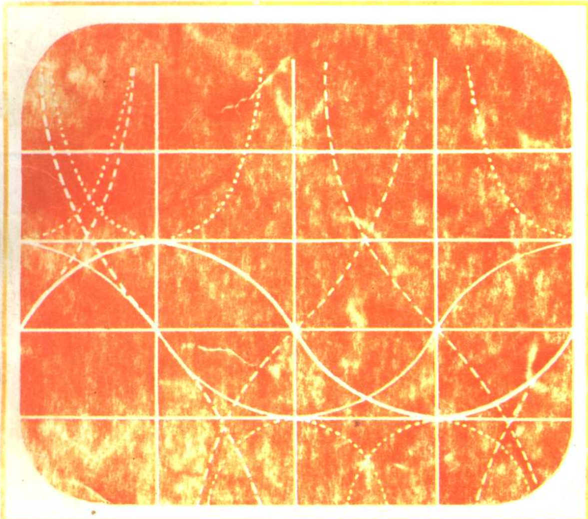

南秀全　余石

奇数、偶数、完全平方数

奇数、偶数、完全平方数

南秀全　余　石

上 海 教 育 出 版 社

奇数、偶数、完全平方数

南秀全　余　石

上海教育出版社出版发行

（上海永福路 123 号）

（邮政编码：200031）

各地新华书店经销　　上海东华印务公司印刷

开本 787×1092　1/32　印张 6.25　字数 133,000

1998 年 1 月第 1 版　　1998 年 1 月第 1 次印刷

印数 1－5,150 本

ISBN 7-5320-5432-2/G·5674　　定价：6.00 元

前　言

整数可以分为两大类：被 2 除余 1 的属于一类，被 2 整除的属于另一类，前类中的数叫做**奇数**，后类中的数叫做**偶数**.通过分析整数的奇偶性来论证问题的方法称为**奇偶分析法**.奇偶性分析是数学奥林匹克解题的重要方法之一，在中国数学会普及工作委员会制定的《初中数学竞赛大纲》中已作了明确的规定："奇数和偶数，奇偶性分析，奇偶的特殊表述法：染色法，0、1 法，+1、−1 等表述法"，本书正是按竞赛大纲的这些要求，通过对近年来国内外数学竞赛中典型的试题加以分析，来阐述奇偶分析法在解题中的作用以及怎样利用奇偶性分析法来解竞赛题.

"完全平方数"在初中数学竞赛大纲中也作了要求，在本书的最后一节，较为系统地介绍了完全平方数的性质，以及在解各级竞赛题中的应用.

由于本人水平有限，加上时间仓促，书中不足之处在所难免，诚请同仁们不吝赐教.

作　者

1997 年元月 10 日

目　录

一、奇数和偶数的基本性质

我们知道，一切整数可分为两大类：奇数类和偶数类. 用整除的术语来说，凡是能被 2 整除的整数叫做偶数，例如 0，±2，±4，±6，…，特别要注意 0 是偶数，任何偶数都可以表示成 $2n$ 的形式. 不能被 2 整除的整数，叫做奇数，例如 ±1、±3，±5，…，任何奇数都可以表示成 $2n+1$ 的形式，这里 n 为整数（通常记作 $n\in Z$，Z 表示整数集）.

奇数和偶数有许多十分明显而又十分简单的性质. 主要性质有：

性质 1 奇数≠偶数；奇数+偶数≠0.

性质 2 奇数±奇数=偶数；偶数±偶数=偶数；奇数±偶数=奇数.

性质 3 奇数×奇数=奇数；奇数×偶数=偶数；偶数×偶数=偶数.

性质 4 奇数个奇数之和是奇数；偶数个奇数之和是偶数；任意有限个偶数之和是偶数.

性质 5 任意有限个奇数之积是奇数；偶数与任意整数之积是偶数.

性质 6 若干个整数的乘积是奇数，则其中每一个因子都是奇数；若干个整数之积是偶数，则其中至少有一个因子是偶数.

