

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

# 机器人动力学与控制

*Robot Dynamics and Control*

2

霍伟 编著

高等教育出版社

# 机器人动力学与控制

Robot Dynamics and Control

霍 伟 编著

高等教育出版社

## 内 容 提 要

本教材以力学理论和控制理论的全面讲述为特色。教材的重点在于用严谨而系统的方式介绍机器人动力学与控制的基本概念和主要结果。全面介绍了机器人建模与控制研究中所涉及的基本概念、算法和有代表性的结果,特别是控制方法的介绍更具全面性。全书共3章,分别是:机器人运动学、机器人动力学、机器人控制。

本书适合“控制理论与控制工程”专业及“机械电子工程”、“机械制造及其自动化”等专业机器人控制研究方向的硕士研究生使用,也可作为从事有关研究的博士生和工程技术人员的参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

机器人动力学与控制/霍伟编著. —北京:高等教育出版社,2005.1

ISBN 7-04-013978-2

I. 机... II. 霍... III. ①机器人-动力学-研究  
生-教材②机器人控制-研究生-教材 IV. TP24

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第119256号

策划编辑 韩颖 责任编辑 曲文利 封面设计 李卫青  
责任绘图 尹文军 版式设计 史新薇 责任校对 殷然  
责任印制 孔源

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京星月印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2005年1月第1版
印 张	13.5	印 次	2005年1月第1次印刷
字 数	220 000	定 价	22.00元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号:13978-00

# 前 言

近四十年来,机器人制造业与机器人学的研究一直是国际、国内极为重视的高技术领域之一,得到了极其迅速的发展.当前,机器人的应用范围已扩大到人类生产和生活的各个方面,极大地影响和促进了工业、国防和科技事业的发展.

在早期的机器人研究中,与机器人的机械结构相比,其控制用计算机的价格高且运算能力有限,故只能采用极简单的控制方案,难于满足高速、高精度机器人的性能要求.自20世纪70年代以来,随着电子技术与计算机科学的发展,计算机运算能力大大提高而成本不断下降,这就使得人们越来越重视发展各种考虑机器人动力学模型的计算机实时控制方案,以充分发挥出为完成复杂任务而设计得日益精密从而也越加昂贵的机器人机械结构的潜力<sup>[1]</sup>.因此,在机器人研究中,控制系统的设计已显得越来越重要,成为提高机器人性能的关键问题之一.由于机器人控制涉及机器人学、控制理论、力学、计算机控制等多方面的知识,特别是这一研究领域正处于迅速发展之中,大量的文献不断出现,这常常使得初次接触这一领域的人感到难于入手.本书的目的就是为有志于从事机器人控制研究的研究生和科技人员提供一本有价值的入门教材.

本书中详细讲述了关于机器人运动学、动力学及控制的基本问题和基础理论,并附有习题作为练习.考虑到一些研究生和科研人员对力学不太熟悉的情况,书中对所用到的力学知识都做了详细推导.这些都有利于读者系统而扎实地掌握机器人动力学与控制方面的基础理论,以便进一步深入学习及从事有关的科研和应用工作.

本书作为研究生教材,供课内36~40学时使用.课时安排为第1章10学时,第2章12学时,第3章14~18学时.书中的习题分为两类:一类是希望在课程学习过程中完成的,它们或是因书中篇幅所限而未能予以证明的一些重要结论、引理或推论,或是为牢固掌握所学知识,以便进一步学习所需要做的练习;另一类是取自有关文献的难度较大的选做题,这类习题用\*号标出.为了理论上的完整,书中2.6节第四部分给出了用机器人几何参数直接确定其最小惯性参数的理论证明.但这部分证明相当繁琐,在教学中可不讲授,而只要求学生学会使用相关结果即可.学习本书不要求读者具有理论力学及分析力学知识,但要求具有运动稳定

