

时代教育 • 国外高校优秀教材精选

(原书第2版)

结构理论

Theory of Structures

(美) S.P.铁木辛柯 (S.P.Timoshenko)
D.H. 杨 (D.H.Young) 著
叶红玲 杨庆生 等译

著

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

**Mc
Graw
Hill**

Education



时代教育·国外高校优秀教材精选

结 构 理 论

(原书第2版)

(美) S. P. 铁木辛柯 (S. P. Timoshenko) 著
D. H. 杨 (D. H. Young)

叶红玲 杨庆生 等译
杨庆生 叶红玲 校

机 械 工 业 出 版 社
麦格劳—希尔教育出版集团

S. P. Timoshenko, D. H. Young
THEORY OF STRUCTURES: Second Edition
ISBN 0-07-085807-1

Copyright© 1965, 1945 McGraw-Hill, Inc. All Right Reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

Simplified Chinese translation edition jointly published by McGraw-Hill Education (Asia) Co. and China Machine Press House.

本书中文简体字翻译版由机械工业出版社和美国麦格劳-希尔教育(亚洲)出版公司合作出版。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售。

北京市版权局著作权合同登记号:图字 01-2003-6204

本书主要内容涵盖了桁架、刚架、拱和连续梁等结构形式的静力学和动力学。阐述了各种结构在静定和超静定状态下的内力、变形、影响线的分析方法和能量原理;介绍了结构动力学的基础知识和结构理论的最新发展。本书通篇贯穿了理论联系实际、注重工程应用的学术思想;在保持内容完整性和知识系统性的前提下,特别关注工程实际问题的处理。对于工程中经常遇到的结构形式和载荷状况如何建模、如何选取适当的分析方法以及对计算结果的检验和判断等问题,都进行了详细的讨论。本书的知识体系与结构力学教材基本一致。

本书可作为土木工程本科生和研究生学习结构力学、进行结构分析课程的教材,也适合作为工程技术人员的技术书籍。

图书在版编目(CIP)数据

结构理论/(美)铁木辛柯(Timoshenko, S. P.), (美)杨(Young, D. H.)著;
叶红玲等译. —北京:机械工业出版社, 2005. 4

(时代教育·国外高校优秀教材精选)

ISBN 7-111-16205-6

I. 结... II. ①铁... ②杨... ③叶... III. 结构力学-高等学校-教材 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 015079 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:季顺利 版式设计:张世琴 责任校对:陈延翔

封面设计:饶薇 责任印制:陶湛

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2005 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

787mm × 1092mm $\frac{1}{16}$ · 20.25 印张 · 501 千字

定价:32.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68326294

封面无防伪标均为盗版

序

像铁木辛柯独著或同他人合著的其他的力学教科书一样，初版于 1945 年、再版于 1965 年的《结构理论》也是一部经典著作。

经典的魅力在于，它的光芒不但不会随年华的流逝而衰减，相反会时时给人以新的照耀。这本《结构理论》作为经典教科书，不仅在于它仍然可以用作土木类专业的教材或参考书，还对于其他专业研读变形体力学的人员给予更多启发。

结构理论或结构力学同材料力学一样，都属于变形体力学的早期发展，学习这门课程的意义是多方面的。首先是力学概念的突破，即由不变形体(质点与刚体)向变形体(弹性体、塑性体、流体等)的升华。如果不是在变形上寻找出路，力学永远也不会走出构件或结构的单纯靠力平衡方程无法求解的困境。

无论超静定的构件或结构，如果不进行受力变形的几何协调方程的研究，就不可能由柳暗走向花明。紧接着变形的研究，必然呼唤对于力与变形(或应力与应变)本构关系的探讨。结构理论的意义就在于把材料力学对构件使用成功的“平衡—变形—本构”三要点的的方法论，在结构上作进一步淋漓尽致的发挥和发展。

学习结构理论的另一个意义在于它的工程实用性，铁木辛柯与杨的这本教材充分体现了理论密切联系实际的特点，对于我们从事实实在在的工程结构分析与设计，不仅有直接使用价值，也颇有理念上的深刻启发性。

当今，力学等领域发展的各种数值计算方法均可作为工程结构分析乃至优化设计提供有效的服务。从现在的观点看，材料力学实际是关于杆件的变形体力学，结构力学则是杆件体系的变形体力学。如果说二者都是研究天然有限元的变形体力学，那么，有限元方法则是从天然有限元(轴力杆、梁等)向人造有限元(膜、板、壳、块体等)变形体力学的延伸。

从这个角度来看铁木辛柯与杨的《结构理论》，可以看到这本书是颇有前瞻性的。本书在 1965 年的再版序言里特别强调了结构分析的矩阵法和动载荷计算。话虽简练，却很有远见。

从 1945 年出版第 1 版到 1965 年出版第 2 版的 20 年间，力学取得了很多重大进展，为工程和其他学科作出了很大的贡献。其中，在那个时期出现的有限

元方法就以矩阵法为重要工具。无论结构分析的矩阵法还是动力分析，从1965年以后又有了巨大的发展。至今又过去了将近40年，包括有限元方法在内的各种数值计算方法已经获得了广泛的应用，达到了无论科学还是技术须臾都不能离开它们的境界。

