科学版

研究生教学丛书

概率论与随机过程

叶尔骅 张德平 编著

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

概率论与随机过程

叶尔骅　张德平 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要包括概率论与随机过程两部分内容.概率论部分包括概率空间、随机变量与分布函数、随机向量的数字特征与特征函数、极限定理等,对本科的概率论知识做了加强;随机过程部分包括基本概念、马尔可夫过程、泊松过程、更新过程、鞅简介、平稳过程等内容.本书从学生实际水平出发,既加强了理论,又注重理论与实践相结合,在例题和习题中配有许多实际例子,而且编排是“模块式”的,便于灵活使用.

本书适用于高等院校工、农、林、水利、土木、医学、生物、管理、经济等非理科数学专业的硕士生以及从事该专业教学、科研的教师和工程技术人员.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与随机过程/叶尔骅,张德平编著.—北京:科学出版社,2005

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 7-03-014338-8

Ⅰ.概… Ⅱ.①叶…②张… Ⅲ.①概率论-研究生-教材②随机过程-研究生-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字[redacted]号

责任编辑:杨 [redacted]:宋玲玲

责任印制:[redacted]春生/封面设计:[redacted] 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年1月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2005年1月第一次印刷 印张:27

印数:1—3 000 字数:519 000

定价:38.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前　言

本书是作者多年来在为工科硕士研究生开设的“概率论与随机过程”课程的教学实践的基础上根据原讲义补充修改而成．全书共分为两部分．第一部分为概率论基础，主要介绍在本科阶段尚未或少许涉及的内容（如条件分布，随机向量变换，条件数学期望，特征函数，正态随机向量，极限定理等）．第二部分为随机过程基础，主要介绍在科学技术中应用广泛的几类随机过程：马尔可夫过程，泊松过程，更新过程，鞅以及平稳过程的一些基本知识．

本书在选材上既注重理论，又力求联系工程实践．在写作手法上，考虑到工科等专业的学生已有的数学基础，采用学生易于接受的叙述形式，循序渐进，通俗易懂，便于施教，也便于自学．书中既有较多的应用实例，也有学生能接受的理论证明，并配有较丰富的习题．书中也难免涉及少许测度论中的一些基本概念，如 σ 域、可测函数、几乎处处、Stieltjes 积分等，对于这些概念，读者只要理解或了解即可，不必花过多的精力，这样做并不妨碍阅读全书．读者只要具备微积分、线性代数、概率统计初步以及少量复变函数知识，便可阅读本书的绝大部分内容．

关于使用本书的教学时数，各专业可根据自身的特点和需要适当选择其中的一些内容组织教学．尤其是随机过程部分第 6～10 章，除去个别例子和结论，各章内容基本上是相对独立的，对于学时偏少的专业，可讲授其中的几章，而其余各章可作为选读材料．这里谨提出以下几种方案供参考选择：

(1) 讲授概率第 1～4 章以及随机过程第 5、6、10 章，但除去 4.2.4、4.3.2、6.2、10.1.5、10.1.6 节，约需 60 学时；

(2) 讲授随机过程第 5～10 章，约需 60 学时；

(3) 全部讲授，约需 90 学时．

在编写本书的过程中，得到了南京航空航天大学研究生院、理学院以及教材科的全力支持和帮助；得到了一些兄弟院校同仁们的关心和鼓励；同时，也参考了一些文献资料，从中获得了许多有益的启示．作者在此一并向他（她）们表示衷心的感谢．

