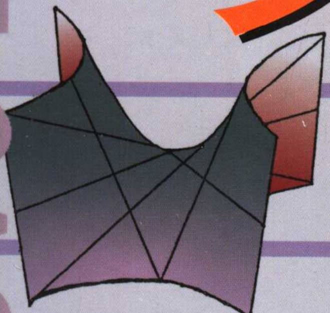
文科高等数学

WENKE GAODENG SHUXUE



华宣积 谭永基 徐惠平 编著

复旦大学出版社

文科高等数学

华宣积　谭永基　徐惠平　编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

文科高等数学/华宣积,谭永基,徐惠平编著.—上海:复旦大学出版社,2000.8
ISBN 7-309-02607-1

Ⅰ.文… Ⅱ.①华…②谭…③徐… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 35828 号

文科高等数学

华宣积　谭永基　徐惠平　编著

出版发行　复旦大学出版社
上海市国权路 579 号　邮编 200433
86-21-65118853(发行部)　86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　范仁梅
装帧设计　朱永庆
总 编 辑　高若海
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　江苏大丰市印刷二厂
开　　本　787×960　1/16
印　　张　21
字　　数　321 千
版　　次　2000 年 8 月第一版　2004 年 1 月第五次印刷
印　　数　11 201—14 300

书　　号　ISBN 7-309-02607-1/O·208
定　　价　26.00 元

内 容 提 要

本书是上海市重点课程教材之一，是一本面向大学文史哲等人文科学和社会科学各专业学生的文化素质教材．书中讲述了最基本的数学思想、概念、内容和方法，使学生在初等数学的基础上，通过学习高等数学，熟悉数学的语言和功能，提高推理、判断、论证和演算的能力，了解数学在社会科学中的一些应用，将来有可能在各自的领域中应用数学的思想和方法．

本书内容的广度和深度恰当，叙述简明扼要．

本书可作为综合性大学和师范院校等有关文科各专业（不包括经济和管理专业）本科和专科的教材，也可以是需要数学和爱好数学的有关人员的参考书．

前 言

本教材是在《文科高等数学》讲义的基础上修改定稿的.该讲义在复旦大学文科有关专业已经使用了三年.它的部分内容还更早地在公共选修课中讲授过.

数学是研究数量关系和空间形式的科学.它是科学和技术发展的基础.它的严密性、逻辑性和高度抽象的特点,使得它有广泛的应用性.数学对学生思维能力的培养、聪明智慧的启迪以及创造能力的开发都起着重要作用.数学是一种语言.随着数字化生存方式的发展,极限、变化率、概率、图像、坐标、优化和数学模型等等数学词汇的使用越来越频繁.人们在思维、言谈和写作中,在文化创造和日常生活中将会越来越多地应用数学的概念和词汇.数学是各类学科和社会活动中必不可少的工具.不仅在自然科学领域,而且在社会科学和生命科学领域都需要建立数学模型.在计算机飞速发展的今天,数学的作用与日俱增.如果仅仅了解中学里所学的那些数学知识,就显得很不够了.文科专业大学生修学高等数学,是十分有意义的也是势在必行的.

如何编写一本符合我国中学生基础的,内容的广度和深度恰当的,形式又能被文科大学生欢迎的高等数学教材,是一个长期探索的过程.我们只是作了一些努力.首先,在内容的取舍上,我们确定了"广而浅"的原则.范围要广一些但又不求全;写得浅一些,但又要有实在的内容,使学生能从教材中学到一些高等数学的知识和得到一些能力的训练.其次,我们希望学生对重要的数学思想、概念和方法能有所了解,对传递和接收信息的基本语汇能够运用,对推理、判断、论证和演算的能力要有所提高,但在技巧方面及习题难度上都不作过高的要求.第三,我们尽可能多地列举出数学在各方面的应用实

例，使学生了解数学是如何发挥作用的．一旦自己的工作或生活领域中需要应用高等数学时，也能联想起来，不至于完全是生疏的．

我们曾用72学时或36学时讲授本教材，在学时数较少时将打“*”号的几段和一些例子删去不讲．在使用本教材进行教学时，任课教师可根据学时数和学生的基础增加或删减一些内容，使教学活动更加有效．

