单墫 主编

数学奥林匹克

小学版新版

提高篇

北京大学出版社

数学奥林匹克

小学版新版·提高篇

单 墫 主编

钱展望 编撰

北京大学出版社

数学奥林匹克

小学版新版·提高篇

单 墫 主编

钱展望 编撰

责任编辑:王明舟

*

北京大学出版社出版发行

(北京大学校内)

唐山市兴卫装璜印刷厂印刷

新华书店经售

*

787×1092 毫米 32 开本 9.5 印张 210 千字

1992 年 10 月第一版 1998 年 8 月第十次印刷

ISBN 7-301-02054-6/G·145

定价:8.50 元

序

数学竞赛在我国普遍开展，成绩斐然。不少出版社出版了与竞赛有关的图书，起到良好的推动作用。北京大学出版社出版的这套《数学奥林匹克系列图书》就是其中的一种，它能受到广大读者的欢迎我们非常高兴。

这是我国出版的第一套数学竞赛的系列图书。系列中有高中册，也有初中册与小学册；有普及，也有提高；有最新的资料，也有经过系统整理的题解辞典。目前已出 16 册，近两年内还将推出 10 多种。各地奥林匹克学校采用，普遍反映效果很好。一个突出的例子是国家教委所办的理科实验班使用这套图书，每年都为参加国际数学奥林匹克的我国国家集训队、国家代表队输送约 2/3 的队员。

根据各地提出的意见与建议，这套图书作了不少改进，小学册与初中册均出了新版，并编写了高中版。新版致力于“浅”(即深入浅出)、“趣”(生动有趣)。注意普及，面向广大中小学生，避免过深、过难；注意教学原则的运用，循序渐进，适当重复；注意数学思想的启蒙与打好扎实的基础。我们相信这对于发展智力，对于参加竞赛，对于升学考试均有益处。

系列的另一个特点是“新”。有不少新鲜的资料，如《第 31 届国家集训队资料》,《第 31 届国际数学竞赛预选题》、《苏联数学奥林匹克试题汇编》、《美国数学奥林匹克试题汇编》等都及时整理推出。这套系列中，有关国际竞赛的若干册，可以说代表了当前竞赛的最高水平。这些属于提高的分册，已成为我

国集训队人人必备的材料。

除“浅”、“趣”、“新”等特点外，我们还尽力做到“准”，即科学性方面没有错误。各册作者与编者为此付出不少心血，但由于水平与时间等原因，错误与不妥之处仍难完全避免，敬请广大读者不吝指正。

参加编写工作的有教育家，高级教练及有丰富实践经验的中学教师，更有著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸位先生担任顾问，保证了这套系列图书的质量。

北京大学出版社，重视社会效益，以最快的速度出版这套系列图书，我们表示衷心的感谢。

单 墫

1992年9月

编辑说明

数学奥林匹克事业在中国大地迅猛发展，并得到了党和政府的大力扶持，各级教育行政部门及社会各界也都积极支持这项事业，为中国在国际竞赛中取得优异成绩提供了强有力的保证。

但是，我国正式参加国际竞赛的时间较短，与长期普遍开展这一活动的国家相比，在一些方面还有差距，特别是高水平的基层教练人员不多，可供培训使用的科学性、系统性、针对性都较强的材料贫乏，这些已成为阻碍我国数学竞赛向更高层次、更广范围发展的重要因素。基于此，北京大学出版社从1988年开始，着手组织编写了一套供小学学生到高中学生使用的《数学奥林匹克》系列图书，著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸先生任顾问，在国内外享有盛誉的数学奥林匹克专家、前国家教练组组长、第31届国际数学竞赛中国国家队领队兼主教练单墫教授任主编，编委及主要作者均为在国内外有一定影响的数学奥林匹克专家。

《数学奥林匹克》系列图书包括三个部分：从小学到高中的培训教材、国内外高水平竞赛材料、国家集训队集训资料；在近期内还将出版竞赛题解辞典。本系列图书自正式出版发行以来，行销全国各地，普遍反映效果很好。国家教委理科实验班及国家集训队、国家代表队都将本系列中的部分图书作为主要培训材料之一。在此，北京大学出版社及系列图书编委会向广大新老读者表示衷心的感谢！