全书由叶尔骅编写了第 1～7、9、10 章，张德平编写了第 8 章．由于作者水平所限，书中一定有许多缺点和错误，恳请读者批评指正．

作　者

2004 年 11 月

目　　录

第 1 章　概率空间 ······ 1
1.1　σ 域 ······ 1
1.2　概率空间 ······ 7
习题 1 ······ 14
第 2 章　随机变量与分布函数 ······ 17
2.1　随机变量及其分布 ······ 17
2.2　随机向量，随机变量的独立性 ······ 22
2.3　随机变量函数的分布 ······ 34
习题 2 ······ 51
第 3 章　随机向量的数字特征与特征函数 ······ 58
3.1　关于数学期望的一些说明 ······ 58
3.2　条件数学期望及其性质 ······ 60
3.3　随机向量的数字特征 ······ 70
3.4　特征函数 ······ 75
3.5　正态随机向量 ······ 85
习题 3 ······ 97
第 4 章　极限定理 ······ 105
4.1　分布函数的弱收敛 ······ 105
4.2　随机变量的收敛性 ······ 109
4.3　大数定律 ······ 118
4.4　中心极限定理 ······ 128
习题 4 ······ 136
第 5 章　随机过程的基本概念 ······ 141
5.1　随机过程的定义 ······ 141
5.2　随机过程的分布函数与数字特征 ······ 147
5.3　几类重要的随机过程简介 ······ 156
习题 5 ······ 167
第 6 章　马尔可夫过程 ······ 169
6.1　马尔可夫链 ······ 169
6.2　马尔可夫链的进一步讨论 ······ 191

6.3 时间连续状态离散的马尔可夫过程 …… 212
习题 6 …… 231
第 7 章 泊松过程 …… 240
7.1 齐次泊松过程及其性质 …… 240
7.2 非齐次泊松过程及其性质 …… 253
7.3 若干统计分析 …… 268
7.4 复合泊松过程 …… 280
习题 7 …… 283
第 8 章 更新过程 …… 286
8.1 更新过程的定义 …… 286
8.2 更新过程的数字特征及其性质 …… 287
8.3 若干极限定理与基本更新定理 …… 290
8.4 更新方程与关键更新定理 …… 296
习题 8 …… 303
第 9 章 鞅简介 …… 305
9.1 鞅的定义及例子 …… 305
9.2 上鞅与下鞅 …… 309
9.3 停止定理 …… 314
9.4 鞅收敛定理 …… 323
9.5 关于 σ 域的鞅 …… 329
习题 9 …… 336
第 10 章 平稳过程 …… 340
10.1 随机分析 …… 340
10.2 平稳过程及其相关函数 …… 359
10.3 傅氏变换 …… 368
10.4 平稳过程的功率谱密度 …… 379
10.5 平稳过程的遍历性 …… 391
10.6 平稳序列的预报 …… 401
习题 10 …… 411
参考文献 …… 420
附录 常用分布表 …… 422

第1章　概率空间

1.1　σ　域

概率论是从数量角度研究随机现象统计规律性的一门数学学科，理论严谨，发展迅速，应用广泛.

事件是概率论中最基本的概念之一，事件的集合表示使得事件的关系、运算与集合的关系、运算完全相似.为掌握好事件的概念及其运算，为今后深入学习概率论打下较好的基础，在这一节中简单介绍集合的有关知识.

1.1.1　集和类

1. 集的概念

具有某种特定性质的具体的或抽象的事物之全体称为**集合**，简称**集**.其中的成员称为这个集的**元素**或元或点.

集的记号常用大写字母 A,B,C,D,Ω 等表示，其中的元素常以小写字母 a,b,c,d,ω 等表示.

对一个集 A 来说，某一事物 x 或是集 A 的元，这时称 x **属于** A，记为 $x\in A$；或 x 不是 A 的元，称 x 不属于 A，记为 $x\overline{\in} A$.

当 A 是具有某种性质 P 的元素全体时，常用下面形式表示 A：

$$A=\{x:x\text{ 具有性质 }P\}=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例1.1.1　(1) 自然数全体成一集，记为 N，则

$$N=\{n:n\text{ 为自然数}\}=\{1,2,3,\cdots\}.$$

(2) 质数全体成一集，记为 F，则

$$F=\{2,3,5,7,11,13,\cdots\}.$$

(3) 区间 $[0,1]$ 上的点全体成一集，记为 Ω，则

$$\Omega=\{\omega:0\leqslant\omega\leqslant 1\}.$$

(4) 区间 $[a,b]$ 上连续函数全体成一集，记为 $C[a,b]$，则

$$C[a,b]=\{f(x):f(x)\text{ 连续},a\leqslant x\leqslant b\}.$$

(5) 掷一颗骰子，其所有可能结果全体成一集，记为 Ω，叫**样本空间**，则

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},$$

也可写成

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}, \quad \omega_i = i, \quad i = 1, 2, \cdots, 6.$$

