起来,是科学研究的基本方法.

§1.2 数学模型的分类

在实际应用中,数学模型可以按不同的方式分类.

1. 按模型的应用领域分

可分为生物数学模型、医学数学模型、地质数学模型、数量经济学模型、数学社会学模型等.更详细一些,有人口模型、交通模型、环境模型、生态模型等等.

2. 按建立模型的数学方法分

可分为几何模型、微分方程模型、图论模型、规划论模型、马氏链模型等等.

3. 按是否考虑随机因素分

可分为确定性模型和随机性模型两类.

4. 按是否考虑模型随时间的变化分

可分为静态模型和动态模型.

5. 按变量的取值情况分

可分为离散模型和连续模型.

6. 按目前人们对事物发展过程的了解程度分

可分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型.

(1) **白箱模型** 主要指那些内部规律比较清楚的模型,如力学、热学、电学以及相关的工程技术问题,这些问题大多早已化为比较成熟的数学问题,解决这些问题大多注重数学方法的改进,优化设计和控制等.

(2) **灰箱模型** 主要指那些内部规律尚不十分清楚,在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做的问题,如生态学、气象学、经济学等领域中的模型.

(3) **黑箱模型** 主要是指一些其内部规律还很少为人们所知的现象,如生命科学、社会科学等领域的问题,这类问题多利用统计方法研究.有些工程技术问题,理论上可用白箱模型研究,但由于因素众多、关系复杂,也可简化为黑箱模型来研究.

§1.3 数学建模的重要作用

数学,作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学,在它产生和发展的历史长河中,一直是和人们生活的实际需要密切相关的.作为用数学方法解决实际问题的第一步,数学建模自然有着与数学同样悠久的历史.两千多年以前创立的欧几里得几何,17 世纪发现的牛顿万有引力定律,都是科学发展史上数学建模的成功范例.

进入 20 世纪以来,随着数学以空前的广度和深度向一切领域渗透,以及电子计算机的出现与飞速发展,数学建模越来越受到人们的重视,可以从以下几方面来看数学建模在现实世界中的重要意义.

1. 在一般工程技术领域,数学建模仍然大有用武之地.

在以声、光、热、力和电这些物理学科为基础的诸如机械、电机、土木和水利等工程技术领域中,数学建模的普遍性和重要性不言而喻,虽然这里的基本模型是已有的,但是由于新技术、新工艺的不断涌现,提出了许多需要用数学方法解决的新问题;高速、大型计算机的飞速发展,使得过去即便有了数学模型也无法求解的课题(如大型水坝的应力计算,中长期天气预报等)迎刃而解;建立在数学模型和计算机模拟基础上的 CAD 技术,以其快速、经济、方便等优势,大量地替代了传统工程设计中的现场实验、物理模拟等手段.

2. 在高新技术领域,数学建模是必不可少的工具.

无论是发展通讯、航天、微电子、自动化等高新技术本身,还是将高新技术用于传统工业去创造新工艺、开发新产品,计算机技术支持下的建模和模拟都是经常使用的有效手段.数学建模、数值计算和计算机图形学等相结合形成的计算机软件,已经被固化于产品中,在许多高新技术领域起着核心作用,被认为是高新技术的特征之一.在这个意义上,数学不再仅仅作为一门科学,是许多技术的基础,而且直接走向了技术的前台.国际上一位学者提出了"高技术本质上是一种数学

技术”的观点.

3. 数学迅速进入一些新领域,为数学建模开拓了许多新的处女地.

随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等所谓非物理领域的渗透,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、数学生态学、数学地质学等应运而生.这里一般地说,不存在作为支配关系的物理定律,当用数学方法研究这些领域中的定量关系时,数学建模就成为首要的、关键的步骤和这些学科发展与应用的基础,在这些领域里建立不同类型、不同方法、不同深浅程度模型的余地相当大,为数学建模提供了广阔的新天地.马克思说过,一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步.展望21世纪,数学必将大踏步地进入所有学科,数学建模将迎来蓬勃发展的新时期.

