

MSC SOFTWARE
SIMULATING REALITY

数码工程师系列丛书

MSC.Nastran

有限元分析理论 基础与应用

张永昌 编著



科学出版社
www.sciencep.com

数码工程师系列丛书

MSC.Nastran 有限元分析 理论基础与应用

张永昌 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书讲述了 MSC. Nastran 理论, 详细描述了程序基本模块的功能, 并对不同模型建立的方法、优点和局限性, 以及分析结果的正确与否进行了评述。书中还提供了与其理论相对照的多种考题及相应内容的例题, 以期读者能正确使用有限元分析工具。

书中内容包含了 MSC. Nastran 的质点、弹簧、杆、曲梁、弯管、偏置梁、组合梁、板、曲壳、四面体、五面体、六面体的质量矩阵、刚度矩阵、旋转对称矩阵、热传导矩阵的理论论述, 单元刚度自锁的分析及处理, 形状敏感度分析等; 也包含了在 MSC. Patran 界面下的 MPC 和 PCL 的使用方法, 场和组的使用方法, 几何建模、网格划分、定义载荷和边界条件、定义材料属性、定义单元属性的过程, 以及线性静力、非线性静力、模态、线性屈曲、非线性屈曲、稳态热分析、热应力等分析过程, 后处理的使用方法等。考题和例题都附有理论解和有限元解的对照, 或标准解和有限元解的对照及简要评述, 所有考题和例题都给出了 MSC. Patran 的详细命令流。

本书适合于航空、航天、土木、机械、车辆、船舶等专业的大学生、研究生、工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

MSC. Nastran 有限元分析理论基础与应用/张永昌编著. —北京: 科学出版社, 2004

(数码工程师系列丛书)

ISBN 7-03-013614-4

I. M… II. 张… III. 有限元分析-应用软件, MSC. Nastran
IV. O241.82-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 053776 号

责任编辑: 吕建忠 韩 洁/责任校对: 耿 耘

责任印制: 吕春珉/封面设计: 飞天创意

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年11月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2004年11月第一次印刷 印张: 32 3/4

印数: 1—4 000 字数: 750 000

定价: 66.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(环伟))

前 言

Nastran 是美国国家航空航天局, 又称美国宇航局, 为适应各种工程分析问题而发展的多用途的有限元分析程序。Nastran 程序最早在 1969 年通过 COSMIC 对外发行, 一般称为 COSMIC. Nastran。之后又有各种版本的 Nastran 程序发行, 其中以 MSC 公司所发展的 MSC. Nastran 程序用户最为广泛。如今 MSC. Nastran 已成为标准版的 Nastran, 全球应用最广泛的分析程序之一。

商业版的 MSC. Nastran 已进入我国十多年, 现根据 MSC. Nastran 的最新技术文档, 如 Richard H. MacNeal 的《Finite Elements: Their Design and Performance》(1994), Harry G. Schaeffer 的《MSC. Nastran Primer for Linear Analysis》(Second Edition 2001) 以及相关的书籍和文献以图书的形式向读者介绍 MSC. Nastran 基本内容。

正确使用有限元分析程序, 至今仍然是分析工程师要认真对待的问题。首先要求分析工程师有坚实的力学基础, 透彻了解典型问题的理论解; 其次, 要深入了解有限元的理论; 离散的理论基础, 解的稳定性、可靠性和有效性; 能通过已有考题或自行设定考题检查模型的正确性; 对工程问题的力学本质能准确地抽象或概括; 对需要解决的问题要反复论证; 对大多数工程问题, 要有可靠的实验数据; 勤于查阅相关文献, 吸取他人的经验; 对分析程序能熟练的驾驭; 对分析的结果要准确判断正误; 随时修正已有模型, 最终给出准确的分析报告; 对所接受的设计工程师提供的几何模型, 大都要进行简化和修改, 有时还要分析工程师自己建立几何模型。以上的诸多要求是保证准确迅速地获取分析结果的条件。