性质 7 两个整数的和与差的奇偶性相同.

推论 若干个整数的和与差的奇偶性相同.

以上几条性质都很简单，这里就不证明了. 为了叙述方便，我们把被 b 除余 r（其中 b 是不等于 0 的整数，r 是适合 $0\leqslant r<|b|$ 的整数）的整数写作 $bq+r$（其中 $q\in Z$），例如 $4q+1$ 或 $4k+1$ 就表示被 4 除余 1 的整数.

性质 8 奇数的平方被 4 除余 1，偶数的平方是 4 的倍数.

$$\because\quad (2n+1)^2=4n^2+4n+1$$
$$=4(n^2+n)+1,$$
$$(2n)^2=4n^2.$$

推论 奇数的平方被 8 除余 1.

$$\because\quad (2n+1)^2=4(n^2+n)+1$$
$$=4n(n+1)+1.$$

其中 n，$(n+1)$ 是两个连续整数，必有一个是偶数.

性质 9 所有形如 $4k+3$ 的数不能表示为两个整数的平方和.

$$\because\quad (2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+m+n^2+n)+2;$$
$$(2m)^2+(2n)^2=4(m^2+n^2);$$
$$(2m)^2+(2n+1)^2=4(m^2+n^2+n)+1.$$

即两个奇数的平方和为 $4k+2$ 型，两个偶数的平方和为 $4k$ 型，一个奇数和一个偶数的平方和为 $4k+1$ 型，因此，没有两个整数的平方和为 $4k+3$ 型.

例如，由此性质可以得到方程 $x^2+y^2=1999$ 没有整数解.

性质 10 所有形如 $4k+2$ 型的数不能表示为两个整数的平方差.

$$\because\quad x^2-y^2=(x+y)(x-y),$$

由性质 7，$x+y$ 与 $x-y$ 具有相同的奇偶性.

若 $x+y$ 和 $x-y$ 都是奇数，则 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ 也是奇数，即为 $4k+1$ 或 $4k+3$ 型；

若 $x+y$ 和 $x-y$ 都是偶数，则 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ 为 4 的倍数，即为 $4k$ 型.

因此，没有两个整数的平方差为 $4k+2$ 型.

例如，由此性质可以得到方程 $x^2-y^2=1998$ 没有整数解.

二、奇偶分析法在解题中的应用

利用奇数和偶数的分类及其特殊性质，可以简捷地求解一些与整数有关的数学题，包括一些看上去比较难的问题. 特别是一些趣味数学问题和数学竞赛题，只要对其中的数量关系作简单的奇偶性分析，问题就能迎刃而解. 下面介绍整数的奇偶性在解题中的各种应用.

1. 判别整数的奇偶性

［**例 1**］ 在 1，2，…，1997，1998，1999 这 1999 个数的前面任意添加一个正号或负号，问它们的代数和是奇数还是偶数？（根据 1989 年湖北省黄冈地区初中数学竞赛题改编）

解 因为两个整数的和与差的奇偶性相同，所以不论正负号如何添加，它们的代数和的奇偶性都与 $1+2+\cdots+1998+1999$ 的奇偶性相同.

$$\begin{aligned}\because\quad & 1+2+\cdots+1998+1999 \\ &= (999\text{ 个偶数}) + (1000\text{ 个奇数}) \\ &= \text{偶数},\end{aligned}$$

∴ 任意添加正负号后的代数和一定是偶数.

［**例 2**］ 设 n 为奇数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列，求证：积 $(1-a_1)(2-a_2)\cdots(n-a_n)$ 必为偶数.（1906 年匈牙利数学竞赛题）

证明 用反证法. 若 $(1-a_1)(2-a_2)\cdots(n-a_n)$ 为奇数，则

每个因数 $1-a_1,2-a_2,\cdots,n-a_n$ 皆为奇数. 又因为 n 为奇数，而

$$(1-a_1)+(2-a_2)+\cdots+(n-a_n)$$
$$=(1+2+\cdots+n)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0,$$

故得奇数=0,矛盾.