性及线性控制系统理论的基础知识。学习本书的主要参考书为文献[2~4]。

值得说明的是,由于本书着重叙述基础理论以及学时和篇幅的限制,对国内外很多很好的工作都未能提及。参考文献中也只列出了书中直接引用了的文献,一些重要论文及著作并没有全部列出,敬希见谅。

作者所在的北京航空航天大学第七研究室(系统与控制研究室)自20世纪80年代初在高为炳院士领导下开始进行机器人动力学与控制方面的研究,作者也一直在他的指导下从事相关研究工作。高先生1985年自编讲义为硕士研究生开设了“机器人动力学与控制”课程,作者1988年自美国Michigan大学工学院Robot Systems Division进修回国后开始讲授此课程,并结合教学实践对讲义做了多次补充修改。1993年高为炳院士打算与作者合作编写正式教材,但遗憾的是,这一工作因他1994年3月猝然病逝而未能完成。光阴荏苒,至今高先生去世已经十年,愿以此书的出版作为对导师高为炳院士逝世十周年的纪念。

本书中一部分本研究室的科研成果得到国家自然科学基金(No. 69774009, No. 60174003, No. 60334030)、航空科研基金(No. 91F51134)和高校博士点基金(No. 09)资助,作者对此深表谢意。自1997年起,本书初稿开始在北京航空航天大学控制理论与控制工程专业硕士生和部分博士生的教学中试用,历届研究生都对此书提出了许多宝贵的改进意见,作者对他们的热心帮助表示衷心的感谢。

尽管本书是作者基于多年来从事机器人动力学与控制的科研和教学工作的体会编著而成,但由于学识和水平所限,错误及不妥之处一定难免,欢迎广大读者批评指正。

作者

2004年11月

# 目 录

绪论	1
<b>第 1 章 机器人运动学</b>	<b>5</b>
1.1 刚体位置与指向的确定	5
1.2 机器人杆件坐标系的建立	16
1.3 运动学问题	23
1.4 速度问题	31
1.5 加速度问题	46
<b>第 2 章 机器人动力学</b>	<b>51</b>
2.1 用 Lagrange 方程建立自由运动机器人的动力学方程	51
2.2 用 Newton-Euler 方程建立自由运动机器人的动力学方程	63
2.3 自由运动机器人的逆动力学算法	73
2.4 自由运动机器人的正动力学算法	80
2.5 机器人的最小惯性参数及其应用	87
2.6 运动受限机器人模型及其他有关问题	119
<b>第 3 章 机器人控制</b>	<b>123</b>
3.1 概述	123
3.2 独立的 PD 控制	125
3.3 具有重力补偿的 PD 控制	127
3.4 计算力矩法	137
3.5 解出加速度控制	140
3.6 机器人的最优控制	144
3.7 非线性解耦及任意极点方法	149
3.8 基于输入-输出稳定性理论设计的机器人控制器	152
3.9 机器人的自适应控制	157
3.10 机器人的变结构控制	165
3.11 机器人的鲁棒控制	174
3.12 运动受限机器人的位置-力混合控制	181
3.13 多机器人的位置-力混合控制	189
习题	195
参考文献	204

# 绪 论

随着生产和科技的进步,人们需要用机器代替人完成一些人类无法完成或不能高质量完成的任务. 另外,由于市场经济的发展,对增加商品种类、提高质量、降低成本提出了越来越高的要求,产品生产也从单一品种、大批量生产向多品种、小批量过渡. 机器人正是为适应生产自动化及市场应变性的更高要求而出现的.

## 一、机器人的定义

机器人(Robot)一词来源于1920年捷克作家 Karel Capek 的科幻话剧《Rossum's Universal Robot》. 剧中有一批听命于人的、能从事各项劳动的机器,名叫 Robot,我国译为“机器人”.