本书的目的是介绍 MSC. Nastran 的基础。第一章介绍 MSC. Nastran 的概貌; 第二章介绍 MSC. Nastran 的前后处理程序 MSC. Patran, 给出环形板、悬臂梁、内压球壳、受内压圆筒径向接管结构静态分析及加筋板动态分析的分析过程, 包括完整的命令流和精度比较, 或分析结果的校正, 以便读者直接操作 MSC. Nastran/MSC. Patran; 第三章介绍工程力学的基本关系, 包括平面问题、梁理论、板壳理论及典型问题的解, 以方便读者把有限元解和理论解进行对照; 第四章介绍变分原理及近似理论; 第五章介绍有限单元公式, 包括单元刚度(铁摩辛柯梁、平面问题、板、壳、三维实体等)的建立, 单元刚度自锁的分析及处理, 形状敏感度分析等; 第六章介绍 MSC. Nastran 中的结构单元, 包括两节点线弹簧单元、一维弹性杆单元、等截面弯曲梁单元、变截面弯曲梁单元、曲线梁单元、四节点平面二次壳单元、八节点曲面壳单元、三节点三角形壳单元或三节点三角形轴对称单元、四节点剪切板单元、六节点曲面壳单元或六节点轴对称单元、八节点(HEX4)和二十节点(HEX20)六面体单元、四节点(TET4)和十节点(TET10)四面体单元、六节点(WEDGE6)和十五节点(WEDGE15)的五面体单元; 第七章介绍总体分析过程, 包括总体坐标、局部坐标、单元刚度矩阵转换、内部外部自由度、位移集、多点约束 MPC、单点约束 SPC、静态凝聚 OMIT 和 ASET、自由体支持 SUPORT、柔度到刚度的变换等; 第八章介绍有限单元的精度与性能, 建议读者按照该章的考题细心做一遍, 深入了解各单元的特性, 以便正确

使用单元;第九章介绍刚性单元和约束单元;第十章介绍材料属性;第十一章介绍外载荷;第十二章介绍静力分析;第十三章介绍用超单元模拟部件;第十四章介绍对称和循环对称;第十五章介绍正规模态分析;第十六章介绍微分刚度,线性屈曲分析和非线性屈曲分析;第十七章介绍热传导分析。

在各章中所附例题,有理论解和有限元解的对照,或标准解和有限元解的对照及简要的评述,完整的 MSC. Patran 命令流,以便引导读者熟练掌握 MSC. Nastran/MSC. Patran 系统。

有关 MSC. Nastra/MSC. Patran 的所有资料及软件均由 MSC. Software 公司北京办事处提供,并得到中国区总经理李军毅,技术部经理钱纯,及陈火红、孙长任、石可重、周传月的大力支持,作者在此深表谢意。

书中难免存在缺欠和谬误之处,敬请读者不吝批评指正。

作 者

2003年12月

目 录

第一章 绪论	1
1.1 Nastran 程序的历史	1
1.2 MSC.Nastran 程序的组织构架	2
1.3 MSC.Nastran 程序的参考文献	3
1.4 MSC.Nastran 前后处理软件 MSC.Patran	4
1.5 有限元模型的建立	4
1.6 有限元模型的处理	5
1.7 MSC.Nastran 的分析功能	5
1.8 MSC.Nastran 的输入文件	6
1.9 MSC.Nastran 初步	7
1.10 模型数据	8
1.10.1 自由格式模型数据	8
1.10.2 列的复制和生成	8
1.10.3 面向结构的模型数据汇总	9
1.10.4 数据选择	12
1.10.5 载荷选择	12
1.10.6 温度场选择	12
1.10.7 约束选择	13
1.10.8 特征值解法说明	13
1.10.9 微分刚度解	13
1.10.10 输出控制	13
1.10.11 标题命令	14
1.10.12 输出行控制	14
1.10.13 模型数据打印选择	14
1.10.14 集说明	14
1.10.15 单元输出要求	14
1.10.16 节点和标量点要求	14
1.10.17 子工况	15
1.10.18 工况控制例题	18
1.11 执行控制	20
1.11.1 求解序列	20
1.11.2 指定 MSC.Nastran 执行时间	20
1.11.3 诊断打印要求	20
1.11.4 DMAP 编译控制	21

