公共课精選

研究生入学
公共课试题分类精选

理工数学分册

收集历年考研试题及解答

国防科技大学出版社

理工科研究生入学考试指导丛书

理工科 Matriculation

研究生入学公共课试题分类精选

理工数学分册

《研究生入学公共课试题分类精选》编写组 编

国防科技大学出版社

内容简介

本书收集了1987年以来研究生招生理工数学(即数学一和数学二)全国统考的全部试题,分高等数学、线性代数、概率论与数理统计三篇,每篇按最新的考试大纲分节,并给出了考试内容和考试要求,每节按填空题、选择题、解答题与求证题分类。全部试题都给出了标准答案或详细解答。附录列出了近10年的理工数学考研试题,近5年的理工数学考试试题解析与解答,近1年的经济数学(即数学三和数学四)考研试题解析与解答。

本书是报考理工类研究生的考生考前复习演练的必备资料,同时也是大学生学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计等相关课程不可多得的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

研究生入学公共课试题分类精选·理工数学分册/《研究生入学公共课试题分类精选》编写组编写 .—长沙:国防科技大学出版社,2005.7

ISBN 7-81099-208-2

Ⅰ.研… Ⅱ.研… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—试题 Ⅳ.G643-44

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:石少平 责任校对:卢天贶
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本:787×1092 1/16 印张:20 字数:578千
2005年8月第1版第1次印刷 印数:1-3000册
ISBN 7-81099-208-2/G·28
定价:29.00元

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计初步

附录一　近10年全国统考题选

附录二　近 5 年全国统考题解答

第一篇　高等数学

一、函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立简单应用问题中的函数关系式。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的基本概念。
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则。
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限。
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型。
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质。

(一)填空题

1.(1987 年数学二)　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=$______。

2.(1988 年数学二)　设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant 0\\ e^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $a=$______。

3.(1989 年数学二)　$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$______。

4.(1989 年数学二)　设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0\\ \frac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是

______。

5.（1990 年数学一、数学二） 设函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$______。

6.（1990 年数学一） 设 a 是非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=$______。

7.（1991 年数学一） 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$______。

8.（1991 年数学二） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$______。

9.（1992 年数学二） $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=$______。

10.（1994 年数学二） 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x},x\neq 0\\a,\quad x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$______。

11.（1995 年数学二） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})=$______。

12.（1995 年数学一） $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$——。

13.（1996 年数学一） 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=8$，则 $a=$______。

14.（1996 年数学二） $\lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]=$______。

15.（1997 年数学一） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______。

16.（1997 年数学二） 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}},x\neq 0\\a,\quad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______。

17.（2001 年数学二） $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$______。

18.（2002 年数学二） 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}},x>0\\ae^{2x},x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______。

19.（2003 年数学一） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$______。

20.（2003 年数学二） 若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$______。

21.（2004 年数学二） 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$______。

22.（2005 年数学一） 曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为______。

23.（2005 年数学二） 曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为______。

24.（2005 年数学二） 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$______。

（二）选择题

1.（1987 年数学二） $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是 （ ）

(A)有界函数　　(B)单调函数　　(C)周期函数　　(D)偶函数

2.(1987年数学二)　函数 $f(x)=x\sin x$　　(　　)

(A)当 $x\to\infty$ 时为无穷大　　(B)在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

(C)在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　　(D)当 $x\to\infty$ 时有有限极限

3.(1990年数学二)　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$,其中 a,b 是常数,则　　(　　)

(A) $a=1,b=1$　　(B) $a=-1,b=1$　　(C) $a=1,b=-1$　　(D) $a=-1,b=-1$

4.(1992年数学一、数学二)　当 $x\to1$ 时,函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限　　(　　)

(A)等于2　　(B)等于0　　(C)为 ∞　　(D)不存在但不为 ∞

5.(1992年数学二)　设 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant0\\x^2+x,x>0\end{cases}$,则　　(　　)

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2,x\leqslant0\\-(x^2+x),x>0\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x),x<0\\-x^2,x\geqslant0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant0\\x^2-x,x>0\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x,x<0\\x^2,x\geqslant0\end{cases}$

6.(1993年数学二)　当 $x\to0$ 时,变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是　　(　　)

(A)无穷小　　(B)无穷大

(C)有界的,但不是无穷小　　(D)无界的,但不是无穷大

7.(1994年数学一)　设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中 $a^2+c^2\neq0$,则必有　　(　　)

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$　　(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

8.(1995年数学二)　设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,$f(x)$ 为连续函数,且 $f(x)\neq0$,$\varphi(x)$ 有间断点,则　　(　　)

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

9.(1997年数学二)　设 $x\to0$ 时,$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为　　(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