今天,在国民经济和社会活动的以下诸多方面,数学建模都有着非常具体的应用.

分析与设计　例如描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效;建立跨音速流和激波的数学模型,用数值模拟设计新的飞机翼型.

预报与决策　生产过程中产品质量指标的预报、气象预报、人口预报以及经济增长预报等等,都要有预报模型,使经济效益最大的价格策略、使费用最少的设备维修方案,是决策模型的例子.

控制与优化　电力、化工生产过程的最优控制、零件设计中的参数优化,建立大系统控制与优化的数学模型,都是迫切需要解决的课题.

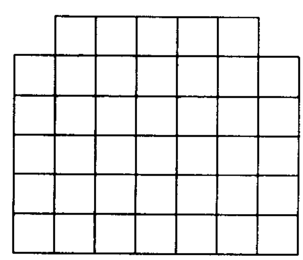
规划与管理　生产计划、资源配置、运输网络规划、水库优化调度,以及排队策略、物资管理等,都可以用运筹学模型解决.

习　题　一

1. 某酒厂有一批新酿的好酒,如果现在就出售.可得总收入 $R_0=50$ 万元(RMB),如果窖藏起来待来日(第 n 年)按陈酒价格出售,第 n 年末可得总收入为:$R=R_0e^{\frac{\sqrt{n}}{6}}$万元(RMB),而银行利率为 $r=0.05$.试分析这批好酒窖藏多少年后出售可使总收入的现值最大.

2. 某人第一天上午8:00由A处出发,于下午6:00到达B处.第二天上午8:00他又由B处出发按原路返回,并于下午6:00回到A处.证明:途中至少存在一点,是此人在两天中同一时刻到达的.

3. 某人恰好用10分钟跑完2 000米,试证明在这10分钟内,至少有一个5分钟时间区间,在这5分钟内,他恰好跑完1 000米.



题4图

4. 某人要用40块方形瓷砖铺如题4图所示形状的地面,但当时市场上只有长方形瓷砖,每块大小等于方形的两块.他买了20块,试着铺地面,试问这人能否完整地铺好地面?

第二章　建模方法示例

用什么数学方法来描述一个实际问题？这是很难回答的问题.只有从前辈数学家的实践,以及自己的成功和失败的实践中去探索,往往在遇到实际问题时还要使用多种方法尝试,经过比较才能得到比较理想的方法.恰当地选择数学方法,常常收到事半功倍的效果.

下面我们举几个建模的实例,希望对读者有所帮助.这几个实例都可以归结为不同的数学模型,请读者加以比较.

§2.1　棋子颜色的变化

2.1.1　问题描述

任意拿出黑白两种颜色的棋子共 n 个,排成如图 2.1.1 所示的一个圆圈.然后在两颗颜色相同的棋子中间放一颗黑色棋子,在两颗颜色不同的棋子中间放一颗白色棋子,放完后撤掉原来的棋子.再重复以上的过程,这样放下一圈后就拿走前次的一圈棋子,问这样重复进行下去各棋子的颜色会怎样变化呢？

请研究不同的 n 对应的规律.

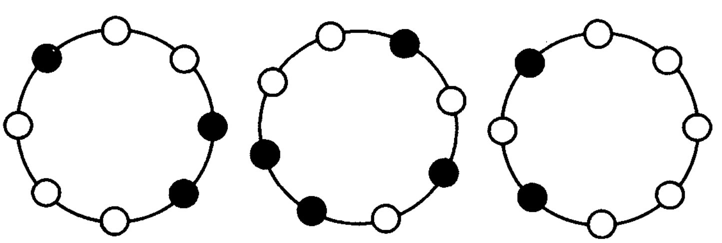


图 2.1.1

2.1.2　基本假定

若两个图可以通过旋转某个角度后重合,则认为它们是等价的.