不难想象，从1945年到现在的近60年间，这本书为工程界和力学界人才的培养，在结构力学方面作出了极其重要的贡献，因此有理由相信，这本翻译书将为中国相关专业的大学生们提供一本有益的参考书。

也许伴随着计算机技术的不断发展和使用，今后结构理论教材的内容会有更多的取舍和重组，但是基本的原理非但不会减弱，反而还会进一步加强，例如矩阵法、动力分析、能量原理和方法，会对其进行重点阐发。同时，工程的直觉和力学的概念也要更加突出。因此，经典著作会放射出永不泯灭的光芒。

隋允康

写于北京工业大学

译者序

由铁木辛柯(S. P. Timoshenko)教授和杨(D. H. Young)教授合著的《结构理论》(1965年,第2版),作为一本工科结构力学教科书,在世界范围内得到广泛的推崇和认可。面世半个多世纪以来,已经惠及几代读者,被多次以各种语言和版式印制,已经成为本领域内一部名副其实的经典著作。在科学技术飞速发展的今天,愈发显示出它的独特价值。我们相信,本书中文版的问世,将会对读者正确理解和掌握结构力学的知识有所帮助;同时,对我国结构力学教学和科研工作起到借鉴作用。

原书是为工程专业的本科生和一年级研究生编写的一本教材。作者之一——铁木辛柯教授是一位特别注重解决工程实际问题的力学专家。本书通篇贯穿了理论联系实际、注重工程应用的学术思想;在保持内容完整性和知识系统性的前提下,特别关注工程实际问题的处理。本书用大量的篇幅介绍工程问题的模型化和各种分析方法。例如,对于工程中经常遇到的结构形式和载荷状况如何建模、如何选取适当的分析方法以及对计算结果的检验和判断等问题,都进行了详细的讨论。对于结构力学问题的各种研究方法,通过实例详细介绍了分析步骤,并由特殊示例归纳到一般原理,这非常有利于读者特别是初学者学习和掌握本课程的核心知识。

本书主要内容涵盖了桁架、刚架、拱和连续梁等结构形式的静力学和动力学。阐述了各种结构在静定和超静定状态下的内力、变形和影响线的分析方法和能量原理;介绍了结构动力学的基础知识和结构理论的最新发展,特别是对当时刚刚萌芽的计算机分析方法给予了特别关注。本书的知识体系与沿袭至今的结构力学教材基本一致。

本书的编写体系以研究问题的类型为主线展开,根据知识本身的内在联系划分章节,由浅入深,逻辑性强,推理缜密。这样可避免学生陷入学习的死角——只注意方法本身的按步推算,忽略对研究问题的整体把握。作为大学教材,本书的内容编排非常符合循序渐进的学习规律;也适合于包括在校大学生和工程技术人员在内的读者作为自学教材。

本书在翻译时,删除了原书第4章关于空间桁架和第11章桥梁结构分析的内容(本书的第4、5、6、7、8、9章,为原书的第5、6、7、8、9、10章;第10章为原书的第12章。),因为前者的处理方法与平面桁架基本一致;而后者已经发展成为专门的学科。力和长度等物理量译稿采用了原书中所使用的符号以及英制单位,为了方便读者阅读,我们在书后附加了英制单位与国际单位的换算表。

本书译者分工如下:第1章、第2章、第6章、第7章、第8章、第10章和附录由叶红玲译;前言、第3章、第4章、第5章、第9章由杨庆生译。全部译稿由杨庆生和叶红玲采用互译互校的方法共同校对。隋允康教授为本书翻译撰写了序。研究生李智健、白海波、许芳、王海明、李春江、刘君等参加了文稿的初译,在此一并表示衷心感谢。

由于时间仓促和译者水平的限制,书中可能存在一些不足之处,欢迎广大读者批评指正。

译者

于北京工业大学

原著前言

这是《结构理论》的第2版，和第1版一样，它主要是作为土木工程大学生和一年级研究生的结构分析课程的教材。为达到这个目的，本书非常注重各类结构的分析方法与其基本原理的紧密联系。只有深入地理解这些基本原理，工程师才能成功地将分析方法应用于他们在现代社会面临的经常变化的问题。

本书大略地分为两部分：第1部分处理静定结构；第2部分处理超静定结构。按此安排，前4章依次处理静力学基础（主要是几何静力学）、静定平面桁架、梁与桁架的影响线、静定空间桁架。接下来，第5章和第6章处理弹性系统相关的基本定理及其在梁、桁架位移计算上的应用。再下面的几章依次处理超静定桁架、拱和刚架的分析。最后几章介绍结构分析的矩阵法、筋条悬索桥分析和结构动力学。

在第2版中，前7章基本和第1版保持一致。关于拱和刚架的第8章和第9章则完全重写。基于最小功定理和弹性中心的概念，现在对拱的处理已经简化。加入了使用弹性中心概念分析门式刚架的若干文献。在重写的章节，关于连续梁和刚架分析的斜率—挠度方程的使用已经扩展到非等截面构件系统，并给出许多例题。