在当今工业和科研领域中所使用的机器人,一般不具有人的外貌和全部功能,而是一类能代替人从事多种工作的高度灵活的自动化机械的统称. 目前世界上对机器人尚无统一的严格定义,美国机器人协会(Robot Institute of American)定义机器人为:“机器人是一种用来移动材料、零件、工具或特定装置的可重新编程的多功能操作器,可以通过改变编程运动来执行不同的任务.”

由上所述可看出,机器人是为完成多种任务而设计的,因此它必定具有能灵活执行多种任务的机械结构. 通常它被设计成类似于人手臂的结构,所以又常被称为机器人操作手(Robot Manipulator)或机械臂(Robot Arm).

## 二、机器人的发展简史

早在第二次世界大战时期,为操作放射性材料,美国 Argonne 国家实验室设计了连杆关节型的遥控操作手. 为提高操作精度,1947年又研制了电动伺服控制的遥控操作手. 1949年,为制造先进飞机的需要,美国空军资助 MIT(麻省理工学院)辐射实验室研制数控铣床,并于1953年得到成功. 关节型遥控操作手和数控铣床的研究为机器人的产生准备了技术基础.

1954年美国 George Devol 巧妙地将遥控操作手的连杆机构与数控铣床的伺服轴连接起来,设计制成了世界上第一台可编程的通用工业

机器人,并获得了专利.这种机器人可事先将要完成的任务用编程输入的方式或用手带动机器人末端夹持器(End Effector,简称手端)顺序通过工作位置的方式将数据依次存入记忆装置,工作时机器人即可按所记忆程序完成指定的任务.通过改变所记忆的程序,就可用同一机器人完成不同的工作任务,即这种机器人具有“示教-再现”和“可编程”的功能.1956年 Joseph Engelberger 购买了 Devol 的专利成立了 Unimation 公司.1961年该公司制成了第一台 Unimate 机器人.同时,美国 AMF(机床与铸造公司)设计生产了 Versatran 机器人.这两种机器人在汽车生产线上卓有成效的应用,使机器人开始作为商品在世界市场上销售,西欧的工业发达国家及日本等也纷纷从美国引进机器人技术.

机器人在工业上的成功应用也极大鼓舞和促进了机器人研究的深入进行. MIT 的 Lincoln 实验室于 1961 年研制成功利用力反馈信息工作的机器人,并于 1963 年开始研究机器人视觉系统.1965 年美国 Stanford 大学建立了实验室进行机器人研究,并于 1971 年制成了 Stanford 臂(Stanford Arm),1973 年开发了机器人编程语言 WAVE.

自 20 世纪 70 年代以来,随着微电子和计算机技术的飞速发展,以及机器人研究的不断深入,机器人性能大幅度提高,成本不断下降,使机器人产业蓬勃兴起,机器人研究也掀起了高潮.1978 年 Unimation 公司开始生产性能优良的 PUMA (Programm-able Universal Manipulator for Assembly) 系列机器人(其基本结构参见图 0-1),1979 年日本研制了适用于垂直装配的 SCARA (Selective Compliant Articulated Robot) 机器人.这些机器人的出现促进了机器人应用领域的进一步扩大.当前,世界上已有几百种不同类型、数以万计的机器人被广泛用于生产和科研.

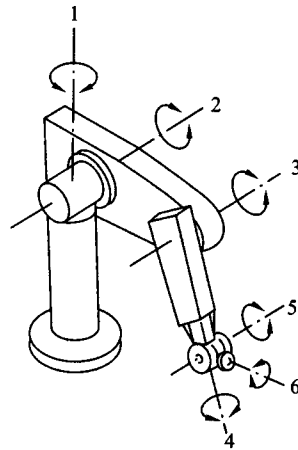


图 0-1

在我国,机器人研究与应用是在 20 世纪 70 年代末逐渐发展起来的.机器人研究先后列入国家“七五”、“八五”科技发展计划及“863”计划等.经过二十多年的不懈努力,取得显著进展,其中一些成果已接近或达到国际先进水平.中国已自行研制出许多不同种类和用途的机器人用于生产、国防及社会生活的某些方面.