2.1.3　建立模型

首先,为了探索棋子颜色的变化规律,我们建立棋子颜色与实数的对应关系,因为"同色为黑,不同色为白",正好与实数中"同号乘积为正,异号乘积为负"对应.于是建立"黑对应 +1,白对应 −1"的对应关系.这样我们就可用棋子的对应"值"表示其颜色了.

设 a_j 表示第 j 个棋子的初值($+1$ 或 -1),$j=1,2,\cdots,n$,每个棋子的值就是上一步相邻的两

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

个棋子的值之积，为观察每步的变化规律，以 $n=5$ 为例看看（如下表 2.1.1）.

表 2.1.1

初　值	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
第 1 步	a_1a_2	a_2a_3	a_3a_4	a_4a_5	a_5a_1
第 2 步	$a_1a_2^2a_3$	$a_2a_3^2a_4$	$a_3a_4^2a_5$	$a_4a_5^2a_1$	$a_5a_1^2a_2$
第 3 步	$a_1a_2^3a_3^3a_4$	$a_2a_3^3a_4^3a_5$	$a_3a_4^3a_5^3a_1$	$a_4a_5^3a_1^3a_2$	$a_5a_1^3a_2^3a_3$
第 4 步	$a_1a_2^4a_3^6a_4^4a_5$	$a_2a_3^4a_4^6a_5^4a_1$	$a_3a_4^4a_5^6a_1^4a_2$	$a_4a_5^4a_1^6a_2^4a_3$	$a_5a_1^4a_2^6a_3^4a_4$
第 5 步	$a_1a_2^5a_3^{10}a_4^{10}a_5^5a_1$	$a_2a_3^5a_4^{10}a_5^{10}a_1^5a_2$	$a_3a_4^5a_5^{10}a_1^{10}a_2^5a_3$	$a_4a_5^5a_1^{10}a_2^{10}a_3^5a_4$	$a_5a_1^5a_2^{10}a_3^{10}a_4^5a_5$

发现规律了吗？

第 i 步的指数恰好是二项式 $(a+b)^i$ 展开式的系数（杨辉三角形）.

一般地，第 i 步第 j 个棋子的值为 $f(i,j)=a_j^{C_i^0}a_{j+1}^{C_i^1}a_{j+2}^{C_i^2}\cdots a_{j+i}^{C_i^i}\quad(i,j=1,2,3,\cdots,n)$，当然下标的值是关于模 n 计算的.

2.1.4　寻找规律

通过对 $f(i,j)$ 的分析便可以知道棋子颜色的变化规律，并且说明其原理.

(1) 无论棋子数 n 如何，初态如何，变化最终总是周期性的.

这是因为 n 个棋子的布局只有有限种，且每步的变化规则是相同的，从而每步的布局由上一步的布局惟一确定.

(2) 无论棋子数 n 如何，初态如何，每一步的白子数如果大于零，则总是偶数.

因为每步可以把上一步视为初态，故只需说明从初态到第一步的变化规律.

若初值中有 s 个 -1，且没有任两个相邻，则第一步就有 $2s$ 个 -1.

例如，$n=8$，$a_2=a_4=a_7=-1$，其余为 1，则 $a_1a_2=a_2a_3=a_3a_4=a_4a_5=a_6a_7=a_7a_8=-1$.

若初值中有 s 个 -1，且其中有 t 个相邻，则第一步就有 $2s-2t$ 个 -1.

例如，$n=8$，$a_1=a_2=a_5=a_6=a_8=-1$，其余为 1，则其中有 3 个相邻：$a_1\sim a_2$，$a_5\sim a_6$，$a_8\sim a_1$. 只有 $a_2a_3=a_4a_5=a_6a_7=a_7a_8=-1$，其余为 1.