本教材的第一章、第四章和第五章由华宣积执笔，第二章和第三章由徐惠平执笔，第六章及附录由谭永基执笔，全书由华宣积统稿．

在教材正式出版之际，我们要感谢复旦大学教务处．他们多次组织我们参加“综合知识”系列教材的座谈会，使我们逐步了解到文科学生的需要，开阔了思路．特别是在今年3月，教务处邀请了10多位专家、教授专门对本教材的进一步修改提出了宝贵意见，使教材质量有了很大提高，我们对教务处及赴会的专家表示衷心的感谢．复旦大学数学系的陆立强副教授与我们一起承担了上海市重点建设课程《文科高等数学》项目，在课件编制方面做了大量工作，他还对教材的修改提出过宝贵意见；承蒙姚允龙教授的应允，本书线性规划一节的一些例子引自他们编著的《应用数学基础》一书，我们在此一并表示感谢．最后，我们感谢复旦大学出版社，他们的辛勤劳动使本书得以早日与读者见面．

限于学识与水平，本书的缺点和错误在所难免．敬请专家和读者批评指正．

编　者

2000年6月

目　录

第一章　实数系与几何学

§1　实　数　系

1.1　自　然　数

最基本的数是

1，2，3，4，5，…

它们也是我们最熟悉的数，被称为自然数或正整数. 自然数的全体构成的集合记为

$$\mathrm{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\}.$$

它是一个无限的序列，5 的后面是 $5+1=6$，6 的后面是 $6+1=7$，…. 称 6 是 5 的后继，7 是 6 的后继. 虽然不能将所有的自然数都写出来，但我们还是能知道 1 000 属于 N，999.5 不属于 N，即

$$1\,000 \in \mathrm{N},\ 999.5 \notin \mathrm{N}.$$

自然数序列自“1”开始. 每个自然数都有一个后继数，一个继续一个，无穷无尽.

两个自然数可以相加，$a\in\mathrm{N}$，$b\in\mathrm{N}$，则有唯一的

$$a+b\in\mathrm{N}.$$

自然数的加法满足结合律和交换律. 即对任意的自然数 a，b 和 c，成立

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

和

$$a+b=b+a.$$

两个自然数可以相乘，乘法满足下列性质. 设 a, b 和 c 都是自然数，则

$$ab \in \mathrm{N};$$

$$a \cdot 1 = a;$$

$$ab = ba;$$

$$(ab)c = a(bc);$$

$$a(b + c) = ab + ac;$$

$$(a + b)c = ac + bc.$$

两个自然数是可以比较大小的. $a \in \mathrm{N}$, $b \in \mathrm{N}$, 则下列三个式子中有且仅有一个成立：

$$a < b,$$

$$a = b,$$

$$a > b.$$

如果 $a < b$, 则有唯一的 $c \in \mathrm{N}$，使 $a + c = b$.

如果 a, b 和 c 都是自然数，则

$$a < b,\ b < c \Rightarrow a < c,$$

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c,$$

$$a < b \Rightarrow ac < bc.$$

$\Rightarrow$表示“可以推出”. 因为 N 中的任何两个自然数都可以比较大小，我们说 N 是有序的.

以上这些事实是中学里都学过的，是人们对自然数的直观的认识. 1889 年，意大利数学家 G. Peano(皮亚诺，1858—1932 年)规定了自然数集合满足五条公理. 由这些公理出发去推导自然数的其他性质和运算规律. 有兴趣的读者可参阅《中国百科全书》数学卷.

1.2 $\sqrt{2}$不是两个整数的比值

两个自然数相减所得到的差不一定是自然数. 例如

$$3 - 5 = -2.$$

于是将自然数集合扩充，使得在新的集合中减法运算也可以进行.这个集合就是整数集

$$Z = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

显然 $N \subset Z$.

整数集中的任何两个数相加、相减或相乘，所得的结果仍是整数.我们说它对加法、减法和乘法运算是可以进行的(即是封闭的，反之则是不封闭的).