### 三、机器人的分类

可以按许多标准将机器人分类。最常见的是按照发展程度将机器人分为三代:

第一代机器人是以“示教-再现”方式工作的机器人。这种机器人目前已在生产中得到广泛应用。

第二代机器人是具有一定传感装置,能利用所获取的环境与操作对象的简单信息进行反馈控制的机器人。这种机器人目前已有少量应用。

第三代机器人是具有多种感知功能,可进行推理判断,能在未知工作环境中独立工作的机器人。这种机器人尚处于试验阶段。

也常按功能将机器人分为:

工业机器人(Industrial Robot),它是应用于工业生产自动化领域的机器人。这类机器人绝大多数是按“示教-再现”方式进行重复作业的第一代机器人,少数具有第二代机器人的功能。

遥控机器人(Telerobot),它是接受遥控指令而进行远距离作业的机器人,主要用于宇航、海底、核工业及真空等领域。

智能机器人(Intelligent Robot),它是具有运动、感知、学习、适应、逻辑判断及人机通信功能的机器人,属于第三代机器人。

### 四、机器人领域的主要研究方向及本书内容

机器人领域的研究方向主要有:

- ① 机器人机械结构设计.
- ② 机器人传感器研究.
- ③ 机器人运动轨迹设计与规划.
- ④ 机器人运动学、动力学与控制.
- ⑤ 机器人控制语言.
- ⑥ 机器人视觉、听觉等系统的研究.
- ⑦ 机器人智能研究.

从中可看出,机器人研究综合了机械学、电子学、力学、自动控制、计算机、人工智能等多种学科,已形成了一个新的综合性学科——机器人学。

本书不是全面论述机器人学的著作,而是着重讲述机器人控制理论问题及相关的机器人运动学和动力学基础的教材。书中内容不涉及具体的控制器实现技术,以及有多种传感器的智能机器人或移动机器人控制问题。本书以由刚性杆件串联而成的工业机器人为对象,详细介绍了其

运动学、动力学及控制研究中的基本概念、方法和结论。学习这些内容不仅是从事机器人控制研究所必需,也可为进一步研究智能机器人、移动机器人、乃至更一般的复杂非线性动力学系统的控制问题打下坚实的理论基础。

# 第1章 机器人运动学

## 1.1 刚体位置与指向的确定

为使机器人能完成给定的工作任务,需要知道其末端夹持器在三维空间中的状况.末端夹持器作为具有一定体积的刚体,与一个可不考虑其体积的质点不同.要确定刚体在空间的状况,不仅要知道刚体的位置,还要知道其指向(也称方位或姿态).通常的方法是建立一个和刚体固连的坐标系(简称刚体坐标系),用此坐标系相对参考坐标系的位置和指向来刻画刚体的位置和指向.

### 一、刚体位置的确定

建立和刚体固连的坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$ ,则刚体上任一点  $Q$  在刚体坐标系中的位置矢量(简称矢径) $r$  都是已知的.要确定刚体上点  $Q$  在参考坐标系  $OXYZ$  中的位置,只要知道刚体坐标系原点  $O_1$  的矢径  $p$ ,则立即可知点  $Q$  在参考坐标系  $OXYZ$  中的矢径为  $p+r$ (参看图 1-1).这表明:刚体的位置可用刚体坐标系原点的矢径来刻画.只要知道此矢径,即可确定刚体上任一点的位置.

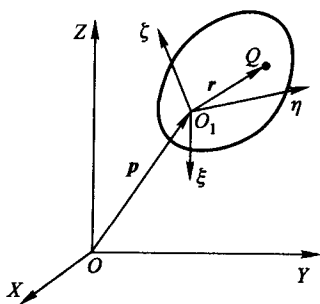


图 1-1

在本书中,所有坐标系均为右手坐标系.除非特别说明,一般用大写英文字母或希腊字母表示坐标轴;用黑体英文字母表示矢量;用带左上标

的黑体英文字母表示矢量的坐标表达式,其中左上标用来标示出相应的坐标系.