10.(1997年数学二)　设 $g(x)=\begin{cases}2-x,x\leqslant0\\x+2,x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}x^2,x<0\\-x,x\geqslant0\end{cases}$,则 $g[f(x)]$ 为　　(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2,x<0\\2-x,x\geqslant0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2,x<0\\2+x,x\geqslant0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2,x<0\\2-x,x\geqslant0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2,x<0\\2+x,x\geqslant0\end{cases}$

11.(1998年数学二)　设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是　　(　　)

(A)若 x_n 发散,则 y_n 必发散　　(B)若 x_n 无界,则 y_n 必无界

(C)若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小　　(D)若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

12.(1999年数学二)　"对任意给定 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的　　(　　)

(A)充分条件但非必要条件　　(B)必要条件但非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

13.(2000 年数学二)　设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连接，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足　(　　)

(A) $a<0,b<0$　(B) $a>0,b>0$　(C) $a\leqslant 0,b>0$　(D) $a\geqslant 0,b<0$

14.(2001 年数学二)　设 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于　(　　)

(A)0　(B)1　(C) $\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$　(D) $\begin{cases}0,|x|\leqslant 1\\1,|x|>1\end{cases}$

15.(2001 年数学二)　设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于　(　　)

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

16.(2003 年数学一、数学二)　设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有　(　　)

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

17.(2005 年数学一、数学二)　设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M\Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有　(　　)

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

18.(2005 年数学二)　设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则　(　　)

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

(三)解答题与求证题

1.(1988 年数学一、数学二)　设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

2.(1989 年数学二)　求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$。

3.(1990 年数学二)　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a。

4.(1991 年数学一)　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$。

5.(1993 年数学一)　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$。

6.(1993 年数学二)　求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$。

7.(1995 年数学二)　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$。

8.(1996 年数学一)　设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限。

9.(1996 年数学二)　设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, x<-1\\ x^3, -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, x>2\end{cases}$

(1)写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(2) $g(x)$ 是否有间断点、不可导点,若有,指出这些点。

10.(1997 年数学二)　求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。

11.(1998 年数学二)　求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点,并判断其类型。

12.(2000 年数学一)　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$。

13.(2001 年数学二)　求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,记此极限为 $f(x)$,求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

14.(2002 年数学二)　设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\,(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,并求此极限。

15.(2004 年数学二)　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$。

(四)标准答案与解答

填空题

1. e^{-3}; 2. 1; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $a=b$; 5. 1; 6. e^{2a}; 7. $-\frac{3}{2}$; 8. -1; 9. $e^{-\frac{3}{2}}$; 10. -2; 11. $\frac{1}{2}$; 12. e^6; 13. ln2; 14. 2; 15. $\frac{3}{2}$; 16. $e^{-\frac{1}{2}}$; 17. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$; 18. -2; 19. $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 20. -4; 21. 0; 22. $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$; 23. $y=x+\frac{3}{2}$; 24. 4/3。

选择题

1.D; 2.C; 3.C; 4.D; 5.D; 6.D; 7.D; 8.D; 9.C; 10.D; 11.D; 12.C; 13.D; 14.B; 15.B; 16.D; 17.A; 18.D。

解答题与求证题

1. **解**　由 $f(x)=e^{x^2}$ 知 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$,又 $\varphi(x)\geqslant0$,则 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\leqslant0$。

2. **解 1**　原式 $=\lim\limits_{x\to0}[1+(2\sin x+\cos x-1)]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^2$

解 2　$(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=[1+(2\sin x+\cos x-1)]^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x-1)\cdot\dfrac{1}{x}=2$

则　原式 $=e^2$

3. **解**　$\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^x$,又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2ax}{x-a}=2a$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=e^{2a}=9$,从而 $a=\ln3$

4. **解 1**　原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}(1+\cos\sqrt{x}-1))^{\frac{\pi}{x}}$

$$=\lim_{x\to0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{(\cos\sqrt{x}-1)\pi}{x}}=e^{\frac{-\pi}{2}}$$

解2　原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{\pi}{x}}$

而　$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\cos\sqrt{x}-1)\pi}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{x}{2}\pi}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$

则　$\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$

5. 解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[1+(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1)]^x$

而　$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1)\cdot x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}}=2$

则　$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x=e^2$

6. 解　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1}=-50$

7. 解　原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

8. 证　先用数学归纳法证明数列$\{x_n\}$单调减。

由 $x_1=10, x_2=\sqrt{x_1+6}=\sqrt{16}=4$,知　　$x_1>x_2$

即 $n=1$ 时,有　　$x_n>x_{n+1}$

设 $n=k$ 时,不等式 $x_n>x_{n+1}$ 成立,由 $x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}>\sqrt{x_{k+1}+6}=x_{k+2}$ 可知,$n=k+1$ 时 $x_n>x_{n+1}$ 也成立,因而对一切的自然数 $x_n>x_{n+1}$ 总成立。

