数学

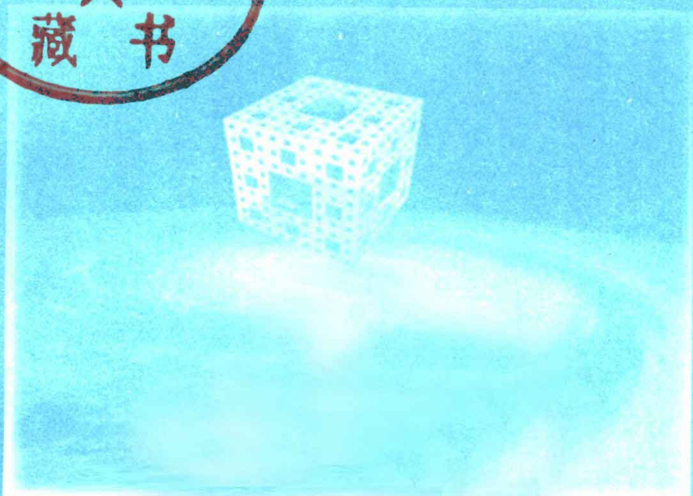
它的起源与方法

·朱家生 姚林·

东南大学出版社

数学，它的起源与方法

朱家生　姚　林



东南大学出版社

内 容 提 要

本书以问题为切入点，从历史的角度对数学科学的一些重要思想方法及其产生、发展的过程进行了研究，对涉及的著名数学家的生平和工作也做了介绍。各个专题独立成篇，通读全书可了解数学发展的全貌。

本书可作为大学数学专业本、专科学生和相关专业硕士研究生的《数学思想史》课程的教材或参考资料，还可供中学数学教师参考，对广大数学爱好者丰富数学知识、提高数学修养也有一定的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

数学，它的起源与方法/朱家生，姚林.—
南京：东南大学出版社，1999.5
ISBN 7—81050—474—6
Ⅰ.数… Ⅱ.①朱…②姚… Ⅲ.数学方法-方法论 Ⅳ.01-0
中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17542 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)
出版人：洪焕兴
江苏省新华书店经销 如东县印刷厂印刷
开本：850mm×1168mm1/32 印张：9 字数：240 千字
1999 年 5 月第 1 版 1999 年 5 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册 定价：13.50 元

序

数学是人类几千年来智慧的结晶。随着时代的进步，数学的思想、方法与内容已渗透到现实生活的各个领域，科学技术的数学化已成为一种共识。现实生活需要数学，现代化人才必须掌握数学。数学发展至今天，已成为一个庞大的系统，但她又确实是在远古时期简单的数与形的概念的基础上发展起来的。如果我们不去追溯古今数学思想方法的演变与发展，就不可能真正理解数学的真谛，正确地把握数学发展的动力和方向。正如法国数学家庞加莱所说："如果我们想要预知数学的未来，最合适的途径就是研究这门科学的历史和现状。"

《数学，它的起源与方法》的作者试图将数学的思想方法放到特定的历史背景中去处理，以便从历史发展的角度纵向剖析，横向比较，这对于理解与掌握数学的概念、思想与方法无疑是很有益处的。全书以问题为切入点，深入浅出，简明清晰，同时编排上独具匠心，既显示了数学历史发展的脉络，又考虑到各数学分支的内容和方法的相对独立性，从而使读者能在不长的篇幅中对数学的全貌有所了解。如果数学教育工作者能够充分地应用历史史料，把生动有趣的数学思想方法融汇到数学教学过程中去，那么我们所教的数学将变得有血有肉，不仅有用，而且有趣；我们的学生也将更加自觉和乐意地去学习和应用数学。

王梓坤

目　录

1 数学的萌芽

数学是灿烂的人类文明的重要组成部分，有着非常悠久的历史.据文字记载，至少在5000年前，人类已开始有了数学活动.数学也和其他人类文明一样，最早发祥于世界的四大文明古国：巴比伦、埃及、中国和印度.就国外数学发展的源头而言，一般首推巴比伦数学与埃及数学.我们首先介绍古巴比伦的数学.