自从本书首次问世（1945年）以来，结构分析的两个方面变得非常重要，即公式表示的矩阵方法和动力载荷作用下的结构分析。它们都是非常宽泛的课题，有许多现成的书籍可以参考。这里的第10章和第12章仅是这些课题的介绍，但是我们希望这能鼓励读者在这些方向上继续研究。

致谢(略)

S. P. Timoshenko

D. H. Young

目 录

序

译者序

原著前言

第1章 平面静力学基础 1

- 1.1 平面汇交力系 1
- 1.2 三力平衡 3
- 1.3 平衡方程 6
- 1.4 内力 8
- 1.5 索多边形 12
- 1.6 索多边形的应用 15
- 1.7 分布力作用下的索曲线 18
- 1.8 柔性悬索 21
- 1.9 弯矩图 25
- 1.10 虚位移原理 29

第2章 静定平面桁架 33

- 2.1 简单桁架 33
- 2.2 反力 35
- 2.3 结点法 38
- 2.4 麦克斯韦(Maxwell)图 40
- 2.5 截面法 43
- 2.6 组合桁架 48
- 2.7 平面桁架的一般理论 52
- 2.8 复杂桁架: 亨尼勃格(Henneberg)方法 56
- 2.9 虚位移法 60

第3章 影响线 64

- 3.1 移动载荷和影响线 64
- 3.2 梁支座反力的影响线 68
- 3.3 剪力影响线 72
- 3.4 弯矩影响线 76
- 3.5 带有横梁的主梁 80

3.6 三铰拱的影响线 84

3.7 简单桁架的影响线 87

3.8 复合桁架的影响线 91

第4章 弹性体的一般原理 95

- 4.1 拉伸、扭转和弯曲的应变能 95
- 4.2 叠加原理 97
- 4.3 广义形式的应变能 100
- 4.4 卡氏(Castigliano)第一定理 103
- 4.5 卡氏(Castigliano)第二定理 106
- 4.6 最小功原理 110
- 4.7 互等定理 114

第5章 铰接桁架的挠度计算 120

- 5.1 卡氏(Castigliano)定理的应用 120
- 5.2 挠度计算的麦克斯韦—莫尔(Maxwell—Mohr)法 123
- 5.3 图解法求桁架位移 125
- 5.4 虚载荷法 131
- 5.5 变异的虚载荷法 135

第6章 超静定铰接桁架 141

- 6.1 概述 141
- 6.2 带一个冗余杆件的桁架 143
- 6.3 带多个冗余杆件的桁架 147
- 6.4 超静定桁架中的装配应力和温度应力 151
- 6.5 超静定桁架的影响线 155
- 6.6 超静定空间结构 159

第7章 拱与刚架 164

- 7.1 概述 164
- 7.2 对称二铰拱 165
- 7.3 对称无铰拱 169

7.4 无铰刚架	175	9.4 连续梁的矩阵分析	253
7.5 有铰刚架	181	9.5 拱和刚架的矩阵方法	259
7.6 温度变化和支座沉降的影响 ...	183	9.6 连续刚架的矩阵分析	264
7.7 环	186		
第 8 章 连续梁与刚架	189	第 10 章 结构动力学	269
8.1 斜率—挠度方程	189	10.1 单自由度系统的自由振动	269
8.2 固端梁	192	10.2 瑞雷(Rayleigh)法	273
8.3 连续梁	195	10.3 稳态强迫振动	277
8.4 变截面梁	199	10.4 一个干扰力的通用情况	281
8.5 变截面连续梁	205	10.5 数值积分	285
8.6 带等截面杆的简单刚架	212	10.6 图形积分	289
8.7 带等截面杆的连续刚架	219	10.7 轨道静动应力	294
8.8 力矩分配法	225	10.8 等截面梁的横向振动	298
8.9 建筑物刚架分析	231		
8.10 带非等截面杆的刚架	234	附录	302
第 9 章 结构分析的矩阵法	239	附录 A 国际单位制单位与英美制	
9.1 力法和位移法	239	单位换算表	302
9.2 矩阵代数基础	241	附录 B 习题答案	304
9.3 矩阵方法在平面桁架中的应用 ...	246	附录 C 人名对照表	311
		附录 D 关键词索引	312

第 1 章

平面静力学基础

1.1 平面汇交力系

结构理论以静力学理论为基础。在本书中,我们认为读者已经熟悉静力学理论,但是因为静力学理论在分析工程结构问题上的重要作用,还是要复习和回顾一下在工程结构分析中非常有用的部分静力学原理。首先是力的平行四边形原理: P_1 和 P_2 两个力,如图 1.1a 中的矢量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$,可以合成为一个合力 R ,合力由以这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定,如图中矢量 $\overrightarrow{OC}$ 。同样,合力也可以通过力三角形得到,如图 1.1b 所示。图 1.1b 中三角形 ABC 与图 1.1a 中的三角形 OAC 是等同的。