(6) 连抛一硬币两次，其所有可能结果全体成一集 Ω，则

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

其中 $\omega_1 = HH$，$\omega_2 = HT$，$\omega_3 = TH$，$\omega_4 = TT$，H 表示正面，T 表示反面. 一般，随机试验的样本空间可记为

$$\Omega = \{\omega\},$$

ω 为试验的可能结果，称为**样本点**. 不含元素的集，称为**空集**，记为 $\varnothing$. 例如，集 $\{x : x \text{是实数且} x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

2. 集的关系

1)包含

设 A, B 是两集，如果 $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$，称 A 是 B 的**子集**，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作 A 包含于 B 中或 B 包含 A. 在例 1.1.1 中，$F \subset N$. 规定空集是任何集的子集，如 $\varnothing \subset A$，$\varnothing \subset B$ 等.

关系"$\subset$"(即"包含")是自反的，传递的，即

(1) $A \subset A$(自反性)，

(2) 如果 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$(传递性).

2)相等

如果 $A \subset B$，$B \subset A$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A = B$. 例如，集 $\{x : x^2 - 1 = 0\} =$ 集 $\{1, -1\}$.

关系"="(即"相等")是自反的，传递的，对称的，即

(1) $A = A$(自反性)，

(2) 如果 $A = B$，$B = C$，则 $A = C$(传递性)，

(3) 如果 $A = B$，则 $B = A$(对称性).

注　不要把"$\subset$"与"$\in$"含义搞混. "$\subset$"表示集与集的关系，"$\in$"表示集与元素间的关系.

3. 类

一个以集为元素的集合称为**类或集类**，常用记号 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{F}$ 等表示. 例如，直线 $\mathbf{R}^1$ 中所有有限开区间全体组成一个类，记为 $\mathscr{F}$，即

$$\mathscr{F} = \{(a, b) : -\infty < a < b < +\infty\} = \{(a, b)\},$$

类的概念在概率论中常用.

1.1.2　集的运算

设 $\Omega = \{\omega\}$ 为一非空集，A, B 等是其子集.

1. 代数运算

1)和(并)

$$A \cup B \triangleq \{\omega : \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$

同样可定义 n 个集之和

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \triangleq \{\omega : \omega \in A_k, \text{至少对某个 } k, 1 \leqslant k \leqslant n\},$$

无限个集之和

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots \triangleq \{\omega : \omega \in A_n, \text{至少对某个 } n \geqslant 1\}.$$

2)交(积)

$$A \cap B = AB \triangleq \{\omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\},$$

如果 $A \cap B = \varnothing$,称 A, B **不相交**.

同样可定义 n 个集之交

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \triangleq \{\omega : \omega \in A_k, \forall k, 1 \leqslant k \leqslant n\},$$

无限个集之交

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots \triangleq \{\omega : \omega \in A_n, \forall n, n \geqslant 1\}.$$

3)差与余

$$A - B \triangleq \{\omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \overline{\in} B\},$$

$$\overline{A} = A^C = \Omega - A \triangleq \{\omega : \omega \in \Omega \text{ 且 } \omega \overline{\in} A\},$$

称 $\overline{A}$ 或 A^C 为 A(相对于空间 Ω)的**余集或补集**.

上述运算可用图 1.1(称为 Venn 图)表示.

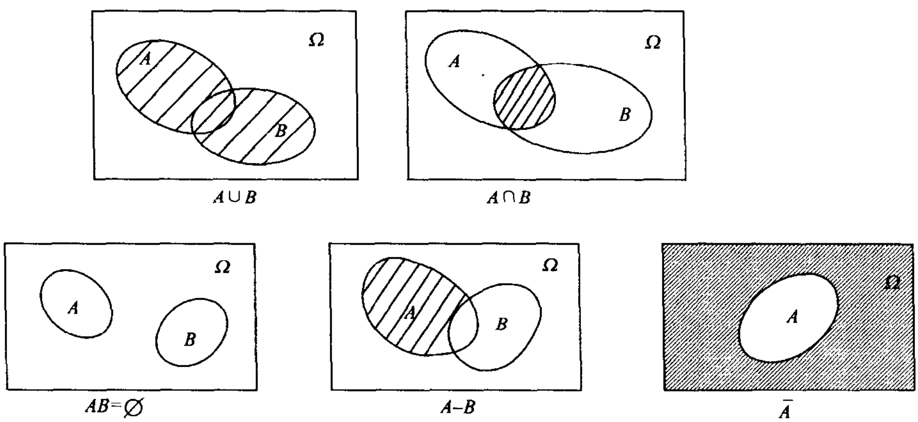

图 1.1

4)集的运算性质

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律　$(A\cup B)C=AC\cup BC,(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) $A\cup A=A, A\cup\varnothing=A, A\cup\Omega=\Omega$.