1.11.5	执行控制结束	21
1.11.6	执行控制例题	21
1.12	杆系结构例题	22
1.12.1	文件的构成	23
1.12.2	输入文件	23
1.12.3	杆系简图	24
1.12.4	MSC. Nastran 的运行	24
1.12.5	F06 文件检查	24
第二章	MSC. Patran 开发环境	26
2.1	智能环境	26
2.2	正确使用有限元分析工具	26
2.3	环形板实例	26
2.3.1	第一次分析	28
2.3.2	第二次分析	36
2.3.3	第三次分析	39
2.3.4	第四次分析	40
2.3.5	第五次分析	44
2.3.6	第六次分析	45
2.3.7	总结分析结果	46
2.4	悬臂梁实例	46
2.4.1	梁单元计算结果	47
2.4.2	实体单元计算结果	50
2.5	内压厚壁球壳	53
2.5.1	轴对称 TRIA6 单元计算结果	53
2.5.2	实体 HEX8 单元计算结果	56
2.5.3	实体 HEX20 单元计算结果	58
2.5.4	实体 WEIGJE15 单元计算结果	60
2.6	受内压圆筒径向接管结构	62
2.7	加筋板动态分析	66
第三章	工程力学的基本关系	73
3.1	连续介质力学	73
3.2	运动学关系	73
3.3	应变	74
3.4	曲面上的应力矢量	74
3.5	应力分量	75
3.6	本构关系	76
3.7	平衡条件——牛顿力学	77
3.8	虚功原理	77
3.9	弹性理论解	78

3.9.1	均匀应力	78
3.9.2	自重作用下等截面杆的拉伸	78
3.10	解决实际问题的策略	79
3.11	二维弹性理论	79
3.11.1	平面应力	80
3.11.2	平面应变	80
3.11.3	平衡方程	80
3.11.4	应变-位移关系	80
3.11.5	本构关系	80
3.11.6	应力函数	81
3.11.7	基于应力函数的解	81
3.12	梁理论	83
3.12.1	应力的合成	83
3.12.2	拉伸和弯曲下的应力	84
3.12.3	平衡方程	85
3.12.4	梁弯曲挠度方程的解	85
3.13	小挠度的板理论	86
3.13.1	运动学关系	86
3.13.2	力和力矩的合成	87
3.13.3	平衡方程	87
3.13.4	Kirchhoff 假设	88
3.13.5	夹层板的本构关系	88
3.14	矩形板的小挠度解	89
3.14.1	承受正弦分布压力的简支矩形板	89
3.14.2	承受均匀分布压力的简支矩形板的 Navier 解和 A. Nadia 解	90
3.14.3	承受集中载荷的简支矩形板 Navier 解	91
3.14.4	承受均匀分布压力的夹支矩形板	92
3.14.5	承受集中载荷的夹支矩形板	92
3.15	圆板对称弯曲	93
3.15.1	承受均匀载荷的圆板	93
3.15.2	承受均匀载荷的夹支圆板	93
3.15.3	承受均匀载荷的简支圆板	94
3.15.4	承受均匀载荷夹支圆板的精确解	94
3.15.5	承受均匀载荷简支圆板较精确的解	95
3.15.6	承受同心圆载荷的简支圆板	96
3.15.7	承受同心圆载荷的夹支圆板	96
3.15.8	承受中心载荷的简支圆板	97
3.15.9	承受中心载荷的夹支圆板	97
3.15.10	承受中心载荷的简支圆板比较精确的解	97

3.15.11	承受均匀载荷的夹支椭圆板	97
3.15.12	承受均匀载荷的简支椭圆板	98
3.15.13	承受均匀载荷的简支斜板	98
3.16	板的大挠度	99
3.16.1	承受均匀载荷的大挠度夹支圆板的近似解	99
3.16.2	承受均匀载荷的大挠度夹支圆板的精确解	100
3.16.3	承受均匀载荷的大挠度简支圆板的精确解	101
3.17	柱形壳	103
3.17.1	承受轴对称载荷的圆柱形壳	103
3.17.2	圆截面上有均匀分布载荷的长圆柱壳	104
3.17.3	承受均匀内压的固支长圆柱壳	105
3.18	承受轴对称载荷的旋转壳	107
3.19	壳体变形状态和有限元方法	109
3.19.1	标准测试	110
3.19.2	壳的模型	111
3.19.3	有限元模型	112
3.19.4	变形的精确解	113
第四章	变分原理及近似理论	114
4.1	虚功原理	114
4.2	余虚功原理	114
4.3	最小势能原理	115
4.4	最小余能原理	116
4.5	广义原理	116
4.6	Hellinger-Reissner 原理	117
4.7	变分原理之间的关系	118
4.8	近似理论	118
4.9	简支梁的 Rayleigh-Ritz 解	119
第五章	有限单元公式	120
5.1	有限单元公式的位移表达	120
5.2	轴力杆单元 ROD	120
5.3	确定刚度方程的步骤	122
5.4	弯曲梁单元的刚度矩阵	122
5.5	铁摩辛柯梁单元的静态刚度矩阵	124
5.6	轴向拉力下的铁摩辛柯梁的横向振动	126
5.7	轴向拉力和绕轴旋转下扭曲的铁摩辛柯梁的横向振动	127
5.8	形函数和基函数	130
5.9	板单元基函数	135
5.10	等参数单元	137
5.10.1	基函数和 Jacobian 变换	137