如果平面上的几个力作用在同一点 O (见图 1.2a),总可以合成为过该点的一个合力。这个合力可以通过连续应用力平行四边形法则(见图 1.2a)确定,或者通过力多边形的闭合边来确定(见图 1.2b)。

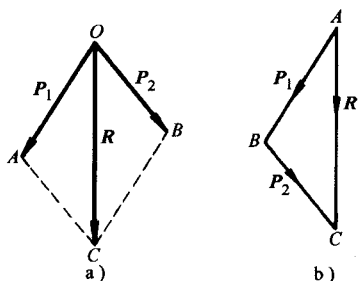


图 1.1

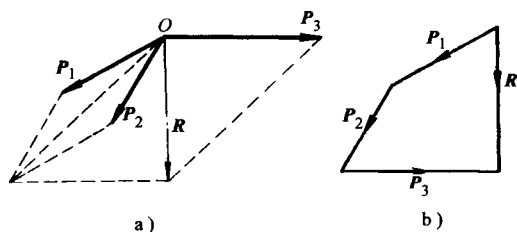


图 1.2

如果力多边形是闭合的,那么合力为零,即给定力系平衡。因此,如果平面汇交力系是平衡的,则它们的自由矢量组成的力多边形必是闭合的。

上述图形的平衡条件在结构分析中是非常有用的。

举一个简单的例子。如图 1.3a 所示,一重 W 的重物受绳索的拉力作用。选环 O 为自由体,则环 O 在 W 、 S_1 和 S_2 三个力的作用下达到平衡。力 S_1 和 S_2 的方向沿着绳索,它们的大小称为轴力或拉力。如果重力 W 的大小已知,则拉力 S_1 和 S_2 的大小可以由图 1.3b 所示的封闭的力三角形得到: $S_1 = W \csc \alpha$ 和 $S_2 = W \cot \alpha$ 。

由于共面的平衡汇交力系组成一个封闭的力多边形, 则在任意正交坐标系 x 轴和 y 轴上, 这几个力投影的代数和为零。由此我们可以得到熟悉的平衡方程

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0 \quad (1.1)$$

方程中 X_i 和 Y_i 表示任意一个力 P_i 在 x 轴和 y 轴上的投影, 求和时包含了力系中所有的力。上述平衡时的解析条件与闭合的力多边形的几何条件是等价的, 但有时应用解析条件更加方便。例如, 如图 1.3a 所示, 对系统列出平衡方程, 可以得到

$$S_1 \cos \alpha - S_2 = 0$$

$$S_1 \sin \alpha - W = 0$$

从平衡方程可以得到前述的 $S_1 = W \csc \alpha$ 和 $S_2 = W \cot \alpha$ 。

用上述的几何平衡条件和解析平衡条件对分析铰接桁架的平衡问题是非常有用的。例如如图 1.4a 所示, 受载荷作用的一个桁架。现分析外载荷 P 作用下桁架中各杆产生的轴力。如果一些杆件为零杆, 即杆的内部应力为零, 则可以简化力的分析。比如我们选铰链 A 为隔离体(见图 1.4b), 立刻会发现杆 1 与杆 2 为零杆, 因为这两个力只有共线才可能平衡, 但这两杆不共线。确定杆 2 为零杆后, 我们分析铰链 B 的平衡, 它上面作用了三个力, 有两个力共线。由式(1.1)可得, 杆 4 受力为零。最后就只有图中用粗实线画出的杆承受非零的轴向力。用式(1.1)的第二个式子进一步分析铰链 B 的平衡, 可得杆 3 受的拉力等于载荷 P 。通过分析铰链 C 的平衡, 可得到杆 5 和杆 6 的轴力。至此, 该桁架的受力分析完成。

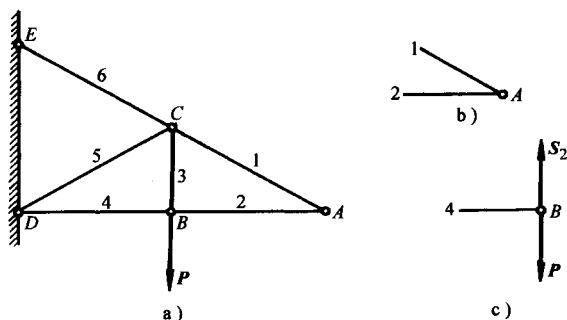


图 1.4

习题

1. 求如图 1.5 所示桁架中杆 AC 的拉力 S_1 和杆 AB 的压力 S_2 。
2. 为了使混凝土立方体 M 受两轴向上的压力作用, 使用如图 1.6 所示的铰接杆系统。框架为四方体, 斜杆沿四方体的对角线方向。求作用在立方体表面的压力。
3. 指出如图 1.7 所示桁架中的零杆。(a) 在 F 点作用垂直载荷 P ; (b) 在 D 点作用垂直载荷 P 。

4. 如图 1.8 所示, 将对角线的方向由 AD 改为 BC , 则简单桁架的作用力有何影响?
5. 用实线画出两个简支桁架中的主动杆件, 载荷如图 1.9 所示。