## 二、刚体指向的确定

刚体的指向可用刚体坐标系与参考坐标系间的相对位置来刻画.具体方法是:记刚体坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$  (简称为系 1) 坐标轴上的三个单位矢量  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{a}$  在参考坐标系  $OXYZ$  (简称为系 0) 中的坐标表达式为

$${}^0\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{o} = \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

则可用  $3 \times 3$  矩阵

$${}^0\mathbf{R}_1 \triangleq \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = [{}^0\mathbf{n}, \quad {}^0\mathbf{o}, \quad {}^0\mathbf{a}] \quad (1-1)$$

来表示刚体相对参考坐标系的指向.式中  $\triangleq$  表示定义.

另一方面,当已知参考坐标系 0 的情况下,给定一个  ${}^0\mathbf{R}_1$ ,即能确定出坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$  的指向.这表明坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$  的指向与矩阵  ${}^0\mathbf{R}_1$  是一一对应的.

对于矩阵  ${}^0\mathbf{R}_1$ ,需要说明以下几点:

① 若记  $X, Y, Z$  轴上的单位矢量为  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ,则由式(1-1)知

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} & \mathbf{o} \cdot \mathbf{x} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{o} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{o} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) & \cos(\mathbf{o}, \mathbf{x}) & \cos(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) & \cos(\mathbf{o}, \mathbf{y}) & \cos(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) & \cos(\mathbf{o}, \mathbf{z}) & \cos(\mathbf{a}, \mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

式中,  $\cos(\cdot, \cdot)$  表示两矢量间夹角的余弦,故矩阵  ${}^0\mathbf{R}_1$  又称为系 1 (即坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$ ) 相对系 0 (即坐标系  $OXYZ$ ) 的方向余弦矩阵.

② 尽管  $3 \times 3$  方向余弦矩阵  ${}^0\mathbf{R}_1$  中有 9 个元素,但其中只有 3 个元素是独立的,因为这时存在 6 个约束方程

$$\|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{o}\| = \|\mathbf{a}\| = 1, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{o} = \mathbf{a}$$

式中  $\|\cdot\|$  表示矢量的模.

③  ${}^0\mathbf{R}_1$  是把矢量在系 1 中的坐标表达式变为在系 0 中的坐标表达式的变换矩阵.事实上,若记矢量  $\mathbf{b}$  在  $OXYZ$  和  $O_1\xi\eta\zeta$  中的坐标表达式分别为

$${}^0\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_o \\ b_a \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} b_x &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = (b_n \mathbf{n} + b_o \mathbf{o} + b_a \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} \\ &= b_n (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + b_o (\mathbf{o} \cdot \mathbf{x}) + b_a (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \\ &= [\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{o} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}] \begin{bmatrix} b_n \\ b_o \\ b_a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned} b_y &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{o} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}] \begin{bmatrix} b_n \\ b_o \\ b_a \end{bmatrix} \\ b_z &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}, \mathbf{o} \cdot \mathbf{z}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{z}] \begin{bmatrix} b_n \\ b_o \\ b_a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} & \mathbf{o} \cdot \mathbf{x} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{o} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{o} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_o \\ b_a \end{bmatrix}$$

即

$${}^0\mathbf{b} = {}^0\mathbf{R}_1 \mathbf{b}$$

④  ${}^0\mathbf{R}_1$  是正交矩阵, 即有  $({}^0\mathbf{R}_1)^{-1} = ({}^0\mathbf{R}_1)^T$ , 亦即  ${}^1\mathbf{R}_0 = ({}^0\mathbf{R}_1)^T$  (习题1-1).

### 三、旋转变换

#### 1. 欧拉公式

设有坐标系0, 将其绕着过系0原点的一轴转动一个角度后得到一个新的坐标系1, 以下研究求系1相对系0的方向余弦矩阵的问题.