(3) 当 $n=2^m(m=1,2,\cdots)$ 时，第 n 步全部棋子黑色，即 $f(n,j)=1\quad(j=1,2,\cdots,n)$. 如果对 m 应用数学归纳法及组合公式

$$C_{2^m}^k=C_{2^{m-1}+2^{m-1}}^k=\sum_{j=0}^{k}C_{2^{m-1}}^{j}C_{2^{m-1}}^{k-j}$$

就可以证明 $C_{2^m}^k(k=1,2,\cdots,n-1)$ 都是偶数，故

$$f(n,j)=a_ja_{j+1}^{C_n^1}a_{j+2}^{C_n^2}\cdots a_{j+n}=a_j^2=1\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

(4) 当 $n=2^m-1(m=1,2,\cdots)$时,第 $n+1$ 步与第 1 步等价.

$$f(n+1,j)=a_ja_{j+1}^{C_n^1}a_{j+2}^{C_n^2}\cdots a_{j+n+1}=a_ja_{j+1}=f(1,j)\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

例如 $n=7$ 时,第 8 步与第 1 步等价.

(5) 当 $n=2^m+1(m=1,2,\cdots)$时,第 $n-1$ 步与第 1 步等价.

$$f(n-1,j)=a_ja_{j+1}^{C_{n-2}^1}a_{j+2}^{C_{n-2}^2}\cdots a_{j+n-1}=a_ja_{j-1}=f(1,j-1)\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

例如 $n=9$ 时,第 8 步与第 1 步等价.

请读者利用以上模型,再探讨其他规律.

§2.2 商人们怎样安全过河

2.2.1 问题描述

三名商人各带一个随从乘船渡河,现此岸有一小船只能容纳两人,由他们自己划行.随从们密谋,在河的任一岸,一旦随从比商人多,就杀人抢劫,但是如何乘船渡河的大权由商人们掌握.商人们怎样才能安全过河?

此类问题当然可以通过一番思考,拼凑出一个可行方案来.但是,我们现在希望能找到求解这类问题的规律性,这有利于编程和推广应用.

2.2.2 模型假设

模型已理想化,不必再作假设.

2.2.3 模型的构成

此问题可视为一个多步决策问题,每一步就是一次渡河,每次渡河就是一次状态转移.

1. 未考虑船时的安全状态

设(x,y)表示此岸有 x 个商人和 y 个随从的状态,商人们安全是指在两岸都安全,故当 $x=0,3$ 时,$y=0,1,2,3$ 均可,而当 $x=1,2$ 时,此岸要求 $x\geqslant y$,对岸要求 $3-x\geqslant 3-y$,综合即 $x=y$.所以

$$\text{安全状态}=\begin{cases}y=0,1,2,3, & \text{当 } x=0,3\\ y=x, & \text{当 } x=1,2\end{cases}$$

从而此岸在以下状态时,商人们在两岸都安全:

(3,3)　(3,2)　(3,1)　(3,0)　(2,2)

(1,1)　(0,3)　(0,2)　(0,1)　(0,0)

2. 考虑船时此岸的安全状态

用(x,y,z)表示此岸的状态,x,y 的含义同前,z 表示此岸的船数.即 $z=1$ 时,船在此岸,$z=0$ 时,船在对岸.此岸的安全状态有:

(3,3,1)　(3,2,1)　(3,1,1)　(2,2,1)　(3,0,1)　(0,3,1)　(0,2,1)　(1,1,1)　(0,1,1)

(3,2,0)　(3,1,0)　(2,2,0)　(3,0,0)　(0,3,0)　(0,2,0)　(1,1,0)　(0,1,0)　(0,0,0)

2.2.4 模型求解

所谓求解，就是寻找此岸状态从(3,3,1)转移到(0,0,0)的方案．根据题意，状态转移时要满足下面的规则：

1．z 从 1 变为 0 与从 0 变为 1 交替进行；

2．当 z 从 1 变为 0 时，即船从此岸到对岸，此岸人数减少 1 或 2 个；即 $(x,y,1)\to(u,v,0)$ 时，$u\leqslant x, v\leqslant y, u+v=x+y-1$ 或 $u+v=x+y-2$．