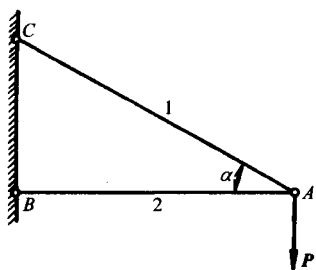


图 1.5

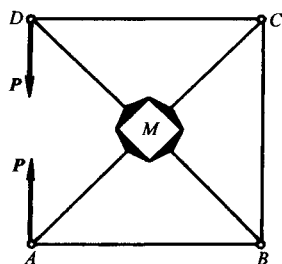


图 1.6

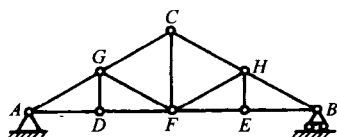


图 1.7

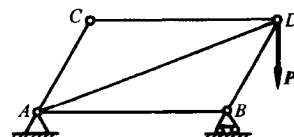
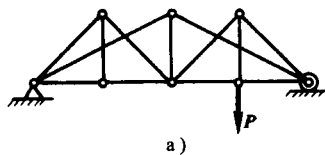
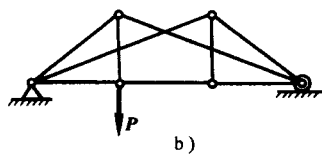


图 1.8



a)



b)

图 1.9

1.2 三力平衡

同一平面上三个相互不平行的力只有汇交于一点才能处于平衡状态。为证明这个结论, 参考图 1.10, 力 P 和 Q 为汇交于一点 O 的任意两个力, 那么第三个力 S 与这两个力平衡的条件是它与这两个力的合力 R 是大小相等、方向相反且作用在同一条直线上。当然, 合力 R 必汇交于点 O 。因此, 力 S 也必过汇交点 O 。

上述的三力汇交定理对于求解在已知力作用下, 刚体或结构在支座处的约束反力是非常有用的。例如, 起重机如图 1.11 所示, 柱 AB 由轴承 A 和 B 支撑, 以使起重机能绕着垂直轴旋转。在垂直载荷 P 的作用下, 起重机在轴承 A 和 B 处施加压力, 而在起重机的支座处产生了大小相等、方向相反的力作用在起重机上。因此, 垂直力 P 同反力 R_A 和 R_B 是三力平衡的。忽略在轴承 B 处的摩擦, 反力

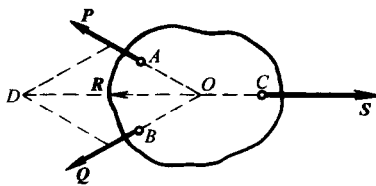


图 1.10

R_B 必定是水平力, 于是这两个力(P 和 R_B)的作用线确定了力系的汇交点 O 。那么, 第三个力 R_A 也必过点 O 。因此, 依据三力汇交定理建立了作用线 AO 。已知力 P 的大小, 反力 R_A 和 R_B 的大小可以通过如图 1.11b 所示的闭合的力三角形确定。因为这个三角形相似于图 1.11a 所示的三角形 BAO , 我们得到 $R_A = 5P/4$ 和 $R_B = 3P/4$ 。

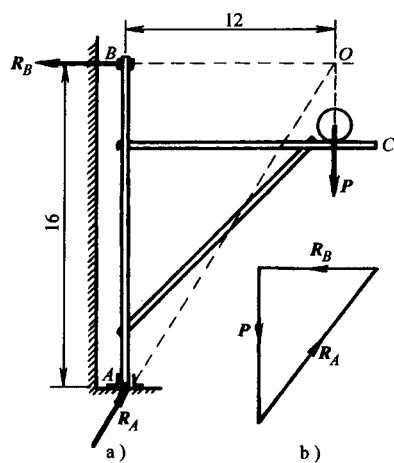


图 1.11

第二个例题, 应用三力汇交原理计算反力, 并求在铰接杆 1、2、3 上产生的轴力。1、2、3 三杆支撑着水平梁 AB , 载荷 P 作用在梁上, 如图 1.12a 所示。用反力 S_1 、 S_2 、 S_3 代替三根支撑杆。由四个力(P 、 S_1 、 S_2 、 S_3)组成的力系在同一平面内处于平衡状态。为使该力系满足三力平衡的条件, 现假定 S_1 和 S_2 暂时由它们的合力 R 来代替。尽管合力方向未知, 但是显然合力的作用线过 S_1 和 S_2 的作用线的交点 D 。现在, 用平衡的三个力(P 、 S_3 和 R)来代替平衡的四个力。显然, 这三个力的汇交点是点 O , 通过力 P 和 S_3 的作用线的交点得到点 O 。因此, 建立第三个力 R 的作用线 DO , 并且建立闭合三角形 abc (见图 1.12b)。由该图可以确定力 S_3 和 R 的大小。最后, 通过由矢量 $\overline{ca}$ 表示的已知力 R , 将其分解成分别沿 S_2 和 S_1 方向的分力 $\overline{cd}$ 和 $\overline{da}$, 从而求出力 S_2 和 S_1 的大小, 并且如果所有的图形按比例建立, 则三个反力可以确定。从图 1.12b 中矢量箭头的方向, 可推出杆 1 和杆 3 受压, 而杆 2 受拉。