1.1 古巴比伦的数学

所谓古巴比伦数学，是指萌发于古代美索波达米亚的数学.美索波达米亚平原位于亚洲西部的幼发拉底与底格里斯两河流域，大体上相当于今天的伊拉克.公元前2000年左右，这里建立起了古巴比伦王国.在过去相当长的一段时间内，人们对于古巴比伦数学的认识是通过古希腊文化中的零星资料得到的.19世纪后期，考古学家开始发掘美索波达米亚遗址，它们是由过去长期存在过的城市的废墟所形成的土丘.其中的房屋几乎都是用未经烧制的土坯建造的.每次降雨后，房屋都要被冲毁一些，而新的房屋就造在同一地方，于是地面就逐渐升高，形成了现在的土丘.如果给一幅土丘的垂直剖面图，就可以发现，同一个城市按不同的时期分成不同的层次，最古老的处在最底层.在发掘的过程中，人们发现了数以万计的不同时期的泥板，它们是用胶泥制成的，一块完整的泥板与手掌的大小差不多.上面写有符号，这种符号是用断面呈三角形的尖棍在泥板还较软时刻上的，呈楔形，故人们称之为楔形文

字.经考证,这些泥板大多是在公元前 1 700 年前后制作的,其中大约有 400 片与数学内容有关的泥板,它们被许多国家的博物馆珍藏.经过专家们精心地复制与翻译,使我们能通过它们较为详细地了解到古巴比伦的数学概况.

1.1.1 古巴比伦的记数制与算术

古巴比伦人很早就有了数的写法,他们用楔形文字中较小的▼(竖写)代表 1,较大的▼(竖写)代表 60,较小的◢(横写)代表 10,较大的◢(横写)代表 100.借助于这些符号,巴比伦人表示自然数的符号如图 1—1 所示.

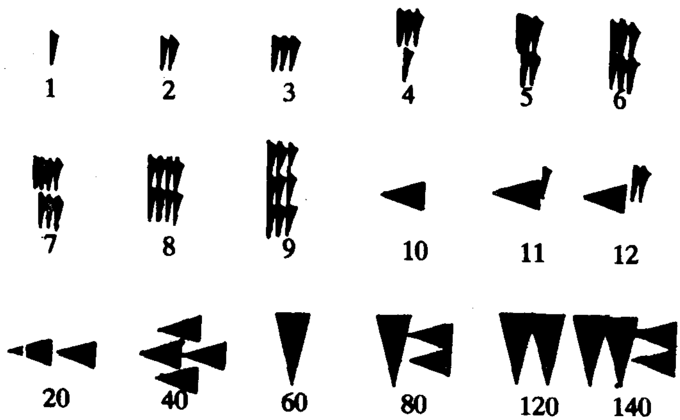


图 1—1

由此可知,古巴比伦人的记数系统是 60 进位制.他们为什么会以 60 为基数呢?研究者认为,这是由于 60 是 2,3,4,5,6,10,12,15,20,30 的倍数,在很大程度上可以使计算简化.但也有人认为,这是古巴比伦人天文学知识的直接产物.由于他们将一年分成 360 天,把圆周分成 360 等份,促使古巴比伦人建立起 60 进位制的记数法.不过,古巴比伦人所采用的是迭加数制,而不是位值数制.

古巴比伦人经常使用分数，他们又总是用 60 作为分母，例如作为分数来记时可以表示$\frac{20}{60}$，而作为分数来记时可以表示$\frac{21}{60}$或$\frac{20}{60}+\frac{1}{60^2}$，这是不太确定的，我们只能猜测. 显然，古巴比伦人的分数系统是不成熟的. 不过，对于$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$这几个特殊的分数，他们是有专门的记号的.

古巴比伦人的许多算术运算是借助于各种各样的表来进行的. 在已发现的泥板中，大约有 200 块是乘法表、倒数表、平方表、立方表，甚至还有指数表. 倒数表用于把除法转化为乘法进行，指数表可能是和插值法一起用来解决复利问题的. 例如有这样一个问题：设有本金为 1，利率为 20%，问需要多久即可使利息与本金相等. 这需要求解指数方程

$$(1+20\%)^x=2.$$

由指数表，古巴比伦人首先确定出 x 的取值范围是：

$$3<x<4.$$

然后使用一次插入法求出 4 与 x 的差，相当于现在这样的算法：

$$4-x=\frac{(1.2)^4-2}{(1.2)^4-(1.2)^3}\approx 0.21.$$

故得 $x\approx 4-0.21=3.79$(年).