$\therefore\quad (1-a_1)(2-a_2)\cdots(n-a_n)$ 必为偶数.

说明 本例还可以推广为如下的命题:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 是任意 $2n+1$ 个整数,$b_1,b_2,\cdots,b_{2n+1}$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 的任意一个排列,那么乘积 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_{2n+1}-b_{2n+1})$ 必是偶数.

[**例 3**] 有 29 个省市的乒乓球队参加友谊邀请赛,能否安排出这样的比赛场次,使每个球队恰好参加奇数次比赛?为什么?

解 不能作出这样的安排. 否则,假设总的比赛场次为 n 场,由于每一场比赛由两个队进行,可以出场比赛的共有 $2n$ 个队次. 另一方面,每个球队恰好参加奇数次比赛,于是 29 个奇数之和是奇数,这就是说,总计参加比赛的队次应为奇数,但奇数不等于偶数 $2n$,矛盾. 由此得证.

[**例 4**] 求证:不论在什么社交场合下,握过奇数次手的人数总是偶数.

证明 假设在社交场合中握了奇数次手的共有 n 人,握了偶数次手的共有 m 人,那么它们握手的总计人次是 n 个奇数加 m 个偶数,可见它们的握手总人次与 n 是同奇偶的;另一方面,握手是相互的,每握一次手,按人次计算就是两次,所以握手的总人次必是偶数,可见 n 必是偶数,证毕.

说明 由例 3、例 4 已看到两个乒乓球队比赛与两人握

手，在分别计算它们的队次与人次上有类似之处. 我们将球队（人）表示为平面上的点，如果两队（人）比赛（握手），就在表示它们的两点之间连一直线段，否则，就不连线段，于是可得如下的命题：

［**例 5**］ 设平面图上共有有限个点，没有三点共线，且其中有些点之间用直线相连. 如果图中一点恰与其他 m 个点有连线，当 m 为偶（或奇）数时，那么称这一点为偶（或奇）点. 求证：在这一平面图上，奇点个数必是偶数.

证明 假设平面图中共有 n 条直线段，现对 n 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时，则易见恰好有两个奇点，命题成立；假设当 $n=k$ 时命题成立，现需证命题对 $n=k+1$ 时也成立，为此，任取图中一条线段 AB，那么点 A 与点 B 的奇偶性以及在图中去掉线段 AB 后，点 A，B 的奇偶性如下表：

原图中 点 A	原图中 点 B	去掉线段 AB 的图中 点 A	去掉线段 AB 的图中 点 B	点的变化数
奇	奇	偶	偶	-2
奇	偶	偶	奇	0
偶	奇	奇	偶	0
偶	偶	奇	奇	2

从表中可见，去掉线段 AB 后，奇点的变化数是偶数，又因原图中去掉了线段 AB 后的新图中，共有 k 条线段了，于是由归纳假设知，新图中共有偶数个奇点，因而原图中也有偶数个奇点，由此命题得证.

［**例 6**］ 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{64}$ 是自然数 1，2，…，64 的一种排列，按下列方式构作 b_i，c_i，d_i，…，x.

$$
\begin{array}{l}
a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad a_4 \qquad \cdots \quad a_{63} \qquad a_{64} \\
b_1 = |a_1 - a_2| \quad b_2 = |a_3 - a_4| \ \cdots \ b_{32} = |a_{63} - a_{64}| \\
\qquad c_1 = |b_1 - b_2| \ \cdots \quad c_{16} = |b_{31} - b_{32}| \\
\qquad\qquad \cdots\cdots \\
\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad x
\end{array}
$$

求证：x 为偶数.（1979 年北京市中学数学竞赛题）

证明 易见，$b_1, b_2, \cdots, b_{32}$ 的奇偶性与 $a_1+a_2, a_3+a_4, \cdots, a_{63}+a_{64}$ 的奇偶性相同. $c_1, c_2, \cdots, c_{16}$ 的奇偶性与 $a_1+a_2+a_3+a_4, a_5+a_6+a_7+a_8, \cdots, a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}$ 的奇偶性相同.……依此类推，x 与 $a_1+a_2+\cdots+a_{64}$ 的奇偶性相同. 而 $a_1+a_2+\cdots+a_{64}=1+2+\cdots+64=(1+64)\times 32$ 是偶数，故 x 是偶数.