工程结构中的一种普通形式是如图 1.13a 所示的三铰拱。在如图载荷 P 作用下, 可以应用三力汇交原理求得结构在支座 A 和 B 处的反力。借助于拱顶 C 处的铰链, 可推出反力 R_B 必沿着线 BC , 与已知力 P 的作用线交于点 O 。因此, 点 O 是力系的汇交点, 由此建立 R_A 的作用线 AO 。这样, 反力的大小通过如图 1.13b 所示的闭合三角形求得。

如果除了载荷 P , 在拱 CB 上作用有载荷 Q , 可以应用同样的过程求解。首先应求得只在载荷 P 作用下 A 和 B 处的反力, 与前述过程相同。然后, 重复同样的过程, 找到只在载荷 Q 作用下的反力。于是在 A 和 B 处都有两个反力。在每一个支点处的两个反力的合力就是

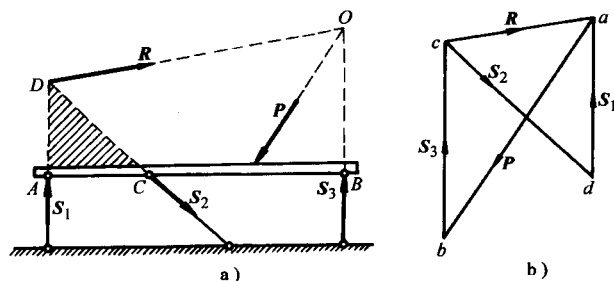


图 1.12

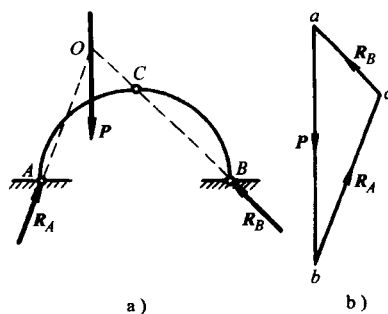


图 1.13

在载荷 P 和 Q 同时作用下所求的反力[⊙]。

最后一个例子，考虑由 AC 和 BC 铰接的组合梁，铰接点在 C 点。组合梁由四个铰接杆支撑，如图 1.14a 所示。为求在载荷 P 作用下四个支撑杆产生的轴力 S_1 、 S_2 、 S_3 和 S_4 ，应首先考虑只受三个力作用的梁 BC 的平衡。这三个力是 S_3 、 S_4 和作用在铰链 C 上的力，铰链 C 上的力表示梁 AC 作用在梁 BC 上的力。已知力 S_3 和 S_4 的作用线确定了三个力的汇交点 D ，因此在铰链 C 上的力的作用线是 CD 。梁 BC 作用在梁 AC 上的力与梁 AC 作用在梁 BC 上的力是大小相等、方向相反、有相同的作用线。梁 AC 也具有相同条件，除了支撑杆 1 和杆 2 外，第三个支撑杆沿着线 CD 。一旦在脑海中有这样的结论，我们就会看到，当考虑梁 AC 的平衡时，可以完全采用与图 1.12 所示梁的相同分析过程。因此， S_1 和 S_2 合力的作用线 FE 就建立了，如图 1.14b 所示的闭合三角形 abc 也建立起来了。杆 1 和杆 3 受压，而杆 2 和杆 4 受拉。