5.10.2	计算正方形的面积	138
5.11	数值积分	139
5.12	杂交公式	140
5.12.1	杂交应力单元	141
5.12.2	卞学锁-Sumihara 杂交四边形薄膜	141
5.13	板壳单元	143
5.13.1	近似曲率	143
5.13.2	横向剪切应变的近似表达	143
5.13.3	用平板单元构造的壳体	144
5.13.4	法向转动	144
5.13.5	平壳单元的平面外节点的修正	145
5.13.6	曲壳单元	146
5.14	实体单元	149
5.15	单元刚度自锁	153
5.15.1	四节点矩形单元的自锁	154
5.15.2	八节点矩形单元的自锁	157
5.15.3	常应变三角形单元的自锁	158
5.15.4	八节点实体单元的自锁	159
5.16	单元刚度的形状敏感度	159
5.16.1	四节点平行四边形单元的自锁	160
5.16.2	四节点梯形单元的自锁	161
5.16.3	八节点梯形单元的自锁	162
5.16.4	中节点偏置的六节点三角形单元的自锁	162
5.17	减低积分和伪模式	163
5.17.1	减低积分的优点	163
5.17.2	单元的伪模态	164
5.18	对自锁的进一步处理	165
5.18.1	泡函数	166
5.18.2	锥旋转自由度	167
5.19	铁摩辛柯梁的矩阵	171
第六章	MSC.Nastran 中的结构单元	175
6.1	引言	175
6.2	单元定义	175
6.3	标量弹性单元 ELAS	177
6.3.1	连接两个节点自由度的弹簧单元 ELAS 的定义	177
6.3.2	ELAS 单元的功用	179
6.4	杆单元 ROD 和管单元 TUBE 单元	180
6.4.1	杆单元的输入数据	180
6.4.2	刚度矩阵	183

6.4.3	应力计算	183
6.5	常截面弯曲梁单元 BAR	186
6.5.1	BAR 单元的输入数据	187
6.5.2	BAR 的单元坐标系	188
6.5.3	BAR 单元的偏置	189
6.5.4	铰链连接	189
6.5.5	BAR 单元的属性	190
6.5.6	面积属性	192
6.5.7	非结构质量	193
6.5.8	应力计算	193
6.5.9	中间截面的单元力和应力	194
6.5.10	BAR 单元例题	194
6.5.11	建立有限单元模型时的注意事项	198
6.6	变截面弯曲梁单元 BEAM	199
6.6.1	自由度	200
6.6.2	梁的描述	200
6.6.3	BEAM 单元的连接卡片	202
6.6.4	BEAM 单元的局部坐标系	202
6.6.5	BEAM 单元属性数据输入	203
6.6.6	梁的例题	203
6.7	曲线梁单元 BEND	210
6.7.1	BEND 单元的定义	211
6.7.2	BEND 单元的连结和几何定义	212
6.7.3	BEND 单元的坐标系	212
6.7.4	确定几何中心弧线	214
6.7.5	单元属性	214
6.7.6	单元力和应力	216
6.8	剪力板单元 SHEAR PANEL	217
6.9	壳体单元	218
6.9.1	板单元 QUAD4 和 TRIA3	218
6.9.2	壳单元的定义	219
6.9.3	单元连接	219
6.9.4	单元坐标系	220
6.9.5	材料坐标系	220
6.9.6	参考曲面偏移	220
6.9.7	单元属性	220
6.9.8	单元属性的说明	222
6.9.9	单元本构关系	222
6.9.10	实心均匀对称截面的定义	223