根据各地读者提供的意见与建议，我们在继续及时出版有关国内外竞赛材料的同时，重新组织编写了小学版、初中版、高中版。新版广泛吸取了读者的建议，熔入了国内外各级竞赛的最新材料，特别参照国家教委新颁教学大纲，有层次，有梯度，有特点，旨在使程度不同的学生都可以学有所获。

小学版新版由单墫教授主编，写作提纲由编委会讨论并征求了部分专家、中小学教师及学生的意见。《启蒙篇》由北京市奥林匹克学校副校长孙瑞清副教授撰写，《基础篇》由北京市数学奥林匹克学校主教练、高级教练员、中国数学会理事胡大同及葛军、傅敬良撰写，《提高篇》由武钢三中特级教师、武汉市数学教研会副理事长、高级教练员钱展望撰写。全书由主编单墫教授审定。

为了使这套图书更好地发挥作用，热忱希望读者朋友及社会各界人士提出改进意见。

北京大学出版社将一如既往地为数学奥林匹克事业服务，为振兴中国的数学尽我们的力量。

最后，再次向读者朋友表示衷心的感谢！

1992 年 9 月

目　录

第一讲　穷举法与树形图

老奶奶数鸡蛋，她小心翼翼地把鸡蛋从篮子里一个一个地往外拿，边拿边数．篮子里的鸡蛋拿光了，有多少个鸡蛋也就数出来了．这种最简单的计数方法就叫做**穷举法**．对于一组需要计算总数的东西，如果它们的数量不太多，我们可以运用穷举法把它们一一列举出来，从而求出这个总数．

例1　如图1-1，请你数一数图中有多少条不同的线段？

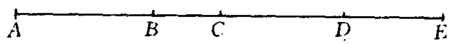

图　1-1

分析　以 A 为左端点的线段有 4 条：AB, AC, AD, AE；

以 B 为左端点的线段有 3 条：BC, BD, BE；

以 C 为左端点的线段有 2 条：CD, CE；

以 D 为左端点的线段有 1 条：DE．

所以共有线段

$$4+3+2+1=10(\text{条}).$$

运用穷举法必须注意两个方面：第一，我们应初步估计总的数目不是太大．因若所需要计算数目的东西太多时，把它们一一列举出来，将是非常费时、困难的．这个时候，最好寻找更有效的方法．第二，列举时必须保证**没有重复**，也**没有遗漏**．只有这样，方能得到正确的结果．为了做到这一

点，我们应该抓住对象(如例1中的线段)特征，选择适当的标准分类，有次序、有规律地列举。上述例1的解法，我们就是按 A,B,C,D 为线段的左端点分类列举的。

同样一个问题，考虑问题的想法不一样，分类标准不同，同样是运用穷举法，也会产生不同的解题途径。对于例1，我们还可以给出下面的解法。

称图1-1中 AB,BC,CD,DE 为简单线段。那么含一条简单线段的线段有4条：AB,BC,CD,DE；含二条简单线段的有3条：AC,BD,CE；含三条简单线段的有2条：AD,BE；含四条简单线段的有1条：AE。从而共有10条不同的线段。

线段 AE 内包含有3个有标记的点，相应的有10条不同的线段，若 AE 内包含有100个有标记的点，相应的又有多少条不同的线段呢？仿照上面有规律的列举，我们可以很快知道有不同线段