又 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$ 即$\{x_n\}$下有界,由单调有界准则可知原数列有极限,设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,等式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$ 两边取极限得 $a=\sqrt{a+6}$,即 $a=3,-2$(与题设不符,舍去)。

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

9. 解　(1)

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, x<-1\\ \sqrt[3]{x}, -1\leqslant x\leqslant8\\ \dfrac{x+16}{12}, x>8\end{cases}$$

(2) $g(x)$ 处处连续,没有间断点;$g(x)$ 不可导的点是 $x=0$ 及 $x=-1$。

10. 解1　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x})}=1$$

解2　令 $t=-x$,则

原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}}}=1$

解 3 分子分母同除以 x,得

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x^2}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$$

11. **解** $f(x)$在$(0,2\pi)$上的间断点为 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$,由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{5}{4}\pi^+}f(x)=+\infty$,则 $x=\frac{\pi}{4}$和 $x=\frac{5\pi}{4}$为第二类间断点,而$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$,则 $x=\frac{3\pi}{4}$和 $x=\frac{7\pi}{4}$为可去间断点。

12. **解** $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=2-1=1$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$

13.~19. 解答见附二。

二、一元函数微分学

考试内容

导数和微分的概念　导数的几何意义和物理意义　函数的可导性与连续性之间的关系　平面曲线的切线和法线　基本初等函数的导数　导数和微分的四则运算　复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法　高阶导数　一阶微分形式的不变性　微分中值定理　洛必达(L'Hospital)法则　函数的极值　函数单调性的判别　函数图形的凹凸性、拐点及渐近线　函数图形的描绘　函数最大值和最小值　弧微分　曲率的概念　曲率半径

考试要求

1. 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量,理解函数的可导性与连续性之间的关系。
2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式,了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分。
3. 了解高阶导数的概念,会求简单函数的 n 阶导数。
4. 会求分段函数的一阶、二阶导数。
5. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数。
6. 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理,了解柯西中值定理。
7. 理解函数的极值概念,掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法,掌握函数最大值和最小值的求法及其简单应用。
8. 会用导数判断函数图形的凹凸性,会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线,会描绘函数的图形。
9. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法。
10. 了解曲率和曲率半径的概念,会计算曲率和曲率半径。

(一)填空题

1.(1987 年数学一) 当 $x=$______时,函数 $y=x2^x$ 取得极小值。

2.(1987 年数学二) 设 $y=\ln(1+ax)$,则 $y'=$______,$y''=$______。

3.(1987 年数学二) 曲线 $y=\arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是______;法线方程是______。

4.(1988 年数学一、数学二) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$,则 $f'(t)=$______。

5.(1988 年数学二) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{x}})^{\tan x}=$______。

6.(1989 年数学一) 已知 $f'(3)=2$,则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$______。

7.(1989 年数学二) 设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$,则 $f'(0)=$______。

8.(1990 年数学一) 设 $\tan y=x+y$,则 $dy=$______。

9.(1990 年数学一) 曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$上对应于 $t=\frac{\pi}{6}$处的法线方程是______。

10.(1990 年数学一) 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{1}{x}$,则 $y'=$______。

11.(1991 年数学一) 设$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$,则$\frac{d^2y}{dx^2}=$______。

12.(1992 年数学二) 设 $y=\ln(1+3^{-x})$,则 $dy=$______。

13.(1992 年数学二) 曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸区间是=______。

14.(1992 年数学一) 设函数 $y=y(x)$由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定,则$\frac{dy}{dx}=$______。

15.(1992 年数学二) 设$\begin{cases}x=f(t)-\pi\\ y=f(e^{3t}-1)\end{cases}$,其中 f 可导,且 $f'(0)\neq 0$,则$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$______。

16.(1992 年数学二) 函数 $y=x+2\cos x$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值为______。

17.(1993 年数学二) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=$______。

18.(1993 年数学二) 函数 $y=y(x)$由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定,则$\frac{dy}{dx}=$______。

19.(1994 年数学一) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=$______。

20.(1994 年数学一) 设函数 $y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$所确定,则$\frac{d^2y}{dx^2}=$______。

21.(1995 年数学二) 设 $y=\cos(x^2)\sin^2\frac{1}{x}$,则 $y'=$______。

22.(1995 年数学二) 曲线$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}$,在 $t=2$ 处的切线方程为______。