6.9.11	夹层板截面	224
6.9.12	层复合材料	226
6.9.13	单元面翘曲的影响	227
6.9.14	单元刚度矩阵	227
6.9.15	质量矩阵	227
6.9.16	应力、应变和单元力计算	228
6.10	曲壳单元	228
6.10.1	TRIA6 和 QUAD8 单元的定义	229
6.10.2	单元节点连接	230
6.10.3	单元坐标系	230
6.10.4	材料轴方向	230
6.10.5	单元厚度	230
6.10.6	单元属性确定	230
6.10.7	单元刚度矩阵	230
6.10.8	单元质量矩阵	230
6.10.9	应力、应变和单元力的计算	231
6.11	实体单元	231
6.11.1	实体单元的定义	231
6.11.2	单元连接	232
6.11.3	TETRA 单元	233
6.11.4	PENTA 单元	233
6.11.5	HEXA 单元	233
6.11.6	实体单元 TETRA, PENTA 和 HEXA 的属性	233
6.11.7	HEXA 的单元坐标系	234
6.11.8	PENTA 的局部坐标系	235
6.11.9	TETRA 的单元坐标系	235
6.11.10	单元刚度矩阵	235
6.11.11	质量	236
6.11.12	应力和应变计算	236
第七章	总体分析过程	237
7.1	总体刚度矩阵	237
7.2	局部与总体坐标系	239
7.3	单元刚度矩阵的转换	239
7.4	结构自由度指定	239
7.5	标量自由度的定义	241
7.6	坐标系	241
7.7	节点	244
7.7.1	节点编号	244
7.7.2	几何坐标	245

7.7.3	位移坐标	245
7.8	外部和内部自由度	245
7.9	位移集	245
7.9.1	并集数据	246
7.9.2	独立的互补数据集	246
7.10	多点约束 MPC	247
7.10.1	MPC 的用途	247
7.10.2	减缩为 n -集	248
7.10.3	MPC 数据项	249
7.10.4	定义约束方程	250
7.11	单点约束 SPC	252
7.11.1	减缩为 f -集	252
7.11.2	单点约束力	253
7.11.3	SPC 数据定义	253
7.11.4	在载荷工况中选择 SPC 组	254
7.11.5	指定 s -集自由度和约束值	254
7.11.6	删除自由度	255
7.11.7	自动删除	255
7.11.8	单点约束的指定	256
7.12	静态凝聚 (OMIT 和 ASET)	257
7.12.1	a -集的减缩	257
7.12.2	凝聚自由度的恢复	258
7.12.3	$[G_{\alpha}]$ 的物理解释	258
7.12.4	使用静态凝聚的原因	258
7.12.5	静态凝聚的定义方法	259
7.12.6	静态凝聚例题	259
7.13	自由体支撑	260
7.13.1	减缩为 l -集	260
7.13.2	刚体变换矩阵	260
7.13.3	刚体的刚度矩阵	261
7.13.4	SUPPORT 卡片	262
7.14	柔度到刚度的变换	263
7.14.1	由柔度矩阵和刚体位移矩阵生成刚度矩阵的 GENEL 卡片	265
7.14.2	用 GENEL 卡片指定梁的属性	266
7.14.3	直接定义单元刚度	266
第八章	有限单元的精度与性能	267
8.1	单元性能	267
8.2	插值失败	267
8.3	单元形状的影响	268

8.3.1	二维补片测试	269
8.3.2	三维补片测试	270
8.3.3	补片测试结果	271
8.3.4	MacNeal 梁测试	271
8.3.5	矩形板测试	274
8.3.6	柱壳测试	276
8.3.7	开口球壳	277
8.3.8	不可压缩材料	278
8.4	测试结果概要	279
第九章	刚性单元和约束单元	282
9.1	刚性单元和约束单元	282
9.2	拉伸约束	283
9.3	两节点间的刚性连接	284
9.4	刚性三角约束单元	286
9.5	一般刚性约束单元	287
9.6	弹性约束单元	289
9.7	加权平均约束单元	291
第十章	材料属性	295
10.1	各向同性材料	296
10.1.1	一维单元	297
10.1.2	二维单元——平面应力	297
10.1.3	二维单元——平面应变	297
10.1.4	三维单元	298
10.2	二维单元的各向异性材料	298
10.2.1	正交各向异性材料	299
10.2.2	正交各向异性材料举例	300
10.3	二维夹层单元的正交各向异性材料	300
10.4	三维单元的各向异性材料	301
10.5	弹性常数的变换	303
10.6	与温度相关的材料	304
10.7	材料属性表	305
10.8	复合材料	308
10.8.1	夹层属性	308
10.8.2	夹层板属性	309
10.8.3	定义夹层板属性	310
10.8.4	层的失效准则	312
第十一章	外载荷	314
11.1	节点集中外力	315
11.2	由分量定义的力矢量	315