$$101+100+99+\cdots+2+1=\frac{(101+1)\times 101}{2}=5151(\text{条}).$$

例2 将一个整数分成若干个小于它的整数之和，这叫做分拆。比如

$$4=1+1+2,\quad 4=1+3.$$

但

$$4=1+1+2,\quad 4=1+2+1, 4=2+1+1,$$

它们只有加数的顺序不同，应算是同一种分拆。请问整数6有多少种不同的分拆方式？

分析 整数6不大，可以考虑直接运用穷举法求解。由于

$$6=1+1+1+1+1+1,$$

这说明 6 最多拆为 6 个数。又

$$6=1+5=2+4=3+3,$$

最少拆为两个数之和，因此我们可按分拆后整数个数分类。除上述两类情形外，另外还有

拆成三个数的：

$$6=1+1+4=1+2+3=2+2+2;$$

拆成四个数的：

$$6=1+1+1+3=1+1+2+2;$$

拆成五个数的：

$$6=1+1+1+1+2,$$

可见，一共有 10 种不同的分拆方式。

我们在列举分拆的整数时，先写较小的数，再写较大的数，这样有规律地写，可以防止遗漏任何一种情形。

还有一种更好的分类方法：按分拆中的最大整数来穷举。

最大数是 5：

$$6=5+1;$$

最大数是 4：

$$6=4+2=4+1+1;$$

最大数是 3：

$$6=3+3=3+2+1=3+1+1+1;$$

最大数是 2：

$$6=2+2+2=2+2+1+1=2+1+1+1+1;$$

最大数是 1：

$$6=1+1+1+1+1+1.$$

因此，一共有 10 种不同的分拆方式。

为什么不按分拆中的最小数来分类呢？可以想象到，分

拆中最小整数 1 出现的次数最多，如果按最小数来分类，就会使分类流于繁琐，从而失去了它的意义。因为分类的主要目的在于简化问题。

例3 有一无盖立方体纸箱，若将其沿棱剪成展开图，如图 1-2 即为一种形式，问有多少种不同形式的展开图？

分析 纸箱共有五个面，展开后的图形的行(列)所含面数最多不会有 5 个面，当然也不可能仅含 1 个面。

(1) 含面数最多的行(列)有 4 个面的情形。注意到对称性，仅有下面图 1-3，1-4 两种不同情形。

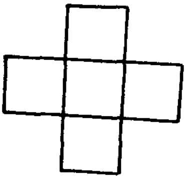

图 1-2

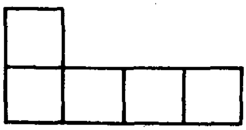

图 1-3

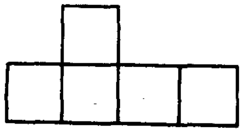

图 1-4

(2) 含面数最多的行(列)有 3 个面的情形。可分两类：

(i) 剩下的两个面位于面数最多的行(列)的同侧时，有图 1-5，1-6 两种不同情形。

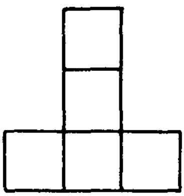

图 1-5

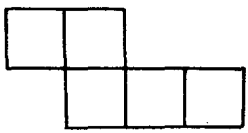

图 1-6

(ii) 剩下的两个面位于面数最多的行(列)的异侧时，有图 1-7，1-8，1-9 三种不同情形。

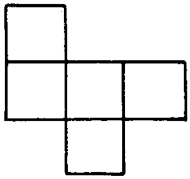

图 1-7

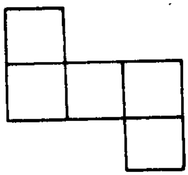

图 1-8

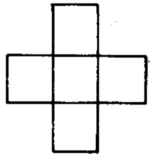

图 1-9

(3) 一行(列)含面数最多为2时，仅有图1-10一种情形。

根据上述各种情形，知道共有8种不同的展开形式。

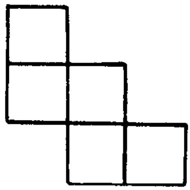

图 1-10

对所给的问题，酌情画出图表分析是非常有益的。下面介绍的**树形图**是穷举时常常采用的一种图示的方式。它形象直观，非常有条理，不易重复或遗漏，使人一目了然。

例4 一个学生暑假在A,B,C三个城市游览。他今天在这个城市，明天就到另一个城市。假设他第一天在A市，第五天又回到A市，问他有几种不同的游览方案？

分析 这个学生在一个城市逗留一天后就要转移到另一个城市，因此在游览方案中，第二天可能是B市或C市。若为B市，则第三天又将是A市或C市；若为C市，则第三天可能是A市或B市，….如此考虑问题，也许会把我们自己给弄糊涂了。下面的图1-11，犹如一棵倒立的树，它很清楚地表明了我们的推理过程。