$A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap\Omega=A$

(5) 如果 $A\subset B$,则 $AB=A, A\cup B=B, \bar{B}\subset\bar{A}$.

(6) $\bar{\Omega}=\varnothing, \bar{\varnothing}=\Omega, A\cap\bar{A}=\varnothing, A\cup\bar{A}=\Omega, \bar{\bar{A}}=A$.

(7) $A-B=A\bar{B}=A-AB$.

(8) 对偶原理(De Morgan 定理)

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\,\bar{B},\qquad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B},$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\bar{A}_k,\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\bar{A}_k\quad(n\text{ 可为 }\infty).$$

借助于集的图表示法,不难理解这些公式.下面证明分配律中第 2 个等式及对偶原理.

证　(3)要证$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$,只要证左$\subset$右,右$\subset$左.设

$$\begin{aligned}\omega\in\text{左}\ &\Rightarrow\ \omega\in AB\text{ 或}\omega\in C\ \Rightarrow\ \omega\in A\text{ 且}\omega\in B\text{ 或}\omega\in C,\\ &\Rightarrow\ \omega\in A\cup C\text{ 且}\omega\in B\cup C\\ &\Rightarrow\ \omega\in(A\cup C)(B\cup C),\end{aligned}$$

即 $\omega\in$右,故左$\subset$右.

易知,若把上述“$\Rightarrow$”改为“$\Leftarrow$”,推理也成立,故右$\subset$左,从而左=右.

(8)要证$\overline{A\cup B}=\bar{A}\,\bar{B}$,

$$\begin{aligned}\omega\in\overline{A\cup B}\ &\Longleftrightarrow\ \omega\bar{\in}A\cup B\ \Longleftrightarrow\ \omega\bar{\in}A\text{ 且}\omega\bar{\in}B\\ &\Longleftrightarrow\ \omega\in\bar{A}\text{ 且}\omega\in\bar{B}\ \Longleftrightarrow\ \omega\in\bar{A}\,\bar{B}.\end{aligned}$$

故$\overline{A\cup B}=\bar{A}\,\bar{B}$.要证　$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$,

$$\begin{aligned}\omega\in\overline{AB}\ &\Longleftrightarrow\ \omega\bar{\in}AB\ \Longleftrightarrow\ \omega\bar{\in}A\text{ 或}\omega\bar{\in}B\\ &\Longleftrightarrow\ \omega\in\bar{A}\text{ 或}\omega\in\bar{B}\ \Longleftrightarrow\ \omega\in\bar{A}\cup\bar{B}.\end{aligned}$$

故$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

其余几个关系式,类似可证.

例 1.1.2　设集 $A\subset E, E-A\subset F$,证明 $A=(E-F)\cup FA$.

证　设

$$\begin{aligned}\omega\in A\ &\Rightarrow\ \omega\in FA\text{ 或}\omega\in A\text{ 且}\omega\bar{\in}F\ \Rightarrow\ \omega\in FA\text{ 或}\omega\in E\text{ 且}\omega\bar{\in}F\\ &\Rightarrow\ \omega\in(E-F)\cup FA.\end{aligned}$$

易知,上述相反的推理过程也成立.从而 $A=(E-F)\cup FA$.

2. 集列的极限

设有 Ω 中集列 $\{A_n, n\geqslant 1\}$. 如果 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, 称 $\{A_n\}$ 为单调上升的, 记为 $A_n\uparrow$; 如果 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, 称 $\{A_n\}$ 为单调下降的, 记为 $A_n\downarrow$.

若 $A_n\uparrow$, 则 $\forall n\geqslant 1, A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$, 两端令 $n\to\infty$, 右端自然为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, 左端可理解为 A_n 的极限. 由此可建立如下定义.