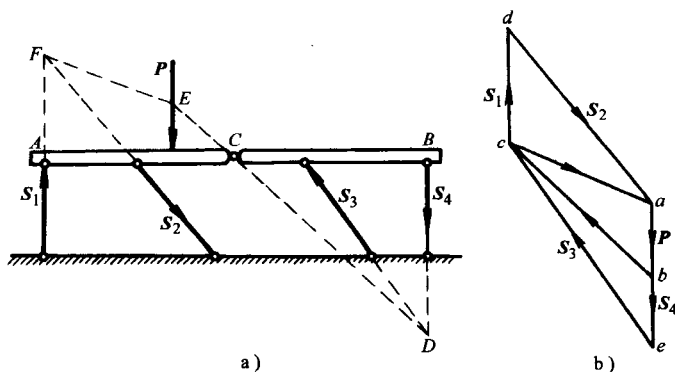


图 1.14

习题

1. 用三力汇交原理，求简支梁上支点 A 和 B 处的反力，载荷如图 1.15 所示。
2. 用几何法求如图 1.16 所示梁在 A 和 B 处的反力。

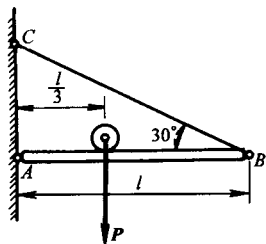


图 1.15

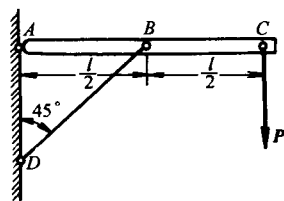


图 1.16

注：书中插图未标注尺寸单位者，均为 ft(英尺)，全书统一。

⊙ 拱上有几个力更便利处理的方法将在 1.6 节讨论。

3. 用几何法求如图 1.17 所示梁在 A 和 B 处的反力。
4. 重 W 的等截面直杆靠在水平地面 A 和垂直墙 B 上, 绳子 OD 使杆不致倾倒, 如图 1.18 所示。忽略在支点处的摩擦, 用几何法求 A 和 B 处的反力以及绳子 OD 的拉力。
5. 用几何法求组合结构在支点处的反力 R_A 和 R_B , 载荷如图 1.19 所示。
(提示: B 处的反力是水平力)

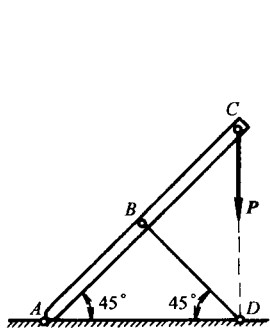


图 1.17

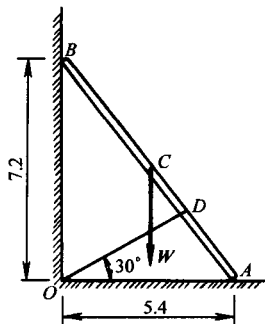


图 1.18

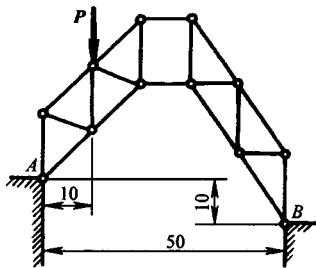


图 1.19

1.3 平衡方程

一般来说, 力的作用线不交于一点的共面力系可以合成为: ①一个合力; ②一个合力偶; ③达到平衡状态。

给定力系 P_1 、 P_2 、 P_3 和 P_4 , 如图 1.20b 所示, 这四个力的自由矢量组成一个非封闭的力多边形, 该力系最后合成为一个合力, 合力的大小和方向由力多边形的封闭边 AE 表示, 如图 1.20a 所示。

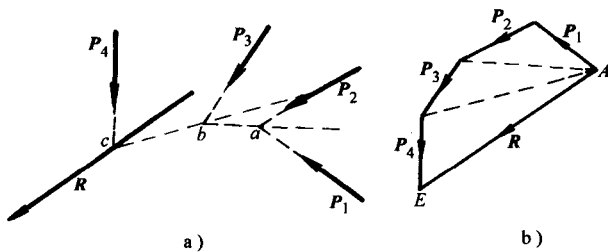


图 1.20

如果给定力系的自由矢量组成一个封闭的力多边形如图 1.21b 所示, 则合力为零, 但也可能是一个力偶。在这种情况下, 将力任意分成两组 P_1 、 P_2 、 P_3 与 P_4 、 P_5 、 P_6 , 最后得到两个大小相等、方向相反的合力 R_1 、 R_2 , 如图 1.21b 中的矢量 $\overline{AD}$ 和 $\overline{DA}$, 任选力系中的几个力都可以这样去分组。最后, 如果合力的作用线如图 1.21a 所示, 这两个大小相等方向相反的合力组成一个合力偶。

特殊情况下, 如果力的作用线 R_1 与 R_2 共线, 如图 1.21a 所示, 则合力偶为零, 此力系

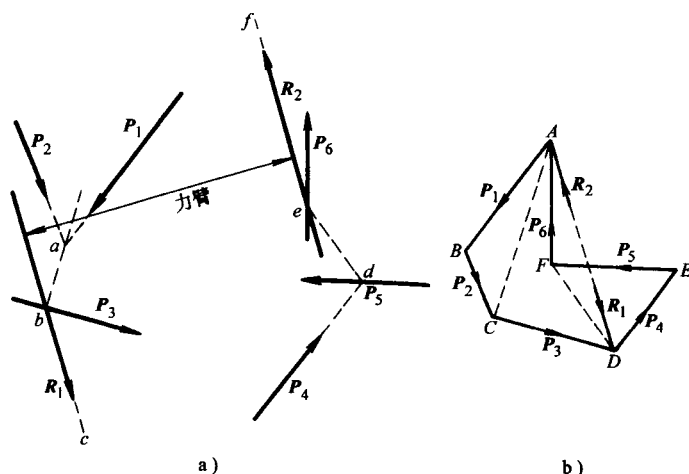


图 1.21

平衡。因此，平面内力系的平衡条件是力多边形自行封闭且合力偶为零。在封闭的力多边形中，可以推出这些力在任一正交轴上投影的代数和为零。由合力偶为零的条件，借助于Vangnon's 法则，也可以推出力系对该平面内任一点的力矩的代数和为零，力系平衡的解析条件表示如下