1.1.2　古巴比伦的代数

古巴比伦数学的主要特征是它所具有的代数性质. 在公元前 2000 年前后，古巴比伦数学已演化成用文字叙述的代数学. 史实表明，他们解二次方程的方法相当于现在的公式法. 如英国大不列颠博物馆 13901 号泥板记载了这样一个问题：“我把我的正方形的面积加上正方形边长的三分之二得$\frac{35}{60}$，求该正方形的边长.”这个问题相当于求解方程

$$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{35}{60}.$$

该泥板上给出的解法是:1 的三分之二是$\frac{40}{60}$,其一半是$\frac{20}{60}$,将它自乘得$\frac{6}{60}+\frac{40}{60^2}$,并把它加到$\frac{35}{60}$上得$\frac{41}{60}+\frac{40}{60^2}$,其平方根是$\frac{50}{60}$,再从中减去$\frac{40}{60}$的一半得$\frac{30}{60}$,于是$\frac{1}{2}$就是正方形的边长. 这一解法相当于将方程 $x^2+px=q$ 的系数代入公式

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$$

求解,只是在计算时用 60 进位制. 又如:两个正方形的面积之和为 1000,其中一个正方形的边长为另一个正方形的边长的$\frac{2}{3}$减去 10,求这两个正方形的边长. 设较大的正方形的边长为 x,则另一正方形的边长为$\frac{2}{3}x-10$,故只需解二次方程

$$x^2+\left(\frac{2}{3}x-10\right)^2=1000.$$

古巴比伦人将这一解法所需的步骤简单地叙述为“平方 10,得 100;1000 减去 100,就得 900,开平方得 30”,求得该正方形的边长为 30,另一个边长为 10. 这就是说,古巴比伦人那时可能已经知道某些类型的一元二次方程的求根公式. 由于他们没有负数的概念,所以二次方程的负根他们不予考虑. 至于他们是如何得到上述这些解法的,泥板上没有具体说明,我们也就不得而知了.

他们还讨论了某些三次方程和双二次方程的解法. 在一块泥板上,他们给出这样的数表,它不仅包含了从 1 到 30 的整数的平方和立方,还包含这个范围内的整数组合 m^3+m^2,专家经研究认为,这个数表是用来解决形如 $x^3+x^2=b$ 的三次方程的.

在洛佛尔博物馆的一块泥板上还发现了两个级数问题,用现

代形式可表述为

$$1+2+2^2+\cdots+2^9=2^9+2^9-1;$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=(1\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{3})55=385.$$

古巴比伦人究竟是通过计算得到上述结果的,还是掌握了这些级数求和的技巧甚至公式,对于我们来说也还是一个谜.

古巴比伦人还对非完全平方数的平方根给出了一些有趣的近似值,如$\sqrt{2}\approx\frac{17}{12}$,$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{17}{24}$.在耶鲁第7289号泥板上还发现了$\sqrt{2}$的非常值得注意的近似值

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.4142155.$$

特别令人感兴趣的是哥伦比亚大学普林顿收集馆中收藏的第322号泥板,该泥板已缺损了一部分,在残留的部分上刻有三列数,专家研究认为:这是一张勾股数(即$x^2+y^2=z^2$的整数解)表,并且极有可能是用下列参数式

$$x=2uv,\quad y=u^2-v^2,\quad z=u^2+v^2$$

求得的.而这是在一千多年以后古希腊数学中一个极为重要的成就.

1.1.3 古巴比伦的几何

在古巴比伦人的心目中,几何是不重要的,因为实际中的几何问题都很容易转化为代数问题.他们的面积和体积计算是按照一些固定的法则和公式给出的.这从许多具体例子可以看到.例如古巴比伦人在公元前2000年到公元前1600年,就已熟悉了长方形、直角三角形、等腰三角形以及直角梯形面积的计算.他们还掌握了长方体,以及特殊梯形为底的直棱柱体积计算的一般规则,他们知道取直径的三倍为圆周的长,取圆周平方的$\frac{1}{12}$为圆的面积,还用底和高相乘求得直圆柱的体积.在泥板中有足够的证据表明,古巴

比伦人还有把相当复杂的图形拆成一些简单图形的组合的本领.但他们错误地认为,圆台或方棱台的体积是两底之和的一半与高的乘积.这一事实表明,古巴比伦的计算方法还是经验型的,这些结果都没有严格的证明.

1.1.4 古巴比伦的天文学

在公元前5000年到公元前4000年间,古巴比伦人已开始使用年、月、日的天文历法,他们的年历是从春分开始的,一年有12个月,第一个月是以“金牛座”命名的,每月有30天,并且每6年加上第13个月作为闰月.一个星期有7天,这7天是以太阳、月亮和金、木、水、火、土七星来命名的,每个星神主管一天,如太阳神主管星期日.因此,所谓“星期”也就是指星的日期,我们现在的“星期制”就是古巴比伦时代所创立的.此外,圆周分为360度,每度60分,每分60秒,1小时60分,1分60秒的记法,也来自古巴比伦.