Z 对除法运算是不封闭的.例如

$$\frac{2}{3} \notin Z.$$

于是进一步将整数集合扩充，使新的集合对加、减、乘、除四则运算都是封闭的.这就是有理数集

$$Q = \left\{\frac{p}{q} \middle| p \in Z, q \in N\right\}.$$

例如

$$\frac{2}{3} \div \frac{-5}{6} = \frac{-12}{15} = \frac{-4}{5} \in Q.$$

当然在进行除法运算时，规定除数不能等于 0.

如果取 $q = 1$，那么有理数 $\frac{p}{q} = p$，就是一个整数.这说明所有整数都属于 Q，即

$$Z \subset Q.$$

应用直角三角形勾股定理求斜边长的时候，产生了新的矛盾.设两条直角边的长都是 1，则斜边长 c 满足

$$c^2 = 1 + 1 = 2.$$

因为 $1^2 = 1$，$2^2 = 4$，所以 $c \notin Z$，c 是否属于 Q 呢？不妨再试一试.

$$(1.4)^2 = 1.96,\ (1.5)^2 = 2.25.$$

可知

$$1.4 < c < 1.5.$$

$$(1.41)^2 = 1.9881,\ (1.42)^2 = 2.0164.$$

可知

$$1.41 < c < 1.42.$$

有限小数或无限循环小数可化成分数.如果上述的试算能得出 c 是一个有限小数或无限循环小数,那么 $c \in \mathrm{Q}$.遗憾的是,此法未能奏效.于是就怀疑 $c \in \mathrm{Q}$,设法去证明 $c \notin \mathrm{Q}$,这时使用反证法是最好的.

用 $\sqrt{2}$ 表示 c(因为斜边长总是正数,$-\sqrt{2}$ 可略去),我们要证明

$$\sqrt{2} \neq \frac{m}{n},$$

$m, n \in \mathrm{N}$.

证 如

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathrm{N}.$$

假定 m 和 n 是互质的,它们没有公因子(如果有公因子就可以约简).将等式两边平方,得

$$2 = \frac{m^2}{n^2},$$

$$2n^2 = m^2,$$

左边 $2n^2$ 是偶数.右边 m^2 也应是偶数.但奇数的平方一定是奇数,所以 m 必须是偶数,记 $m = 2k$,于是

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

$$n^2 = 2k^2.$$

同理可知 $n = 2l$.这样 m 和 n 有公因子 2,与假定矛盾.证毕.

勾股定理在几何学中占有重要的地位,应用勾股定理时的开方运算也是必需的,不能避免的. $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$ 打破了长期以来的"自然数与它们的比支配着宇宙"的观念.数学需要不包含在 Q 中的数,而且这种数可以是某条线段的长度,称这种数为无理数,它是无限不循环小数.

$\sqrt{2}$ 是无理数,而且可证明

$$2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ \cdots$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{5},\ \cdots$$

$$1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 3+\sqrt{2},\ 4+\sqrt{2},\ \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

都是无理数.

习　题

1. 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数.
2. 证明 $1+\sqrt{2}$ 是无理数.
3. 设 $\frac{p}{q}\in Q$，则 $\frac{p}{q}+\sqrt{2}$ 是无理数.

1.3　实　数　系

实数集合是所有正的或负的无限小数的全体，用 R 表示.

$$R=\{x \mid x\text{ 是无限小数}\}.$$

有限小数 2.6 是无限小数的特例，它可写成 2.6000…或 $2.5\dot{9}$，无限循环小数全体构成 Q，无限不循环小数是无理数，有理数和无理数全体构成 R.

自然数集合 N，整数集合 Z，有理数集合 Q 和实数集合 R 都是无限的集合，它们之间有下列关系：

$$N\subset Z\subset Q\subset R.$$

N 是 Z 的子集，N 的元素总数是不是比 Z 的元素总数少呢？N 中有的元素 Z 中也有，Z 中有的元素 N 中可能没有，如

$$-3\in Z,\ -3\notin N.$$

这是不是可以说明 Z 的元素总数比 N 的元素总数多呢？N 是 Z 的一部分，整体中的元素数目大于部分中的元素数目这难道会不对吗？

让我们举个例子，老师手中有一盒钢笔，不知钢笔的数目与班级学生数目哪个大，怎么办？老师发给学生一人一支，如钢笔还有剩余，