23.(1995 年数学二) 曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为______。

24.(1996 年数学二) 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$,则 $y'|_{x=0}=$______。

25.(1997 年数学一) 对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点$(\rho,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$处的切线的直角坐标方程为______。

26.(1997 年数学二)　设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''|_{x=0}=$______。

27.(1998 年数学一、数学二)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______。

28.(1998 年数学二)　曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})(x>0)$的渐近线方程为______。

29.(1999 年数学一)　$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})=$______。

30.(1999 年数学一)　曲线$\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$在点(0,1)处的法线方程为______。

31.(1999 年数学一)　设函数 $y=y(x)$由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定,则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$______。

32.(2000 年数学二)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$______。

33.(2000 年数学二)　设函数 $y=y(x)$由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定,则 $dy|_{x=0}=$______。

34.(2000 年数学二)　曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为______。

35.(2001 年数学二)　设函数 $y=f(x)$由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$在点(0,1)处的法线方程为______。

36.(2002 年数学一)　已知函数 $y=y(x)$由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$______。

37.(2003 年数学二)　设函数 $y=f(x)$由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$在点(1,1)处的切线方程是______。

38.(2004 年数学一)　曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为______。

39.(2004 年数学二)　设函数 $f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t^2+3t+1\\ y=t^2-3t+1\end{cases}$确定,则曲线 $y=y(x)$向上凹的 x 取值范围为______。

40.(2005 年数学二)　设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $dy|_{x=\pi}=$______。

(二)选择题

1.(1987 年数学一)　设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在 $x=a$ 处　(　)

(A)$f(x)$的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$　　(B)$f(x)$取得极大值

(C)$f(x)$取得极小值　　(D)$f(x)$的导数不存在

2.(1987 年数学二)　设 $f(x)$在 $x=a$ 处可导,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$等于　(　)

(A)$f'(a)$　　(B)$2f'(a)$　　(C)0　　(D)$f'(2a)$

3.(1988 年数学一、数学二)　设 $f(x)$可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则 $\Delta x\to 0$ 时,$f(x)$在 x_0 点处的微分 dy 是　(　)

(A)与 Δx 等价的无穷小　　(B)与 Δx 同阶的无穷小

(C)比 Δx 低价的无穷小　　(D)比 Δx 高阶的无穷小

4.(1988 年数学一、数学二)　设 $y=f(x)$是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解,且 $f(x_0)>0$, $f'(x_0)=0$,则函数 $f(x)$在点 x_0 处　(　)

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)某邻域内单调增加　　　　　　　　(D)某邻域内单调减少

5.(1988 年数学二)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点(0,1)处切线与 x 轴交点坐标是　　(　　)

(A)$(-\frac{1}{6},0)$　　(B)$(-1,0)$　　(C)$(\frac{1}{6},0)$　　(D)$(1,0)$

6.(1989 年数学一、数学二)　当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$　　(　　)

(A)有且仅有水平渐近线　　　　(B)有且仅有铅直渐近线

(C)既有水平渐近线,也有铅直渐近线　　(D)既无水平渐近线,也无铅直渐近线

7.(1989 年数学二)　若 $3a^2-5b<0$,则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$　　(　　)

(A)无实根　　　　(B)有唯一实根

(C)有三个不同实根　　(D)有五个不同实根

8.(1989 年数学二)　设两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值,则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处　　(　　)

(A)必取极大值　　　　(B)必取极小值

(C)不可能取极值　　　(D)是否取极值不能确定

9.(1989 年数学二)　设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是　　(　　)

(A)$\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在　　(B)$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C)$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　(D)$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

10.(1990 年数学一、数学二)　已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为　　(　　)

(A)$n!\ [f(x)]^{n+1}$　　(B)$n[f(x)]^{n+1}$

(C)$[f(x)]^{2n}$　　(D)$n!\ [f(x)]^{2n}$

11.(1990 年数学一)　已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$　　(　　)

(A)不可导　　　　(B)可导且 $f'(0)\neq0$

(C)取得极大值　　(D)取得极小值

12.(1990 年数学二)　设 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq0\\ f(0), & x=0\end{cases}$,其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,$f'(0)\neq0$,$f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的　　(　　)

(A)连续点　　　　(B)第一类间断点

(C)第二类间断点　　(D)连续点或间断点不能由此确定

13.(1991 年数学一、数学二)　曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

(A)没有渐近线　　　　(B)仅有水平渐近线

(C)仅有铅直渐近线　　(D)既有水平渐近线又有铅直渐近线

14.(1991 年数学二)　若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点(1,-1)处相切,其中 a,b 是常数,则　　(　　)

(A)$a=0,b=-2$　　(B)$a=1,b=-3$