面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

离散数学

（第二版）

李盘林　李丽双　赵铭伟
李　洋　王春立　编著

高等教育出版社

面 向 21 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

离 散 数 学

（第二版）

李盘林 李丽双 赵铭伟 李 洋 王春立 编著

高等教育出版社

内容提要

本书第一版为面向21世纪课程教材和普通高等教育“九五”国家教委重点教材，曾获2002年教育部全国普通高等学校优秀教材二等奖。

为适应计算机科学与技术的发展和离散数学课程教学改革的需求，新版教材在保持第一版编写特色的基础上，对前版内容进行了必要的充实与更新，对不妥之处进行了修正。增加了离散数学部分新的理论及应用，涵盖了国务院学位委员会办公室公布的“同等学力人员申请硕士学位计算机科学与技术学科综合水平全国统一考试大纲及指南”的相关内容，填补了相关教材的空缺，进一步扩大了读者的需求面。

与本书配套使用的《离散数学提要及习题参考解答》第二版也将随之面世，供读者参阅；电子教案的PowerPoint 文件可从高等教育出版社高等理工教学资源网上下载，网址为：http://www.hep-st.com.cn。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 /李盘林等编著. —2 版. —北京：高等教育出版社，2005.11

ISBN 7-04-017379-4

Ⅰ. 离… Ⅱ. 李… Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 076895 号

策划编辑 倪文慧 **责任编辑** 姚 晖 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 宗小梅
版式设计 马静如 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		
		版　　次	1999 年 6 月第 1 版
开　　本	787 × 1092　1/16		2005 年 11 月第 2 版
印　　张	25	**印　　次**	2005 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	540 000	**定　　价**	27.00 元

物料号 17379-00

第二版前言

本书第一版是面向21世纪课程教材和普通高等教育“九五”国家教委重点教材，并于2002年获教育部全国普通高等学校优秀教材二等奖。

本书第一版发行以来，受到广大师生的认可。但是，随着计算机科学与技术的发展和应用的普及，以及我国高等教育的发展和教学改革的深入，对计算机科学与技术学科以及相关专业的理论基础的数学教学格局做适当的调整是非常必要的，减少连续数学教学学时，增加离散数学教学学时，并且能在本科生和研究生两个层面都讲授离散数学，那么高等院校，特别是进入211工程的院校培养出来的学生必将会具有较雄厚和扎实的理论基础。作为从事IT业的技术人员，理解和掌握离散数学的精髓，将长期，甚至终身受益。因此，对第一版的内容适时地做了必要的充实与更新，对不妥之处进行了修正。第二版除了保持第一版的特色外，还做到了:

（1）增加新理论及应用，其中包括计数、算法和离散概率等，使离散教学内容在一本书中有了更好的体现。知识更加完备，因而增大了教师选讲和学生自主选学的自由度，进一步调动师生的主动性，适应和满足了深入教学改革的需要。

（2）涵盖了国务院学位委员会办公室公布的“同等学力人员申请硕士学位计算机科学与技术学科综合水平全国统一考试大纲及指南”的离散数学部分，至今尚未见到此类书问世，第二版的发行填补了这一空缺。

（3）为了便于有的教师使用PowerPoint进行讲课，按Microsoft Office的字符集规范了书中几乎所有的符号。

（4）修正了第一版不妥之处。

（5）由于《离散数学》第二版发行，相应的《离散数学提要及习题参考解答》第二版也将随之面世，对于新增加的章节给出了提要及习题参考解答，供读者参阅。

（6）将第一版中附录部分的习题参考解答省略，并已将此部分加入到《离散数学提要及习题参考解答》相应部分。

最后，向关心、支持本书的广大读者深表谢意！向高等教育出版社有关领导及编辑所给予的帮助表示感谢！向我校教务处有关领导所给予的支持和帮助表示感谢！感谢张华工程师在整理文稿中所做的大量工作！感谢我的家人所给予的关心和支持！

限于水平，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请读者指正。

编　者

于大连理工大学

2005年6月

第一版前言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学与技术的理论基础，所以又称为计算机数学。

人们已公认，高科技本质上是数学，因此可以说，计算机科学说到底是离散数学。事实上，从计算机产生到以后它的每一步发展都离不开数学，1936年，英国数学家图灵（A.M.Turing）发表了著名论文“理想计算机”，从而给出了计算机设计的理论模型。1946年在著名数学家冯·诺依曼（J.vonNeumann）的领导下，制造了世界上第一台计算机 ENIAC（Electronic Numerical Integrator and Computer）。