记转轴上单位矢量  $\mathbf{k}$  在系0中坐标表达式为  ${}^0\mathbf{k} \triangleq [k_x, k_y, k_z]^T$ , 绕此轴的转角为  $\theta$ , 则有以下欧拉公式(习题1-3):

$${}^0\mathbf{R}_1 = (\cos \theta) \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) {}^0\mathbf{k} {}^0\mathbf{k}^T + (\sin \theta) \mathbf{S}({}^0\mathbf{k}) \triangleq \mathbf{R}_k(\theta)$$

(1-2)

式中  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,

$$\mathbf{S}({}^0\mathbf{k}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}$$

称为 ${}^0k$ 所对应的叉乘矩阵. 因为很容易验证: 对任一 ${}^0b$ , 均有 $S({}^0k) {}^0b = {}^0k \times {}^0b$ . 显然, 反对称矩阵 $S({}^0k)$ 是与 ${}^0k$ 一一对应的.

## 2. 旋转矩阵

可以证明: 任意给定一个坐标系及希望它达到的指向, 总可以找到过一个坐标系原点的轴(用轴上的单位矢量 $k$ 表示)和一个转角 $\theta$ , 使得坐标系绕 $k$ 轴转动 $\theta$ 角后具有所希望的指向. 换句话说: 任给一方向余弦矩阵 ${}^0R_1$ , 总可找到单位矢量 $k$ 和角 $\theta$ , 使得 $R_2(\theta) = {}^0R_1$ (习题1-8). 这表明: 方向余弦矩阵可用来描述坐标系的旋转. 若记旋转前的坐标系为系0, 旋转后得到的新坐标系为系1, 则 ${}^0R_1$ 又被称为从系0到系1的旋转矩阵.

另外, 若一矢量 $b$ 在系0中的坐标表达式为 ${}^0b$ , 将 $b$ 绕一轴 $k$ 转动 $\theta$ 角, 得到一个新的矢量 $b'$ . 记 $b'$ 在系0中的坐标系表达式为 ${}^0b'$ , 以下研究 ${}^0b$ 与 ${}^0b'$ 间的关系. 建立一坐标系1与矢量 $b$ 固连且在 $b$ 转动前与系0重合, 则当 $b$ 转动时系1也随之转动. 当转动完成后, 从系0到系1的转动可用旋转矩阵 ${}^0R_1$ 表示. 因为系1与矢量 $b$ 固连, 故有 ${}^1b' = {}^0b$ , 从而知

$${}^0b' = {}^0R_1 {}^1b' = {}^0R_1 {}^0b$$

这个公式表明: 旋转矩阵 ${}^0R_1$ 可表示矢量的旋转变换, 即它是矢量旋转前后的坐标表达式间的变换矩阵.

## 3. 基本旋转矩阵

绕坐标轴的转动称为基本转动. 绕 $X, Y, Z$ 轴的三个基本转动所对应的旋转矩阵称为基本旋转矩阵. 由欧拉公式(1-2)知这3个基本旋转矩阵为

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4. 连续相对转动的合成

设一坐标系相对坐标系0转动后得到坐标系1, 再相对坐标系1转动后得到坐标系2. 由于这种转动每次都是相对所得到的前一坐标系而进行的, 故常称为相对转动. 记从系0到系1的旋转矩阵为 ${}^0R_1$ , 从系1到系2的旋转矩阵为 ${}^1R_2$ , 以下研究如何求出从系0到系2的旋转矩阵 ${}^0R_2$ .