定义 1.1.1 若 $A_n\uparrow$, 称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为集列 $\{A_n\}$ 的**极限**, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$, 即

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i.$$

若 $A_n\downarrow$, 则 $\forall n\geqslant 1, A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$, 两端令 $n\to\infty$, 右端自然为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, 左端可理解为 A_n 的极限. 由此可建立如下定义.

定义 1.1.2 若 $A_n\downarrow$, 称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为集列 $\{A_n\}$ 的**极限**, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$, 即

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i.$$

例1.1.3 (1) 设 $A_n=\left[0,1+\dfrac{1}{n}\right)$, $n=1,2,\cdots$, 则 $A_n\downarrow$, 故

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0,1+\frac{1}{n}\right)=[0,1].$$

(2) 设 $A_n=\left[\dfrac{1}{2n},1-\dfrac{1}{2n}\right]$, $n=1,2,\cdots$, 则 $A_n\uparrow$, 故

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n}\right]=(0,1).$$

关于一般集列的极限概念, 可见文献[1]5.4 节.

1.1.3 σ 域与 Borel 域

1. σ 域

设 $\Omega=\{\omega\}$ 是一个非空集, $\mathscr{F}$ 是由 Ω 的某些子集组成的非空集类. 下面讨论的类, 如无特别声明, 均指 Ω 上的类.

定义 1.1.3 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个非空集类, 它满足下列条件:

(1) 如果 $A\in\mathscr{F}$, 则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(2) 如果 $A,B\in\mathscr{F}$, 则 $A\cup B\in\mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$ 是一个**域**.

例 1.1.4 设 $\Omega=[0,1]$, $\mathscr{F}$ 是 $[0,1]$ 中闭区间全体, 则 $\mathscr{F}$ 不是域.

例 1.1.5 设 $\Omega=[0,1)$, $\mathscr{F}$ 是 $[0,1)$ 中有限个左闭右开的区间的和集 $F=$

$\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ 全体所组成的集类，则 $\mathscr{F}$ 是域.

域的性质：设 $\mathscr{F}$ 是域，则由定义 1.1.3 知，

(1) $\Omega=A\cup\bar{A}\in\mathscr{F}$，其中 $A\in\mathscr{F}$，$\varnothing=\bar{\Omega}\in\mathscr{F}$；

(2) 如果 $A,B\in\mathscr{F}$，则

$$AB=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}\in\mathscr{F},\quad A\bar{B}=\overline{\bar{A}\cup B}\in\mathscr{F}.$$

可见，域关于集的有限次“和”、“交”及“余”运算封闭.

定义 1.1.4　设 $\mathscr{F}$ 为域，若对任意 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$ 有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为 σ **域**或 σ **代数**.

由定义 1.1.4 可知，若 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n}\in\mathscr{F}$. 可见，$\sigma$ 域关于集的可列次“和”、“交”及“余”运算封闭.

注　(1) 若域 $\mathscr{F}$ 仅包含有限个元(集)，称 $\mathscr{F}$ 为有限域. 这时定义 1.1.4 中的 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 实际上是有限和，当然 $\in\mathscr{F}$. 因此，有限域必为 σ 域.

(2) 若 $\mathscr{F}$ 为 Ω 中的 σ 域，称 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为**可测空间**，$\mathscr{F}$ 中的元称为 $\mathscr{F}$ **可测集**，简称**可测集**.

例 1.1.6　(1) $\mathscr{F}=\{\Omega,\varnothing\}$ 是一个域，且为 σ 域.

(2) $\mathscr{F}=\{\varnothing,A,\bar{A},\Omega\}$ 是一个域，且为 σ 域.

(3) $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的一切子集组成的类，这时 $\mathscr{F}$ 是一个有限的集合，共有 2^n 个元，易知 $\mathscr{F}$ 是域，故也为 σ 域.

(4) 对一般的 Ω，若 $\mathscr{F}$ 是由 Ω 的一切子集构成的类，易证 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域.

定理 1.1.1　设 $\mathscr{F}_0$ 是 Ω 上的一个非空集类，则必存在唯一的一个 Ω 上的 σ 域 $\mathscr{F}$，具有下列性质：

(1) $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$；

(2) 若 $\mathscr{F}_1$ 是一个 σ 域，且 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}_1$，则 $\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_1$.