离散数学是计算机科学与技术专业的核心、骨干课程。一方面，它给后继课，如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理和人工智能等提供必要的数学基础；另一方面，通过学习离散数学，培养和提高了学生的抽象思维和逻辑推理能力，为学生今后继续学习和工作，参加科学研究，攀登科技高峰，打下坚实的数学基础。

离散数学内容很多，本书主要有5部分：数理逻辑、集合论、数论、代数结构和图论。本书是编著者在多年教学实践的基础上，参考了国内外多种教材，并结合自己一些科研成果，在力求通俗、流畅、简明、扼要的指导思想下编写而成。

本书在编写过程中有几点考虑，说明如下：

（1）本书除讲述离散数学最基本的、比较典型的传统内容外，增添了数论基础知识，以便为学习和理解密码理论打下基础。

（2）在编写过程中，力图做到“少而精”，注意突出重点，力求论证详细明了，便于自学，在基本定理的证明中，反复运用归纳法，希望读者不但了解定理内容，同时应该掌握这一证明方法。

（3）全书涉及数学5个分支，每一个分支都有数百字的说明，概述了它的发展，这对于掌握其内容是十分有益的。

（4）在加强基本理论教学的同时，注意了分析问题、解决问题的技能培养和训练。书中各部分内容均配有典型例子，并加以说明。此外，各章都配有适量的习题，希望通过做习题这个环节，来培养、提高学生解决问题的能力和技能。

（5）书中的5部分，一方面各自成篇，教师根据需要可以单独选讲几篇；另一方面，尽可能注意各篇之间的联系，规范并统一了符号和术语。

（6）在内容安排上，既考虑到大纲中关于学时的要求，又不完全受其限制，书中有些章节是供选讲的。有些重要定理的证明偏难又冗长，讲或不讲由任课教师酌定。

书末附有七、八两章习题的部分解答，供读者参考。

上海交通大学左孝凌教授、上海大学刘永才教授仔细审阅了全稿，提出了许多宝贵意见，张华女士在文稿整理中做了大量工作，对此编者表示诚挚的谢意。

限于作者水平，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编　　者

1998年10月

目　　录

第一篇　数理逻辑

第二篇　集　合　论

第三篇 计 数

第四篇 数论与算法

第五篇 代 数 结 构

第六篇　图　论

第一篇　数 理 逻 辑

研究人的思维形式和规律的科学，称为逻辑学．由于研究的对象和方法各有侧重而又分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑．

数理逻辑是用数学方法研究推理，是研究推理中前提和结论之间的形式关系的科学．所谓推理就是由一个或几个判断推出一个新判断的思维形式．这里所说的数学方法就是建立一套表意符号体系，对具体事物进行抽象的形式研究的方法．因此，数理逻辑又称符号逻辑．这种方法的优点是表达简洁、推理方便、概括性好、易于分析等．

一般认为，数理逻辑是由德国数学家兼哲学家莱布尼茨(G.W. Leibnitz)在 17 世纪中叶创立的．其后由英国数学家布尔(G. Boole)于 1847 年出版的《逻辑的数学分析》一书发展了逻辑代数，即通常称为布尔代数．还有德国数学家弗雷格(F.L.G. Frege)于 1879 年出版了《表意符号》，引入了量词、约束变元，使逻辑演算趋于完备．1930 年出生于奥地利的美籍数学家哥德尔(K. Gödel)的完全性定理证明，使数理逻辑的基础得到完善．意大利数学家佩亚诺(G. Peano)、英国数学家德摩根(A. De Morgan)、罗素(B.A.W.Russell)等人都做了很大贡献，丰富和发展了数理逻辑．

本篇仅介绍计算机科学领域中所必需的数理逻辑基础知识：命题逻辑和谓词逻辑．

第 1 章　命 题 逻 辑

命题逻辑，也称命题演算或语句演算，它研究由命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系．那么，什么是命题？如何表示和构成？如何推理？下面逐一地进行讨论．