记任一矢量 $b$ 在系0、系1和系2中的坐标分别为 ${}^0b$ 、 ${}^1b$ 和 ${}^2b$ , 则由定义知

$${}^0b = {}^0R_1 {}^1b, \quad {}^1b = {}^1R_2 {}^2b, \quad {}^0b = {}^0R_2 {}^2b$$

故

$${}^0\mathbf{b} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{b} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{b} = {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{b}$$

由  $\mathbf{b}$  的任意性知:  ${}^0\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2$ . 上述推理可推广到多次连续的相对转动, 从而得出以下结论: 连续相对转动的旋转矩阵可按相对转动的次序连续右乘各次转动的旋转矩阵来得到.

### 5. 欧拉角

要使一坐标系经旋转后达到一给定的指向, 用求转轴  $k$  和转角  $\theta$  的方法是很麻烦的(参见习题 1-8 的结果). 但可以证明: 每个任意给定的指向都可通过 3 个连续的绕坐标轴的相对转动来实现, 即: 任一方向余弦矩阵等于 3 个基本旋转矩阵的乘积. 这 3 个基本旋转矩阵的转角称为欧拉角.

例如, 坐标系  $OXYZ$  可经过以下 3 个连续绕坐标轴的相对转动变为坐标系  $O\xi\eta\zeta$ (参看图 1-2):

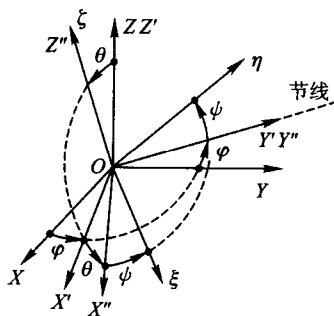


图1-2

第1步: 绕  $Z$  轴转  $\varphi$  角, 坐标系  $OXYZ$  变为  $OX'Y'Z'$  (其中  $Z' = Z$ );

第2步: 绕新的  $Y$  轴 ( $Y'$  轴) 转  $\theta$  角, 坐标系  $OX'Y'Z'$  变为  $OX''Y''Z''$  (其中  $Y'' = Y'$ );

第3步: 绕新的  $Z$  轴 ( $Z''$  轴) 转  $\psi$  角, 坐标系  $OX''Y''Z''$  变为  $O\xi\eta\zeta$ .

这里的 3 个转角  $\{\varphi, \theta, \psi\}$  即为欧拉角. 由前所述的连续相对转动时旋转矩阵的求法, 可以用欧拉角表示出从坐标系  $OXYZ$  (系 0) 到坐标系  $O\xi\eta\zeta$  (系 1) 的旋转矩阵

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} c\varphi c\theta c\psi - s\varphi s\psi & -c\varphi c\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta \\ s\varphi c\theta c\psi + c\varphi s\psi & -s\varphi c\theta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

式中,  $c\varphi \triangleq \cos \varphi$ ,  $s\varphi \triangleq \sin \varphi$ ,  $c\theta \triangleq \cos \theta$ ,  $s\theta \triangleq \sin \theta$ ,  $c\psi \triangleq \cos \psi$ ,  $s\psi \triangleq \sin \psi$ .

对于欧拉角,需要说明的是:

① 是否任一指向都可用3个欧拉角来实现,即任给一指向,如何确定3个欧拉角.对于这一问题的回答是肯定的.具体方法是:首先由图1-2知 $\theta$ 是Z轴与 $\zeta$ 轴间的夹角.再找出 $\xi\eta$ 平面与XY平面的交线 $\bar{O}Y'$ (称为节线),显然 $\varphi$ 是Y轴与节线间的夹角, $\psi$ 是节线与 $\eta$ 轴间的夹角.当然,也可以利用解析的方法求出3个欧拉角(习题1-10).

② 欧拉角不是唯一确定的.因为易知欧拉角 $\{\varphi, \theta, \psi\}$ 与 $\{\varphi + \pi, -\theta, \psi + \pi\}$ 对应于同一指向.

③ 欧拉角的定义不是唯一的.在定义欧拉角时,三次转动的轴的选取及转动的顺序是至关重要的.上述定义的欧拉角是由依次绕Z, Y, Z轴的三个相对转动得到的,故常称为ZYZ欧拉角.类似地,还可定义ZXZ欧拉角, ZYX欧拉角(习题1-11).