称 $\mathscr{F}$ 为包含 $\mathscr{F}_0$ 的**最小 σ 域**，也称 $\mathscr{F}$ 为由 $\mathscr{F}_0$ **张成(或产生)的 σ 域**，记为 $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{F}_0)$.

证　先证包含 $\mathscr{F}_0$ 的 σ 域是存在的. 记 $\mathscr{H}$ 为由 Ω 的一切子集构成的集类，则 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{H}$，且由例 1.1.6(4) 知，$\mathscr{H}$ 为 σ 域.

现令 $\mathscr{F}$ 为一切包含 $\mathscr{F}_0$ 的 σ 域之交，易知 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域，并且满足定理中的性质，证毕.

2. 一维 Borel 域

设 $\mathbf{R}^1$ 为数直线，$\{[a,b)\}$ 为由一切形如 $[a,b)$ 的有界左闭右开区间构成的集类. 由定理 1.1.1 知，存在一个 $\mathbf{R}^1$ 中的包含此类的最小 σ 域，即由它张成(产生)的

σ 域,记为 $\mathscr{B}_1$,即

$$\mathscr{B}_1 = \sigma(\{[a,b)\}).$$

称 $\mathscr{B}_1$ 为**一维 Borel 域**,$\mathscr{B}_1$ 中的元(集)称为**一维 Borel 集或一维 Borel 可测集**.

设 $x,y\in\mathbf{R}^1$,则

$$\text{单点集}\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[x,x+\frac{1}{n}\right)\in \mathscr{B}_1,$$
$$(x,y) = [x,y) - \{x\} \in \mathscr{B}_1,$$
$$[x,y] = [x,y) \cup \{y\} \in \mathscr{B}_1,$$
$$(x,y] = [x,y] - \{x\} \in \mathscr{B}_1,$$

所以 $\mathscr{B}_1$ 中包含一切开区间、闭区间、半开闭区间、单个实数、可列个实数以及由它们经可列次"和"、"交"及"余"运算而得的集合.这是一个相当大的集类,足够把实际问题中感兴趣的点集都包括在内.

例 1.1.7 设 $\mathscr{B}_1=\sigma(\{[a,b)\})$,证明 $\mathscr{B}_1=\sigma(\{(a,b)\})$.

证 因$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{b-a}{2n},b\right)\in \mathscr{B}_1$,故集类$\{(a,b)\}\subset\mathscr{B}_1$,即 $\mathscr{B}_1$ 是包含集类$\{(a,b)\}$的一个 σ 域.由定理 1.1.1 知,$\mathscr{B}_1$ 也包含由此类张成的 σ 域,即 $\sigma(\{(a,b)\})\subset\mathscr{B}_1$.

反之,因$[a,b)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},b\right)\in \sigma(\{(a,b)\})$,故集类$(\{[a,b)\}\subset\sigma(\{(a,b)\})$,从而 $\mathscr{B}_1=\sigma(\{[a,b)\})\subset\sigma(\{(a,b)\})$.

由此得

$$\mathscr{B}_1 = \sigma(\{(a,b)\}).$$

例 1.1.7 说明,一维 Borel 域 $\mathscr{B}_1$ 也是由一切形如(a,b)的有界开区间构成的集类所张成的 σ 域.

3. n 维 Borel 域

设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧氏空间,$\mathscr{F}_0$ 表示由一切形如$\{(x_1,\cdots,x_n):-\infty<a_i\leqslant x_i<b_i<+\infty,i=1,2,\cdots,n\}$的超矩形全体构成的集类,由 $\mathscr{F}_0$ 张成的 σ 域,记为 $\mathscr{B}_n$,即

$$\mathscr{B}_n = \sigma(\mathscr{F}_0),$$

称 $\mathscr{B}_n$ 为 **n 维 Borel 域**,其中的元(集)称为 **n 维 Borel 集或 n 维 Borel 可测集**.

与一维情形类似,$\mathscr{B}_n$ 中包含一切超矩形、单点集、可列个点以及由它们经可列次"和"、"交"及"余"运算而得的集合.