3．当 z 从 0 变为 1 时，即船从对岸到此岸，此岸人数增加 1 或 2 个；即 $(x,y,0)\to(u,v,1)$ 时，$u\geqslant x, v\geqslant y, u+v=x+y+1$ 或 $u+v=x+y+2$．

4．不重复已出现过的状态，如 $(3,3,1)\to(3,1,0)\to(3,3,1)$．

若一状态 A 可转移到另一状态 B，则我们用一箭号将这两个状态联结起来．按照以上规则，求解过程如图 2.2.1(总人数从多到少排列)．其解即：

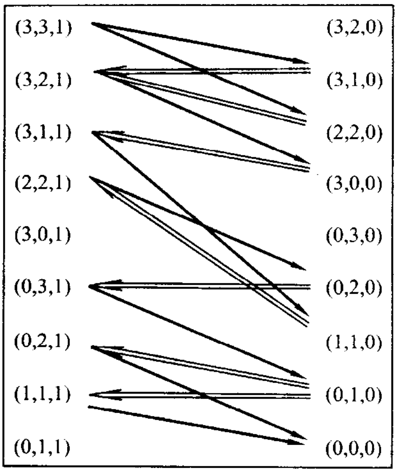


图 2.2.1

$$(3,3,1)\to(3,1,0) \text{或} (2,2,0)\to(3,2,1)\to(3,0,0)\to(3,1,1)\to(1,1,0)\to$$
$$(2,2,1)\to(0,2,0)\to(0,3,1)\to(0,1,0)\to(0,2,1) \text{或} (1,1,1)\to(0,0,0)$$

可见，有四个渡河方案，每个方案经 11 步．可解释如下：

(1) 2 随从(或 1 商人 1 随从)去	(7) 2 商人去
(2) 1 随从(或 1 商人)回	(8) 1 随从回
(3) 2 随从去	(9) 2 随从去
(4) 1 随从回	(10) 1 随从(或 1 商人)回
(5) 2 商人去	(11) 2 随从(或 1 商人 1 随从)去
(6) 1 商人 1 随从回	

2.2.5 平面坐标解法

设 x 为商人数，y 为随从数，在 xOy 平面上作分析．如图 2.2.2，先把此岸的安全状态点标出．

用 d_i 表示第 i 次状态转移，i 为奇数时，船从此岸到对岸，x, y 只能减少，不能增加，且 $x+y$ 至多减少 2，即移向左下方，且至多移两格，i 为偶数时相反．怎样从状态(3,3)转移到(0,0)？过程如图 2.2.2 所示．

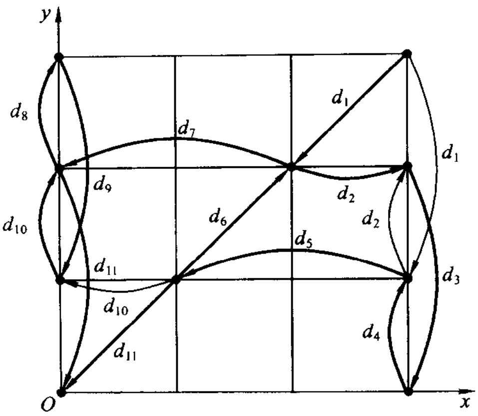


图 2.2.2

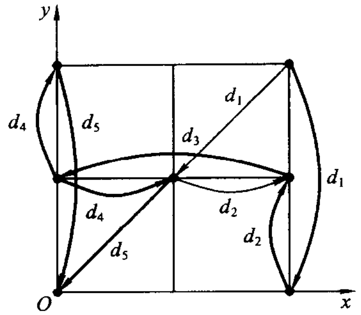


图 2.2.3

2.2.6 进一步的思考

(1) 若船的情况不变,则 2 名商人 2 个随从如何安全渡河?