说明 此题亦可由 x 倒推反证. 若 x 是奇数，则按题所述的计算过程中，倒数第二步里的两个数必是一奇一偶，而倒数第三步里的四个数只能是三奇一偶，或是一奇三偶，也就是说，这四个数里必有奇数个奇数. 仿此推知，在计算过程的每一步里，只能有奇数个奇数，最后推知原数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{64}$ 中也有奇数个奇数，但事实上，1，2，…，64 中有 32 个奇数. "奇数＝偶数"产生矛盾，故反设不真. 即 x 只能是偶数.

［**例 7**］ 设有一条平面闭折线 $A_1A_2\cdots A_nA_1$，它的所有顶点 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是格点（格点是指纵横坐标都是整数的点），且 $|A_1A_2|=|A_2A_3|=\cdots=|A_{n+1}A_n|=|A_nA_1|$. 求证：$n$ 不可能是奇数.

证明 设顶点 A_i 的坐标是 (x_i, y_i)，其中 x_i 及 $y_i(i=1,2,$

$\cdots,n)$都是整数. 由题设有

$$\begin{aligned}&(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\&\quad=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=\cdots\\&\quad=(x_{n-1}-x_n)^2+(y_{n-1}-y_n)^2\\&\quad=(x_n-x_1)^2+(y_n-y_1)^2\\&\quad=M,\end{aligned}$$

其中 M 是固定整数. 令

$$\begin{aligned}&\alpha_1=x_1-x_2,\alpha_2=x_2-x_3,\cdots,\\&\alpha_{n-1}=x_{n-1}-x_n,\alpha_n=x_n-x_1;\\&\beta_1=y_1-y_2,\beta_2=y_2-y_3,\cdots,\\&\beta_{n-1}=y_{n-1}-y_n,\beta_n=y_n-y_1,\end{aligned}$$

则

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0, \tag{①}$$

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=0, \tag{②}$$

$$\alpha_1^2+\beta_1^2=\alpha_2^2+\beta_2^2=\cdots=\alpha_n^2+\beta_n^2=M. \tag{③}$$

下面对①,②,③作奇偶性分析. 不妨设 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$中至少有一个是奇数. 否则,若 α_i,β_i 都是偶数,可设 $\alpha_i=2^{m_i}t_i,\beta_i=2^{k_i}t_i'(i=1,2,\cdots,n)$,其中 t_i,t_i'是奇数. m 是 $2n$ 个数:$m_1,m_2,\cdots,m_n,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中最小的数,用 2^m 去除 α_i,β_i,那么 $\dfrac{\alpha_i}{2^m},\dfrac{\beta_i}{2^m}$中至少有一个奇数.

为确切起见,设 α_1 是奇数. 由 $\alpha_1^2+\beta_1^2=M$,则 $M=4k+1$ 或 $M=4k+2$(k 为整数).

若 $M=4k+1$,由③知,所有的 α_i,β_i 必为一奇一偶. 再由①和②,有

$$\begin{aligned}0&=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n\\&=\text{偶数}+n\text{ 个奇数之和}.\ (n\text{ 为偶数})\end{aligned}$$

若 $n=4k+2$，则 α_i 和 β_i 必是奇数.

$0=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n$ 个奇数之和.（n 是偶数）

综上讨论，可知 n 必为偶数，不可能是奇数.

［**例 8**］ 求证：前 n 个自然数的乘积能被它们的和整除的充要条件是：$n+1$ 不是一个奇素数.（1992 年加拿大数学奥林匹克试题）

证明 先证必要性：因 $1+2+\cdots+n$ 能整除 $n!$，即 $\left.\frac{n(n+1)}{2}\right| n!$. 若 $n+1$ 是奇素数，那么 $n+1$ 不整除 $n!$，从而 $\frac{n}{2}(n+1)\nmid n!$，矛盾. $\therefore n+1$ 不是奇素数.