1.2 概率空间

1.2.1 概率的公理化定义

在古典概型与几何概型中,我们对事件定义了概率.但在许多实际问题中,还

会遇到其它类型的随机现象,于是产生了在一般情形下如何定义事件概率的问题.

我们知道,上述两种概型中的概率具有共同的性质:非负性、规范性、有限可加性(对古典概型)或可列可加性(对几何概型). 同时,对于一般的随机试验,频率也有类似的性质. 由此使人联想到,可以用这些性质作为一般的概率的定义. 近代概率论的结构正是遵循这种思路建立起来的. 1933 年,原苏联数学家柯尔莫哥洛夫(A.H.Колмогоров)综合了前人的研究成果,提出了概率论公理化结构,明确定义了基本概念,使概率论成为严谨的数学分支,对近几十年概率论的迅速发展起了重要作用.

概率的公理化定义,包括三个要素.

1. 样本空间

随机试验的可能结果,称为**样本点**或**基本事件**,记为 ω,样本点全体构成**样本空间**,记为 Ω,即

$$\Omega = \{\omega\}.$$

2. 事件域

事件 A 一般可理解为 Ω 的一个子集,即 $A\subset\Omega$,它包含若干样本点,事件 A 发生当且仅当 A 所包含的样本点中有一个发生.

为满足分析随机现象的实际需要,对事件应允许进行必要的运算,因而事件类不能太小,至少对某些运算应该是封闭的. 另一方面,为了能对每个事件给出概率,并保证对概率有一定的要求,例如可加性等,所以事件类就不能太大,否则无法给出一个"兼顾各方面要求"的概率. 这就是运用公理化方法来描述概率模型时必须考虑的内容.

定义 1.2.1　设 $\mathscr{F}$ 是由样本空间 Ω 的一些子集构成的一个 σ 域,则称 $\mathscr{F}$ 为**事件域**,$\mathscr{F}$ 中的元素(集合)称为**事件**,称 Ω 为**必然事件**,$\varnothing$ 为**不可能事件**.

按照这种定义,事件的运算与集合的运算完全相同.

3. 概率

在公理化结构中,概率是针对事件定义的,对应于事件域 $\mathscr{F}$ 中的每个元素 A,有一个实数 $P(A)$ 与之对应. 这种从集合到实数的映射(记为 P)称为集合函数. 因此,概率是定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的一个集合函数,并且应满足一定的性质,再用公理的形式加以肯定下来.

定义 1.2.2　设 P 为定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的一个集合函数,如果它满足下列三个条件:

(1) 非负性　$\forall A\in\mathscr{F}, P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性 若 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots$,且两两互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称 P 为**概率**,对 $A\in\mathscr{F}$,称 $P(A)$为**事件 A 的概率**.

定义 1.2.3 称三元总体$(\Omega,\mathscr{F},P)$为**概率空间**,其中 Ω 为样本空间,$\mathscr{F}$是事件域,P 为概率.

在概率论中,概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$通常都认为是预先给定的,并以此为出发点讨论各种问题.至于实际问题中,如何选定 Ω,怎样构造 $\mathscr{F}$,怎样给定 P,则要视具体情况而定.

1.2.2 概率的性质

1. 简单性质

根据定义 1.2.2 中概率的三条基本性质,可推出下列一些简单性质.它们在本科概率论中已涉及,这里仅列举,不再证明.

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性:若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) $\forall A\in\mathscr{F}, P(\bar{A})=1-P(A)$.

(4) 减法及单调性:如果 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,$P(B)\leqslant P(A)$.

注 (i)对任何事件 A,因 $A\subset\Omega$,故 $P(A)\leqslant P(\Omega)=1$.

(ii)若无条件“$B\subset A$”,一般 $P(A-B)\neq P(A)-P(B)$.但 $A-B=A-AB$,$AB\subset A$,故有

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB).$$

这是一般的减法公式.

(5) 加法公式与次可加性:设 A,B 为任意事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B) \qquad (\text{次可加性}).$$

一般,利用数学归纳法可证得:对任意自然数 n 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n),$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\qquad(\text{次可加性}).$$

注　关于条件概率与乘法,全概率公式,贝叶斯(Bayes)公式等内容,因在本科概率论中已作介绍,这里不再重述.