$$\sum X_i = 0 \quad \sum Y_i = 0 \quad \sum M_i = 0 \quad (1.2a)$$

这里 X_i , Y_i 是任意力 P_i 对正交轴的投影， M_i 是这些力对固定点的力矩。注意求和时应包括力系中所有的力。

以上的平衡方程也可以用三个力矩方程表达

$$\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0 \quad (1.2b)$$

A 、 B 、 C 是三个任意点，在力的作用平面内这三个点组成一个三角形。

式(1.2)可以广泛运用于结构理论中，尤其是用于确定反作用力和桁架分析。例1，求解简单吊架 ABC 受载荷作用下的约束反力。如图 1.22 所示，忽略 B 点摩擦，吊梁受到支持力 R_B 、 X_A 与 Y_A 的作用，其中 X_A 与 Y_A 分别是在 A 点处的水平与竖直方向的未知力。该力系平衡；以 A 点为矩心，用式(1.2a)得到

$$\begin{aligned} X_A - R_B &= 0 \\ Y_A - P - Q &= 0 \\ R_B c - Pa - Qb &= 0 \end{aligned}$$

由这些公式可以推出： $X_A = R_B = Pa/c + Qb/c$ 与 $Y_A = P + Q$ 。

第二个例子，桁架载荷如图 1.23 所示，求杆 1、2、3 的轴力。这里只考虑桁架的阴影部分 BCD ，把与它连接的杆件 1、2、3 用约束反力代替，得到隔离体如图 1.23 所示。这是五个力的平衡问题，各个力对平面桁架中任一点的力矩的代数和一定为零。选点 A 、 D 、 C 为矩心，由式(1.2b)得到

$$S_1 a - Qa - 2Qa = 0$$

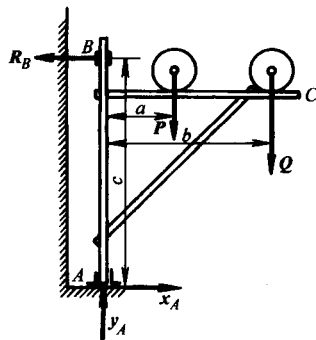


图 1.22

$$\frac{S_3 a}{\sqrt{3}} - Qa = 0$$

$$Qa - S_2 a = 0$$

可得 $S_1 = 3Q$ (拉), $S_3 = \sqrt{3}Q$ (压), $S_2 = Q$ (压)。值得注意的是, 矩心的选择应尽量使每个方程中只包含一个未知量。

习题

1. 等截面直杆 AE , 重量不计, 与垂直的墙铰接于 A 点, 并由压杆 BD 支撑, 如图 1.24 所示。球的重量为 Q , 绳子 CF 平行于 AE , B 点和 C 点在同一水平面上, 球的半径可由此求出。求 A 点和 B 点的约束反力。
2. 求如图 1.25 所示简单桁架中杆 1、2、3 的轴力。
3. 如图 1.26 所示, 求复合结构中支座 A 、 B 处的水平和铅垂约束反力。
4. 求平面结构中张紧杆 AB 的轴力。支座和载荷如图 1.27 所示。
5. 如图 1.24 所示, 如果绳子 CF 被水平绳子 CB 代替, A 点和 B 点的作用力有什么变化?

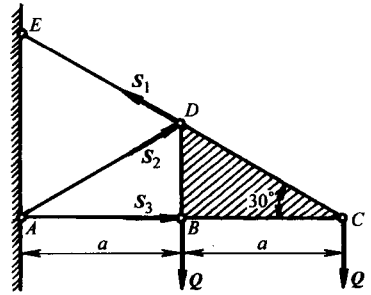


图 1.23

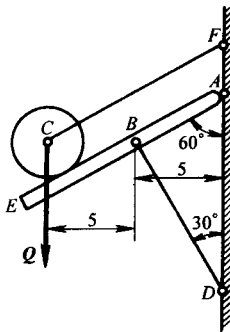


图 1.24

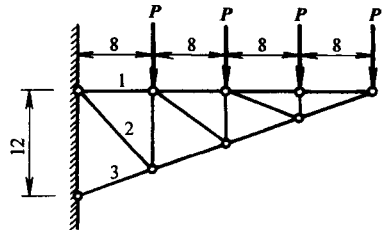


图 1.25

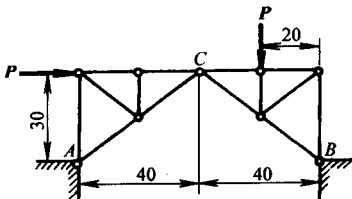


图 1.26

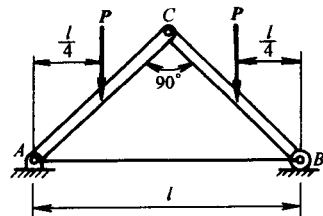


图 1.27

1.4 内力

在前面的各节中, 已经讨论了平面内的刚体在约束和载荷作用下, 求解其外约束反力的问题。现在将考虑内力或应力问题。内力是受约束的刚体在外载荷作用下产生的。例如, 在