11.3	由两点定义的静态力和力矩	316
11.4	由矢量叉积定义载荷矢量的方向	317
11.5	作用在标量点上的载荷	318
11.6	弯曲梁单元上的分布载荷	318
11.6.1	载荷类型及方向	319
11.6.2	载荷和 SCALE 列	319
11.6.3	梁单元的分布载荷	319
11.7	均匀分布压力 PLOAD2	320
11.8	非均匀曲面力 PLOAD4	321
11.8.1	曲面力的方向	322
11.8.2	载荷强度指定	322
11.8.3	实体单元的承载面指定	322
11.8.4	指定图 11-4 中 HEXA 单元的曲面力例题	322
11.9	重力载荷	323
11.10	由于角速度和角加速度引起的静载荷	324
11.11	组合载荷	325
11.12	强制位移	326
11.13	强制变形	327
11.14	热载荷	328
11.15	节点温度	329
11.16	杆单元和梁单元的温度场	330
11.17	二维单元的温度场	331
第十二章	静力分析	333
12.1	系统矩阵	333
12.2	约束和静凝聚	336
12.3	静载荷	336
12.4	惯性释放	337
12.5	数据还原	338
12.6	输入说明	338
12.6.1	执行控制段	338
12.6.2	工况控制段	338
12.6.3	参数	339
12.7	分析结果输出	339
12.7.1	自动输出	339
12.7.2	系统响应变量的输出	339
12.8	致命错误	340
12.9	节点奇异性处理	341
12.9.1	奇异性识别	341
12.9.2	用户控制	341

12.9.3	自动输出	341
12.9.4	位移集的隶属关系	342
12.10	节点重量生成模块	343
12.10.1	刚体变换矩阵	343
12.10.2	刚体质量矩阵	343
12.10.3	主质量轴	343
12.10.4	质心	343
12.10.5	转动惯量	343
12.11	例题说明	344
12.12	均匀分布载荷下的悬臂梁	344
12.12.1	单元属性	344
12.12.2	有限单元模型	345
12.12.3	载荷工况、载荷和边界条件	347
12.12.4	提交 MSC. Nastran 分析	347
12.12.5	计算结果	351
12.12.6	结果分析	355
12.13	简支加筋板	356
12.14	三维挂钩	362
第十三章	用超单元模拟部件	367
13.1	超单元和建模	367
13.1.1	子结构	367
13.1.2	子结构法的优点	368
13.1.3	超单元逻辑结构	368
13.2	部件求解	369
13.3	定义超单元	369
13.3.1	将节点分配到超单元 SEID	370
13.3.2	PART 超单元	370
13.4	MSC. Patran 定义超单元的方法	370
13.5	超单元问题的例题	371
第十四章	对称和循环对称	376
14.1	引言	376
14.2	结构物基本对称型态	376
14.3	基本理论介绍	377
14.3.1	反射对称结构	378
14.3.2	反射对称的边界条件	378
14.3.3	旋转对称结构	379
14.3.4	周期边界条件	382
14.3.5	耦合体旋转对称	382

14.4	数据输入	383
14.4.1	循环对称分析方法与传统分析方法的比较	383
14.4.2	执行控制卡	384
14.4.3	工况控制卡	385
14.4.4	模型数据卡	386
第十五章	固有模态分析	389
15.1	动力学系统方程	389
15.2	特征值问题	389
15.3	系统的质量	391
15.3.1	单元的惯性属性	391
15.3.2	结构质量与非结构质量	392
15.3.3	一致质量和集中质量公式	392
15.3.4	质量单元	392
15.4	实特征值的提取方法	394
15.5	矩阵减缩法	399
15.6	简支矩形板的模态分析	404
第十六章	微分刚度和屈曲分析	407
16.1	大位移公式	407
16.2	非线性应变位移关系	408
16.3	棱形杆的几何刚度	409
16.4	板弯曲的几何刚度矩阵	410
16.5	屈曲分析	412
16.5.1	第一阶段——线性静力分析	413
16.5.2	第二阶段——屈曲分析	413
16.6	考虑微分刚度的固有模态和频率	414
16.7	线性屈曲例题	414
16.7.1	简支细长杆的屈曲	414
16.7.2	矩形板的屈曲	416
16.7.3	柱壳的屈曲	417
16.7.4	承受压力载荷的梁的模态分析	417
16.8	弧长法	418
16.8.1	Newton-Raphson 法的基本公式	418
16.8.2	割线刚度矩阵和切线刚度矩阵	420
16.8.3	弧长法	420
16.9	后屈曲	424
16.9.1	横向加载的柱壳后屈曲-1	424
16.9.2	横向加载的柱壳后屈曲-2	425