1.2 古埃及的数学

古埃及的位置与现在埃及的地理位置区别不大,位于世界上最长的河流之一——非洲的尼罗河中下游的谷地.早在公元前3000年左右,在这块土地上就已经形成了早期奴隶制国家.打猎、渔业及畜牧业是古埃及人最初的谋生方式.一年一度的尼罗河的洪水给这片谷地带来了肥沃的淤泥,那些以游牧为生的古埃及人便开始在这里定居下来,转向以耕种为主.在发展农业的同时,手工业与贸易也随之迅速发展起来,这些都促进了自然科学各学科知识的积累.例如,对尼罗河洪水规律性的研究,使埃及人很早就有了季节的概念.为了准确地预报尼罗河洪水泛滥的时间,他们通过对天体运动的观察,发现每逢天狼星清晨升起的时候,也正是尼罗河水开始上涨的时候.因此,他们把天狼星的两个清晨升起的间隔当作一年,它包含365天.他们还把一年分成12个月,每个月30个昼夜,在每一年末增加5天,用来过年节.

据考证,这一时期古埃及的科学文化技术(包括数学)有了很大的发展.在这一时期建立的金字塔、人面狮身像和神庙以及宫殿都是埃及古老文明的标志.以位于开罗附近吉萨省的胡夫金字塔为例,这座埃及最大的金字塔建于公元前2100年左右,是当时埃及法老胡夫的陵墓.该金字塔呈正四棱锥形,底面正方形面向东西南北四个正方向,边长230.5m,塔高146.6m,是1848年美国华盛顿纪念碑(高169m)建成之前世界上最高的建筑物.近年来,科学家们使用精密的仪器对这一金字塔进行了测量,惊奇地发现,其底基正方形边长的相对误差不超过1:14000,四底角的相对误差不超过1:27000,即不超过12",四个方向的误差也仅在2'~5'之间,这些都说明当时的测量水平已相当高.又如他们所建的神庙,能使得每年在确定的那几天里,太阳光正好透过特意在屋 面上留出的小孔,直接射到神像的脸上.

古埃及人在建造了神奇的金字塔、神庙和宫殿的同时,也创立了相当发达的数学.从公元前3000年起,古埃及人开始有了他们的象形文字,其中最具代表性的是僧侣们所使用的僧侣文(又称祭司文).流传至今的古埃及文献,大部分是以这种僧侣文书写在纸草上保存下来的.这种纸草是用尼罗河的水草晒干制成的,保存至今的有关数学的纸草书主要有两种:一种是陈列于英国伦敦大不列颠博物馆东方展室中的兰德纸草书,这是由英国人兰德(H. Rhind)1858年搜集到的;另一种收藏于俄国莫斯科美术博物馆,被称为莫斯科纸草书,这是由俄罗斯人郭列尼舍夫于1893年搜集到的.这两份纸草书都是公元前2000年前后的作品,为古埃及人记录一些数学问题的问题集.兰德纸草书长544cm,宽33cm,共载有85个问题,莫斯科纸草书长544cm,宽8cm,共载有25个问题.学者们从这些纸草书以及其他保留至今的历史文献中了解到古埃及人的数学.

1.2.1 古埃及的记数制与算术

从前面所述的历史文献中我们知道,古埃及人使用的是十进记数制,并且有数字的专门符号(见图 1—2).

1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000

图 1—2

在一个数中出现某单位的若干倍时,就将它的符号重复写若干次,即遵守加法的法则.显然,古埃及人的计数系统是进位制而不是位值制.古埃及人已有了分数的概念,但他们仅使用单位分数也就是分子为1的分数,表示整体的若干等份中的一份.只有$\frac{2}{3}$是一个例外.他们还会将不是单位分数的分数化为单位分数的和,但这种化法是不唯一的,如$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$.

古埃及人不仅用符号来表示数,而且还使用某些运算符号.例如他们用形如人的脚的符号,从右向左表示加法,从左向右表示减法,两个量的差用三个水平的箭头表示,猫头鹰的形象则被用来表示相等.

古埃及人的乘法运算与除法运算都是通过迭加来进行的。例如计算 26×33,他们先将 33 的倍数列表(如表 1—1),然后从左边一列中选取出和为 26 的 2,8 和 16,再将右边一列中它们各自对应的数相加,即将 66,264,528 相加得到 856 即为所求.又如 19÷8,他们是将 8 的倍数与部分列表(如表 1—2),再从右边一列中选取出其和为 19 的

表 1—1

n	33n
1	33
*2	66
4	132
*8	264
*16	528

表 1—2

α	8α
1	8
2	16*
1/2	4
1/4	2*
1/8	1*