1.1　命题与联结词

1.1.1　命题的概念

所谓命题，是指具有真假意义的陈述句．也就是说能够确定或能够分辨其真假的陈述句，且真或假二者必居其一，也只居其一．简言之，非真必假的陈述句．

例 1.1.1　① 你听懂了吗？

② 这真开心！

③ 请止步！

④ 我是学生．

⑤ 6 不是自然数．

①、②和③不是命题，因为它们分别是疑问句、感叹句和祈使句；④和⑤是命题．

像④和⑤那样一些不能分解为更简单的陈述句所构成的命题，称为原子命题．

一个命题的真或假称为命题的真值，简称值，真用 T 或 1 表示；假用 F 或 0 表示．

由于命题只有真、假二个真值，所以命题逻辑也称二值逻辑．

应该注意，一个陈述句能否分辨其真假，与是否现在能判断它是真还是假，是两件事．

例 1.1.2　张校长的头发有一万根．

这句话，虽不能马上分辨其真假，但是只要认真地去数一数，还是可以知道的．

在判断一个句子是否为命题时，从语法上就是看它是否为陈述句．但值得注意的是，那些“自指谓”的陈述句，不在其列．因为这种自指谓的句子，往往产生自相矛盾的结论．所说“自指谓”是指其结论是对自身而言．

例 1.1.3　我所说的是假的．

显然，这个句子从表面上看，当它假时，它便真；当它真时，它便假．

还应说明一点，命题的真值会因人、因时、因地而异．

例 1.1.4　① 人有五指．

② 中国即将迎来 2008 年夏季奥林匹克运动会．

③ 现在是六点钟.

① 对一般人来说是真，而对于有的个别人却是假.

② 在 2008 年之前为真；2008 年后是假.

③ 对于北京时间可能是真，而对于美国时间便是假.

因此，在数理逻辑中，不能去纠缠各种具体命题的真假问题，而是将命题当成数学概念来处理，看成一个抽象的、形式化的概念，把命题定义成非真必假的陈述句.

此时所关心的并不仅仅是这些陈述句究竟是真还是假，更关心的是它可以被赋予真或假的可能性，以便被规定真值后它与其他命题发生的联系.

1.1.2 命题标识符

在科学领域中，每门科学为描述它的概念和论证其有关定理都拥有自己的语言符号以及所使用的规则.

在命题逻辑中，采用的是一种形式语言. 形式语言与我们通常使用的自然语言不同，它是由特定意义的符号和规则组成，其特征是有确定的含义.

一个原子命题，一般用大写字母或带下标的大写字母，如 P，Q，R，…或 P_i，Q_i，R_i，…表示，把表示原子命题的符号，称为命题标识符，简称命题符.

例 1.1.5 P：北京是中国的首都. 其中"："代表表示的意思，下同.

一个命题标识符 P，如果表示一个确定的命题，则称 P 为原子命题常元，简称命题常元；若 P 只表示任意命题的位置标志，或表示不确定的命题，或以原子命题为值的变元 P，就称 P 为原子命题变元，简称命题变元. 可见，命题变元是以命题的真值为值的变元. 显然，命题变元不是命题. 将一个命题变元 P 用一特定命题或真值去代替，它才能确定真值，这叫做对 P 的指派，或解释，记为 $S(P)$或 $I(P)$.

1.1.3 联结词

联结词是逻辑联结词或命题联结词的简称，它是自然语言中连词的逻辑抽象. 有了联结词，便可以用它和原子命题构成复合命题. 常用联结词有以下五种. 定义如下：

(1) 否定联结词——$\neg$

设 P 是一个命题，由联结词 $\neg$ 和命题 P 构成 $\neg P$，$\neg P$ 为命题 P 的否定式复合命题. $\neg P$ 读"非 P".

复合命题 $\neg P$ 的值由命题 P 的真值来确定. 若 P 为 T，则 $\neg P$ 为 F；若 P 为 F，则 $\neg P$ 为 T. $\neg P$ 的真值可列表表示如下：

P	$\neg P$
T	F
F	T

联结词$\neg$是自然语言中的"非"、"不"和"没有"等的逻辑抽象．有时也将否定联结词记为"$'$"．

例 1.1.6 设 P：大连是北方香港，则$\neg P$ 表示大连不是北方香港，或者大连并非是北方香港．

(2) 合取联结词——$\wedge$

令 P 和 Q 是两个命题，由联结词$\wedge$把 P，Q 连接成 $P\wedge Q$，称 $P\wedge Q$ 为 P 和 Q 的合取式复合命题，$P\wedge Q$ 读做"P 与 Q"，或"P 合取 Q"．

$P\wedge Q$ 的真值由 P，Q 的值确定．若 P 为 T，Q 为 T，则 $P\wedge Q$ 为 T；否则 $P\wedge Q$ 为 F．$P\wedge Q$ 的真值可列表表示如下：