答案:(2,2)→(1,1)或(2,0)→(2,1)→(0,1)→(1,1)或(0,2)→(0,0)(如图 2.2.3).

(2) m 名商人 m 个随从($m\geqslant4$)能否安全渡河?

答案:m 名商人 m 个随从($m\geqslant4$)无法安全渡河,如 $m=4$ 时的图 2.2.4,d_7就无法作不重复的转移.其他情况也一样.

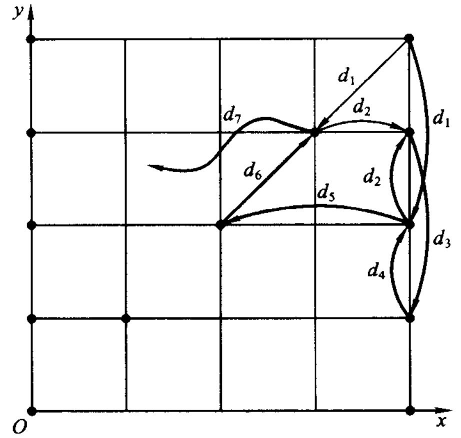


图 2.2.4

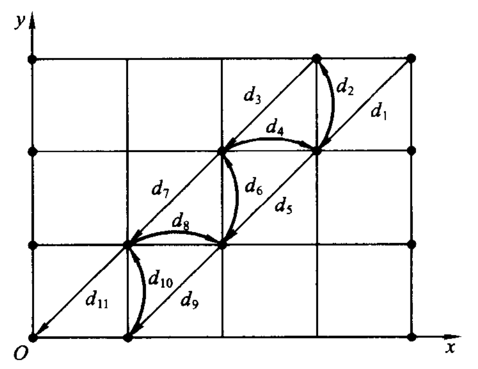


图 2.2.5

(3) 一般地,m 个商人 n 个随从,$m>n$ 能否安全渡河?若能,怎样渡河?

答案:当 $x=0,m$ 时,$y=0,1,2,\cdots,n$ 均可,而当 $x=1,2,\cdots,m-1$ 时,此岸要求 $x\geqslant y$,对岸要求 $m-x\geqslant n-y$,综合即 $0\leqslant x-y\leqslant m-n$.所以

$$
\text{安全状态}=\begin{cases} y=0,1,2,\cdots,n, & \text{当 } x=0,m \\ x-(m-n)\leqslant y\leqslant x, & \text{当 } x=1,2,\cdots,m-1 \end{cases}
$$

此时商人们必能安全渡河.若以 $m=4,n=3$ 为例,则求解过程如图 2.2.5.

§2.3 公平的席位分配

2.3.1 问题的提出

设某校有 3 个系共 200 名学生,其中甲系 100 人,乙系 60 人,丙系 40 人,现要选出 20 名学生代表组成学生会,公平的办法是按学生人数的比例分配席位,即甲、乙、丙系分别占 10、6、4 个席位.若按学生人数的比例分配的席位数不是整数,就会带来一些麻烦.比如甲系 103 人,乙系 63 人,丙系 34 人,怎么分?过去的惯例是这样分配的:先按比例分配,甲、乙、丙系分别应得 10.3、6.3和 3.4 席,舍去小数部分后分别得 10、6、3 席,剩下的 1 席分给"损失"最大(即小数部分最大)的丙系,于是三个系仍分别占 10、6、4 席.假定学生会的席位数增加到 21 位,按上述方法重新分配,结果如表 2.3.1 所示,甲、乙、丙系分别占 11、7、3 席.

表 2.3.1

系别	人数	比例	20 席的分配		21 席的分配	
			按比例分	实际分配	按比例分	实际分配
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.570	3
合计	200	100.0	20.0	20	21.000	21

此分配结果,对丙系显然是不公平的,因为席位增加了,而丙系得到的席位反而减少了.