再证充分性：当 $n+1=2$ 时，即 $n=1$ 时，结论显然成立. 当 $n+1>2$ 时，由于 $n+1$ 不是奇素数，因此 $n+1$ 是一个偶数，从而 $\frac{n+1}{2}\leqslant n-1$（$\because n\geqslant 3$），于是

$$\left.\frac{n+1}{2}\right|(n-1)!,\quad \left.\frac{n(n+1)}{2}\right|n!,$$

即 $1+2+\cdots+n$ 整除 $n!$

2. 判别整数的整除性

［**例 1**］ 求证：3^n+1 能被 2 或 2^2 整除，而不能被 2 的更高次幂整除.（1909 年匈牙利数学竞赛题）

分析 只要证明 3^n+1 是 2 的奇数倍或 4 的奇数倍，可将 n 分成奇数和偶数分别讨论.

证明 当 n 为偶数时，设 $n=2k$.

$$\because\quad 3^n+1=3^{2k}+1=9^k+1=(8+1)^k+1$$
$$=(8m+1)+1=2(4m+1),$$

$$\therefore\quad 2\mid(3^n+1).$$

当 n 为奇数时,设 $n=2k+1$,

$$\because\quad 3^{2k+1}+1=3\cdot 3^{2k}+1=3(8m+1)+1$$
$$=4(6m+1),$$
$$\therefore\quad 2^2|(3^n+1).$$

由于 $4m+1,6m+1$ 都是奇数,所以 3^n+1 不能被 2 的更高次幂整除.故不论 n 为奇数,还是偶数,命题均成立.

[**例 2**] 有 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,它们中的每一个数要么是 1,要么是 -1.若 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$,求证 n 是 4 的倍数.(1959 年莫斯科数学竞赛题)

证明 先证 n 为一偶数.$\because$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$不外$+1$ 与-1两种情况,$\therefore$ 下列 n 个数 $x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{n-1}x_n,x_nx_1$ 也不外是$+1$ 与-1 两种情况,它们的和为 0,说明其中$+1$ 的个数等于其中-1 的个数,$\therefore$ $n=2k(k\in N)$.

下面来证 k 也是一个偶数.设 $x_1x_2=1$,这时 $x_1=x_2=1$,或 $x_1=x_2=-1$,这说明 x_1,x_2 的符号没有发生变化.又设 $x_1x_2=-1$,$\therefore$ $x_1=1,x_2=-1$ 若 $x_1=-1,x_2=1$,这说明 x_1,x_2 的符号相反.既然在 $x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{n-1}x_n,x_nx_1$ 中有 k 个-1,说明从 x_1 开始到 x_2,再到 x_3,$\cdots$,最后到 x_1,这样一个过程中发生了 k 次符号的变号,由于 x_1 与它本身总是同号,$\therefore$ k 必须是偶数(若 k 为奇数,经过 k 次变号后,x_1 应变为$(-1)^kx_1=-x_1$,不等于 x_1 了).证毕.

另证 同上法可证 n 为一偶数.不妨设 $n=2k$(k 为自然数).下面来证明 k 也是一个偶数.

由于$(x_1x_2)(x_2x_3)\cdots(x_{n-1}x_n)(x_nx_1)=(x_1x_2\cdots x_n)^2>0$,
$(x_1x_2)(x_2x_3)\cdots(x_{n-1}x_n)(x_nx_1)=(-1)^k\cdot(+1)^k=(-1)^k$,
$\therefore$ k必须为偶数,从而 n 是 4 的倍数.