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

联结词$\wedge$是自然语言中的"并且"，"既…又…"等的逻辑抽象．

例 1.1.7 设 P：张明学习好，Q：张明工作好，则由 $P\wedge Q$ 表示张明既学习好又工作好．

如果又设 Q：$1+1=3$，则 $P\wedge Q$ 表示张明学习好并且 $1+1=3$．从自然语言看，这是不合理的，但在命题逻辑中是允许的，也是正确的．

合取联结词$\wedge$具有对称性，即 $P\wedge Q$ 和 $Q\wedge P$ 具有相同的真值．

(3) 析取联结词——$\vee$

设 P 和 Q 是两个命题，由联结词$\vee$把 P，Q 连接成 $P\vee Q$，称 $P\vee Q$ 为 P，Q 的析取式复合命题，$P\vee Q$ 读做"P 或 Q"．

联结词$\vee$是自然语言中的"或"，"或者"的逻辑抽象，而在自然语言中，"或"是多义的，这可列表说明如下：

或的含义	例		说　明
联结词	可兼或	$a\times b=0$ 即 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $a=b=0$	二者至少有一个发生，不排斥二者发生的情况
	排斥或	他的死或重于泰山或轻于鸿毛	非此即彼，不可兼得
非联结词	表示近似数的或	去主楼需 6 分钟或 8 分钟	近似数"6 至 8 分钟"

析取联结词是表示可兼或．据此可知，复合命题 $P\vee Q$ 的真值，当且仅当 P，Q 同为 F，$P\vee Q$ 才为 F；否则 $P\vee Q$ 为 T．可列表为：

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

因此，在遇到含有“或”的意思的语句，要分清它是否为可兼或.

例 1.1.8 如果可能的话，将下列语句表示为复合命题.

① 张明正在睡觉或游泳.

② 李强是位排球队员或是足球队员.

③ 他昨晚做了二十或三十道题.

解 ②可以表示为析取式复合命题 $P\vee Q$，其中 P：李强是位排球队员，Q：李强是位足球队员.

①的表示要麻烦些，若引入“排斥或”联结词将会简单.

③不能表示，因为这里的“或”是近似的意思.

与联结词$\wedge$类似，在自然语言中，通常是在具有某种关系的两语句之间使用析取“或”，但在命题逻辑中，并不要求这一点.

例 1.1.9 二二得四或者北京是中国的首都.

这也是可接受的，它是使用$\vee$且具有真值为真的复合命题.

(4) 条件联结词——$\rightarrow$

设 P 和 Q 是两个命题，由联结词$\rightarrow$把 P，Q 连接成 $P\rightarrow Q$，称 $P\rightarrow Q$ 为 P 和 Q 的条件式复合命题，把 P 和 Q 分别称为 $P\rightarrow Q$ 的前件和后件，或者前提和结论. $P\rightarrow Q$ 读做“如果 P，则 Q”或“P 条件 Q”.

有些书也将条件联结词称为蕴含，但本书“蕴含”另有所用.

$P\rightarrow Q$ 的真值由 P 和 Q 的值确定：当 P 为 T，Q 为 F 时，$P\rightarrow Q$ 为 F；否则 $P\rightarrow Q$ 为 T. 这可列表如下：

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例 1.1.10 如果我有时间，那么我一定认真读书.

本例可用条件式命题 $P\rightarrow Q$ 表示，其中 P：我有时间，Q：我一定认真读书.

联结词$\rightarrow$是自然语言中“如果……则……”，“若……才能……”等的逻辑抽象.

在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断. 但在命题逻

辑中，当 P 为 F，$P \to Q$ 为 T，称为“善意推定”.

例 1.1.11　命题“如果天下雨，则马路湿”可表示为 $P \to Q$，其中 P：天下雨，Q：马路湿. 下面，讨论本例的真值，以说明关于它的真值的规定是有一定道理的.

①“如果天下雨，则马路湿”值为真，即若 P 真，Q 真，则 $P \to Q$ 为真.

②“如果天下雨，则马路不湿”显然假，即若 P 真，Q 假，则 $P \to Q$ 假.

③“如果天不下雨，则马路湿”可能为真，即 P 假，Q 真，则 $P \to Q$ 真，是善意推定.

④“如果天不下雨，那么马路也不湿”可能为真，即 P 假，Q 假，则 $P \to Q$ 真.

这里，要特别提一下“$\to$”的含义. 在自然语言中，条件式中前提和结论间必含有某种因果关系，但在命题逻辑中可以允许两者无必然因果关系，也就是说并不要求前件和后件间有什么联系.

例 1.1.12　如果 $2+2=4$，则雪是黑的. 这可表示为 $P \to Q$，其中 P：$2+2=4$，Q：雪是黑的. 因为 P 真，Q 假，则 $P \to Q$ 为假.