图1-11称为树形图。图中从上至下每一条路径就表示

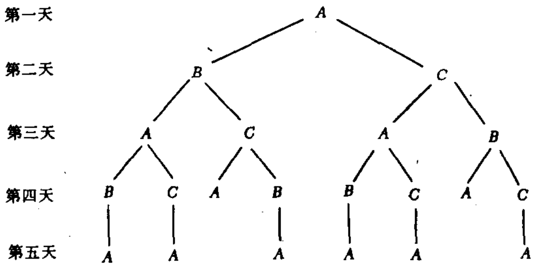

图 1-11

一个游览方案.比如最右边一条路径$A—C—B—C—A$就表示第二天在C市，第三天在B市，第四天在C市，第五天回到A市的路线。从图 1-11 中，还可以看到，第四天在A市的情形是不合要求的(因为第五天必须在A市，同一城市不允许连续逗留两天).数一数最后一行中A的个数，便知不同的游览方案有 6 种。

如果我们还要求三个城市必须都到过，那么有两个方案($A—B—A—B—A$，$A—C—A—C—A$)不合要求，此时仅有 4 个不同的方案。

例5 甲、乙两人进行围棋比赛，规定先胜四盘者胜.第一、二盘甲胜，第三盘乙胜。请问到决出最后胜负为止，可能有几种情形？其中甲胜的情形有几种？

分析 如同上例，对这种分步逐一进行的问题可采用树形图列举。用"甲"表示甲胜,"乙"表示乙胜。由于第三盘

以后，甲只要先胜两盘或乙先胜三盘，比赛至多进行七盘均能决出胜负，所以表示各种战况的树形图如图 1-12。

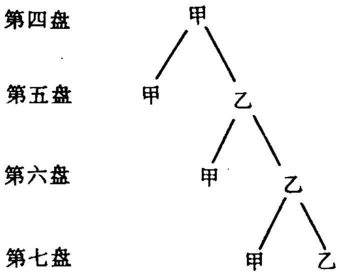

图 1-12

图 1-12 中从上至下每一条路径表示一种可能战况，比如最左边的“甲—甲”表示在第四、第五两盘中甲连胜，而“乙—甲—乙—乙”表示的是乙胜的一种情形。从图 1-12 中很容易看出一共有10种不同的可能情形，其中甲胜的有 6 种.

例6 小马虎给五位朋友写信。由于粗心，在把信装入信封时他给弄错了，结果五位朋友都没有收到小马虎写给他的信，而是收到他给别的朋友的信。请问一共有多少种可能情形？

分析 用编号 1,2,3,4,5 表示五位朋友应该收到的信，用 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 表示他们实际收到的信的编号，于是问题中要求 $a_2\neq1$，$a_2\neq2$，$a_3\neq3$，$a_4\neq4$，$a_5\neq5$。

我们选 a_1 作突破口。因为 $a_1\neq1$，a_1 只可能是 2，3，4 或 5。当 $a_1=2$ 时，作树形图，如图 1-13。

数一数最后一行数字个数，即知有 11 种不同情形.

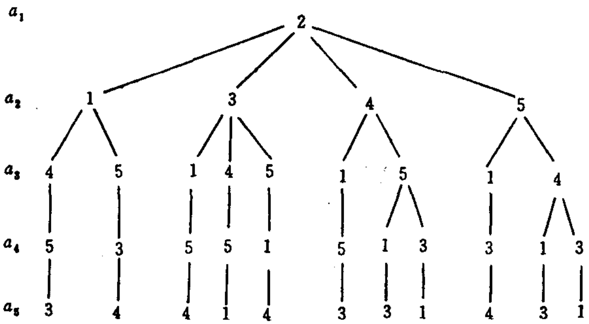

图 1-13

由于对 a_1 来说，取 2,3,4 或 5 是等可能性的，因此当 $a_1=3,4,5$ 时同样各有 11 种情形。这样一共有

$$11\times4=44$$

种不同可能情形。

利用等可能性，选 a_1 为起点，并进而仅研究 $a_1=2$ 的情形，这样的处理，大大减少了问题的复杂程度，避免了许多类似的列举，也有利于避免重复与遗漏。

习 题 一

1．下图中有 6 个点，9 条线段．一只甲虫从 A 点出发，要沿着某几条线段爬到 F 点，行进中同一个点或同一条线段只能经过一次，问这只甲虫有多少种不同走法？