## 6. 齐次变换矩阵

(1) 点在不同坐标系中的坐标变换

设点Q在坐标系OXYZ(系0)和 $O_1\xi\eta\zeta$ (系1)中的坐标分别为 ${}^0r$ 和 ${}^1r$ (参看图1-3).记系1的原点 $O_1$ 在系0中的坐标为 ${}^0p$ ,系1三个轴上的

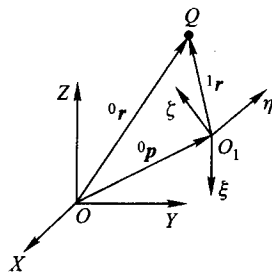


图1-3

单位矢量分别为 $n, o, a$ ,则有

$$\begin{aligned} {}^0r &= {}^0(\bar{OQ}) = {}^0p + {}^0(\bar{O_1Q}) \\ &= {}^0p + [{}^0n, {}^0o, {}^0a] {}^1r = {}^0p + {}^0R_1 {}^1r \end{aligned} \quad (1-4)$$

(2) 齐次变换矩阵

利用点的坐标变换公式(1-4)进行多个坐标系间的坐标变换时是



较繁琐的。例如：当已知系1相对系0的位置和指向及系2相对系1的位置和指向时，求点Q在系2和系0间的坐标变换关系。记点Q在系0，系1和

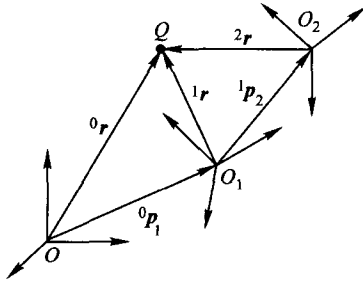


图1-4

系2中的坐标分别为 ${}^0r$ ， ${}^1r$ 和 ${}^2r$ (参看图1-4)，则由

$${}^0r = {}^0p_1 + {}^0R_1 {}^1r, \quad {}^1r = {}^1p_2 + {}^1R_2 {}^2r$$

知

$${}^0r = {}^0p_1 + {}^0R_1 ({}^1p_2 + {}^1R_2 {}^2r) = {}^0p_1 + {}^0R_1 {}^1p_2 + {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2r \quad (1-5)$$

为简化多个坐标系间点的坐标变换式，利用式(1-4)可得

$$\begin{bmatrix} {}^0r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0n & {}^0o & {}^0a & {}^0p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1r \\ 1 \end{bmatrix}$$

此式可简记为

$${}^0\bar{r} = {}^0A_1 {}^1\bar{r}$$

式中， ${}^0\bar{r}$ ， ${}^1\bar{r}$ 称为点Q在系0和系1中的齐次坐标； $4 \times 4$ 矩阵 ${}^0A_1$ 为从系0到系1的齐次变换矩阵。

这里值得说明的是：

① 关于齐次坐标的定义，若以空间中一已知点O为参考点，则任一点Q的位置由矢径 $r = \overrightarrow{OQ}$ 完全确定。因此只要知道点Q的方向(即 $\overrightarrow{OQ}$ 方向上任一以O为起点的矢量 $a_0$ )和Q与O间的距离(即比值 $\alpha \triangleq \frac{\|a_0\|}{\|\overrightarrow{OQ}\|}$ )，

即可确定出 $r = \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{\alpha} a_0$ 。因此称点Q的方程为

$$\alpha r = a_0 \quad (1-6)$$

这个方程(即点Q)由 $a_0$ 和 $\alpha$ 唯一确定。在数学上，坐标被称为齐次的是指用任一非零常数乘此坐标后，坐标所代表的实体不变。根据点的方程(1-6)，定义点Q的齐次坐标为 $\begin{bmatrix} a_0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ 。易证明这一坐标确是齐次的，因为