例 1.2.1　证明:$P(A_i)=0,i=1,2,\cdots,n\Longleftrightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=0$.

证　若 $P(A_i)=0,i=1,2,\cdots,n$,则由概率的次可加性及非负性得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=0,$$

即 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=0$.

反之,若 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=0$,则对每个 $i(i=1,2,\cdots,n)$,因

$$A_i\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i,$$

故由概率的单调性及非负性得

$$P(A_i)\leqslant P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=0,$$

即 $P(A_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$,证毕.

注　若 $P(A)=0$,不一定有 $A=\varnothing$.

例 1.2.2　证明:$P(B_i)=1,i=1,2,\cdots,n\Longleftrightarrow P(\bigcap_{i=1}^{n}B_i)=1$.

证　由例 1.2.1、逆事件概率公式以及对偶原理得

$$\begin{aligned}&P(B_i)=1,\quad i=1,2,\cdots,n\\\Longleftrightarrow\ &P(\overline{B}_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,n\\\Longleftrightarrow\ &P(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{B}_i)=0\ \Longleftrightarrow\ P(\bigcap_{i=1}^{n}B_i)=1,\end{aligned}$$

证毕.

注　$P(B)=1$ 不一定有 $B=\Omega$.

例 1.2.3　设 $\{B_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为一划分,A,C 为事件,$P(B_iC)>0,i=1,2,\cdots,n$,证明:

$$P(A|C)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i|C)P(A|B_iC).$$

证法一　因条件概率 $P(\cdot|C)$ 为概率,故由概率可加性得

$$\begin{aligned}P(A|C)&=P[(\bigcup_{i=1}^{n}B_iA)|C]=\sum_{i=1}^{n}P(B_iA|C)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(B_i|C)P(A|B_iC).\end{aligned}$$

证法二

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{1}{P(C)}\sum_{i=1}^{n}P(B_iAC)$$

$$=\frac{1}{P(C)}\sum_{i=1}^{n}P(C)P(B_i|C)P(A|B_iC)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(B_i|C)P(A|B_iC).$$

例1.2.4 证明下列命题等价:

(1) 事件 A 与任一事件 B 独立; (2) A 与 A 独立;

(3) $P(A)=1$ 或 0.

证 (1)⇒(2)显然.

(2)⇒(3).若 A 与 A 独立,则有

$$P(A)=[P(A)]^2,\qquad P(A)[1-P(A)]=0,$$

故 $P(A)=1$ 或 0.

(3)⇒(1).若 $P(A)=0$,B 为任一事件,则 $P(AB)\leqslant P(A)=0$,所以,$P(AB)=0=P(A)P(B)$,即 A,B 独立.

若 $P(A)=1$,B 为任一事件,因 $P(\bar{A})=0$,故 $P(\bar{A}B)=0$,所以,$P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=P(B)=P(A)P(B)$,即 A,B 独立,证毕.

2. 可列可加性的等价命题

可列可加性是一条很重要的性质,从上面性质(2)知,由可列可加性可以推出有限可加性.但是一般说来,由有限可加性并不能推出可列可加性.那么,究竟施加什么条件可使逆命题成立呢?下面讨论这个问题.

定义 1.2.4 设 P 为 $\mathscr{F}$ 上的集合函数,若 $\forall S_n\in\mathscr{F}$, $n=1,2,\cdots$,且 $S_n\uparrow$,有

$$\lim_{n\to\infty}P(S_n)=P(\lim_{n\to\infty}S_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n),\tag{1.2.1}$$

则称 P 为**下连续**的.

定理 1.2.1 设 P 为 $\mathscr{F}$ 上满足 $P(\Omega)=1$ 的非负集合函数,则 P 具有可列可加性⟺P 具有有限可加性并且是下连续的.

证 ⇐ 设 P 具有有限可加性并且是下连续的,要证 P 具有可列可加性.为此,设 $A_i\in\mathscr{F}$, $i=1,2,\cdots$, $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,由 P 的有限可加性知,$\forall\, n\geqslant1$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),$$

上式左端对任意 n 都不超过 1,故右端的正项级数收敛,从而有

$$\lim_{n\to\infty}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),\tag{1.2.2}$$