(5) 双条件联结词——$\leftrightarrows$

令 P 和 Q 是两个命题，由联结词 $\leftrightarrows$ 把 P，Q 连接成 $P \leftrightarrows Q$，称 $P \leftrightarrows Q$ 为 P 和 Q 的双条件式复合命题，$P \leftrightarrows Q$ 读做“P 当且仅当 Q”，其真值由 P 和 Q 的值确定，具体可表示为：

P	Q	$P \leftrightarrows Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

双条件联结词 $\leftrightarrows$ 又常称为同或，并用符号 $\odot$ 表示. 为简便计，也可用 $\leftrightarrow$ 表示.

例 1.1.13　三角形是等边三角形当且仅当三角形之三个内角相等.

本例可表示成双条件式复合命题.

双条件联结词 $\leftrightarrows$ 是自然语言中的“充分必要条件”、“当且仅当”等的逻辑抽象，与上面定义的 $\wedge$，$\vee$ 和 $\to$ 一样，构成双条件式命题 $P \leftrightarrows Q$ 也不要求 P 和 Q 两个命题之间有任何联系，$P \leftrightarrows Q$ 的真值，仅与 P 和 Q 的真值有关. 请看下面例题.

例 1.1.14　$2+2=4$ 当且仅当太阳是恒星.

本例是具有真值为真的双条件式命题 $P \leftrightarrows Q$，其中 P：$2+2=4$，Q：太阳是恒星.

再强调如下几点：

① 复合命题的真值只取决于构成它们的各原子命题的真值，而与它们的内容、含义无关，与联结词所连接的两原子命题之间是否有关系无关.

② $\wedge$，$\vee$ 和 $\leftrightarrows$ 具有对称性，而 $\neg$，$\to$ 没有.

③ 联结词都有从已知命题得到新的命题的作用，从这个意义上讲，它们具有操作或运算的意义. 可见，它们可以被看做是一、二元运算，或一、二元函数.

④ 关于→，⇆的其他说法，如蕴涵、等价等，后面有他用.

1.1.4 命题的分类

从上可知，命题分两类：一类是原子命题；另一类是复合命题，它是由原子命题和联结词复合而成. 判断一个命题是否为复合命题，其关键是联结词是否出现？出现，则是复合命题；不出现，则是原子命题.

1.2 命题公式、翻译和真值表

1.2.1 命题公式

前面讲了联结词、原子命题变元. 再加上圆括号“(”、“)”，便可以进行有限次的连接，得到许多字符串，这些字符串是否都有意义呢？即对其中命题变元作指派后，它们是否都有确定的真值？答案为否，那些有意义的字符串，称为命题逻辑中的合式公式， 简称命题公式或公式. 如何连接才能得到合式公式，这就需要给出一定的规则.

首先，定义原子命题公式如下：

定义 1.2.1 命题常元，命题变元，统称为原子命题公式，简称原子公式.

其次，使用递归来定义命题逻辑中的合式公式. 所谓递归是指利用自己定义自己的方式来定义或表述函数、过程、语言构造或问题求解的方法. 其好处是：有时用明确方式定义一个对象常常是困难的，然而使用递归会使问题迎刃而解，表述简明. 本书中多处使用了递归方法.

定义 1.2.2 合式公式是由下列规则形成的字符串：

① 真值 T 和 F 是合式公式.

② 原子命题公式是一个合式公式.

③ 若 A 是合式公式，则$(\neg A)$是合式公式.

④ 若 A 和 B 是合式公式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrows B)$都是合式公式.

⑤ 经过有限次地使用①、②、③所得到的结果，都是合式公式.

由定义可知，合式公式无限多.

需要指出的是，这里 A 和 B 是元语言符号，它是以对象语言中的合式公式为值的变元，表示任意的合式公式. 所谓元语言是指用来描述对象语言的语言，对象语言是指描述所研究对象的语言，这里是命题逻辑.

为叙述方便，也分别称$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrows B)$为合取式，析取式，条件式和双条件式；称 A，B 分别为$(A\wedge B)$和$(A\vee B)$的合取项和析取项.

例 1.2.1 $(\neg P)\vee Q$，$(P\rightarrow(Q\wedge R))$都是合式公式，而$(P\rightarrow Q$，$(P\rightarrow Q)\leftrightarrows(\wedge R)$都不是合式公式.

为方便计，对于圆括号的使用和联结词的优先级做如下约定：

① 公式最外层的圆括号可省略，如把$(P\rightarrow(Q\vee R))$写成 $P\rightarrow(Q\vee R)$.