[**例 3**] (1) 有 n 个整数,其积为 n,其和为 0.求证:整

数 n 能被 4 整除；

（2）设 n 为被 4 整除的自然数. 求证：可以找到 n 个整数，使其积为 n，其和为零.（第 18 届全苏中学生数学竞赛题）

证明 （1）设 n 个整数为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，由题意得

$$a_1a_2\cdots a_n=n,\quad a_1+a_2+\cdots+a_n=0.$$

如果 n 为奇数，那么 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为奇数，于是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$是奇数个奇数的和，不可能为 0，所以 n 必为偶数，从而 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有一个是偶数. 又若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中只有一个偶数，设为 a_1，则 $a_2+a_3+\cdots+a_n$ 是奇数个（$n-1$ 个）奇数之和，故必为奇数，从而 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 是奇数，与 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$矛盾. 故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有两个偶数，所以 $n=a_1a_2\cdots a_n$ 能被 4 整数.

（2）设 $n=4k$. 当 k 为奇数时，

$$n=2\cdot(-2k)\cdot 1^{3k-2}\cdot(-1)^k,$$

而 $2,-2k,(3k-2)$个 1 与 k 个 -1 共 $4k$ 个数之和为零.

当 k 为偶数时，

$$n=(-2)(-2k)\cdot 1^{3k}\cdot(-1)^{k-2},$$

而 $-2,-2k,3k$ 个 1 与$(k-2)$个 -1 共 $4k$ 个数之和为零.

［**例 4**］ 设 a,b,c,d 是整数，且数 $ac,bc+ad,bd$ 都能被某整数 u 整除. 求证：bc 和 ad 也都能被 u 整除.

证明 由于$(bc-ad)^2=(bc+ad)^2-4abcd$，有

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=\left(\frac{bc+ad}{u}\right)^2-4\cdot\frac{ac}{u}\cdot\frac{bd}{u}$$

又 $ac,bd,bc+ad$ 都能被 u 整除，则

$$s=\frac{bc+ad}{u},\ p=\frac{ac}{u},\ q=\frac{bd}{u}$$

都是整数，即

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=s^2-4pq.$$

于是$\frac{bc-ad}{u}$也是整数. 设$t=\frac{bc-ad}{u}$,则$t^2=s^2-4pq$, $s^2-t^2=4pq$, $(s+t)(s-t)=4pq$. 由于$s-t$与$s+t$具有相同的奇偶性,$4pq$为偶数,则$s-t$与$s+t$都是偶数. 从而

$$\frac{s+t}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc+ad}{u}+\frac{bc-ad}{u}\right)=\frac{bc}{u},$$

$$\frac{s-t}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc+ad}{u}-\frac{bc-ad}{u}\right)=\frac{ad}{u}$$

都是整数,即bc和ad都能被u整除.

［**例 5**］ 问:怎样的正整数n,使得$M=20^n+16^n-3^n-1$能被 323 整除?(第 20 届莫斯科数学竞赛题)

证明 ∵ $323=17\times19$,当n为正偶数,即$n=2k$时,20^n-3^n能被$20-3=17$整除,又$16^n-1=16^{2k}-1=256^k-1=(256-1)N_1=17\times15\times N_1$,即$16^n-1$也能被 17 整除,∴ 当$n$为偶数时,$M$能被 17 整除.

另一方面,20^n-1能被$20-1=19$整除,又$16^n-3^n=16^{2k}-3^{2k}=(256-9)N_2=19\times13\times N_2$,即$16^n-3^n$也能被 19 整除,∴ 当$n$为偶数时,$M$能被 19 整除. 易知$(17,19)=1$,∴ 当$n$为偶数时,$M$能被$17\times19=323$整除.

当n为正奇数,即$n=2k+1$时,易知20^n-3^n能被 17 整除,但$16^n-1=16^{2k+1}-1=16^{2k+1}-16+15=16(16^{2k}-1)+15$,由前面知,$16^{2k}-1$能被 17 整除,而 15 与 17 是互素的,∴ $17\nmid(16^n-1)$,即$17\nmid M$,∴ $323\nmid M$.

∴ 当且仅当n为正偶数时,$20^n+16^n-3^n-1$能被 323 整除.

［**例 6**］ 求证:101010…101(含k个 0 及$k+1$个 1,$n\geqslant$