2.3.2 符号和假设

我们要解决的是这样的一个问题:某校共有 m 个系,第 i 系学生数为 $n_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$,校学生会共设 N 个席位.怎样才能公平地把这些席位分配给各系?

显然,$m,n_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$应为正整数,全校学生数记为 $n=\sum\limits_{i=1}^{m} n_i$.假设每个系至少应分得一个席位(否则把其剔除),至多分得 $n_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$个席位,$n>N\geqslant m$.全校而言,每个席位代表的学生数记为 $a=n/N$,第 i 系按学生数比例应分得的席位为 $\alpha_i=\dfrac{n_i}{n}N=\dfrac{n_i}{a}$,最后实际分得的席位数为 $N_i\quad(1\leqslant N_i\leqslant n_i$,整数),每个席位代表的学生数为 $a_i=\dfrac{n_i}{N_i}\quad(i=1,2,\cdots,m)$.

2.3.3 确定"公平"的标准

我们可以提出不同的标准来衡量分配方案的"公平"的程度,例如

标准 1　要求 $z=\max\limits_{i} a_i$ 最小(对不同方案而言);

标准 2　要求 $z=\sum\limits_{i=1}^{m}|a-a_i|$ 最小;

标准 3　要求 $z=\min\limits_{i} a_i$ 最大;

标准 4　要求 $z=\sum\limits_{i=1}^{m}(a-a_i)^2$ 最小.

2.3.4 "判别数"分配方法

按标准 1,可认为,α_i 越大的系越吃亏,故应尽量优先照顾之. α_i 取整后,每个席位代表的学生数为

$$\frac{n_i}{[\alpha_i]}=\frac{a\alpha_i}{[\alpha_i]}=\frac{a([\alpha_i]+\langle\alpha_i\rangle)}{[\alpha_i]}=a(1+\beta_i)$$

其中 $\beta_i=\dfrac{\langle\alpha_i\rangle}{[\alpha_i]}$ 称为判别数,$\langle\alpha_i\rangle$ 表示 α_i 小数部分,$[\alpha_i]$ 表示 α_i 整数部分. β_i 越大的系越吃亏,按标准 1,应优先照顾. 分配方法的算法流程如图 2.3.1,其中 $r=N-\sum\limits_{i=1}^{m}[\alpha_i]=\sum\limits_{i=1}^{m}\langle\alpha_i\rangle$.

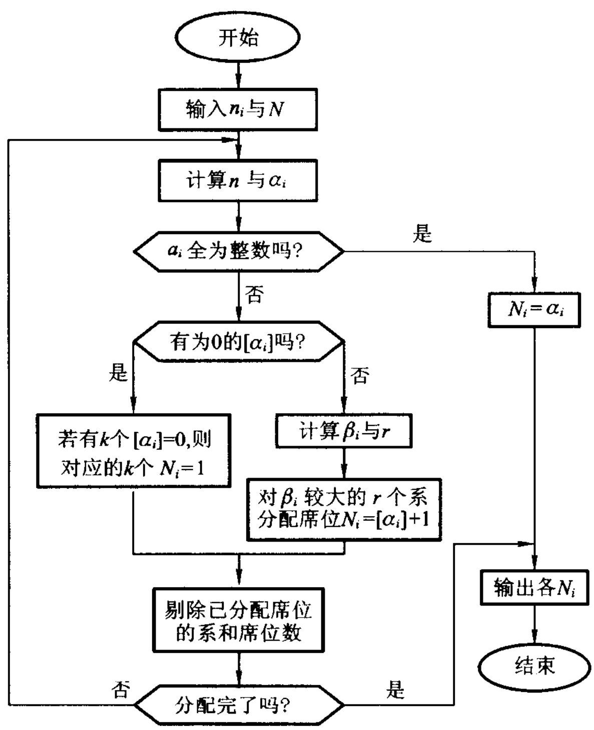


图 2.3.1

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com