科學圖書大庫

集團遺傳導論

編著　俞其海

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

集團遺傳導論

編著　　俞其海

徐氏基金會出版

序

寫此書目的，只是想將我所知道的告訴大家，假若，每一位先生都能將其所知貢獻於社會。我想，我們的科學會生根，會健壯起來。我所知雖少，但因基於這個觀念。所以寫成此書。因此，我認爲不易懂的地方特別加以解說及引証。

作學問如上樓梯，不能一步上了樓，必需一步一步的走。若我是走的第一階，以後第二，三…階，直至科學的尖端，尙需靑年的朋友去努力開拓。並以此書勉勵年青朋友。

本書主要內容包括(1)各種情況下之平衡現象，(2)應用路徑係數原理求各近親繁殖下異質接合體之減少現象及親戚間之相關係數，(3)選種及突變。此書可供作物育種，牧畜育種，人類遺傳以及進化學方面的參考。或作集團遺傳學之課本。

本書付梓匆促。難免有遺漏欠妥之處，尙祈海內外學者，隨時賜敎，俾臻完善。

俞 其 海

於中興大學 1970. 4.

目　　錄

第一章　基本問題

1. 什麼是集團遺傳？

集團遺傳是：應用數學，統計來研究一集團（population ）個體之遺傳現象。

一個個體之生命是有限的，若無突變，則其遺傳組成在一生中是固定不變的，然而，集團不論大或小，分佈廣或狹，以及從一世代至另一世代中遺傳成份之變化是突變或漸進的，它（集團）是永存的。集團遺傳之研究，必定與生物體之進化（ evolution ）有關，從遺傳觀點看，這種進化只是遺傳特性累積變化之演進。在某一連續集團中，按孟氏遺傳結果加以研究，我們可以獲得一些原則或定理，本書就是處理這方面的問題。

2. 機率

(1)機率定義：

設有N次試驗中，有n_a次為A事件，n_b次為B 事件，則A之機率為：

$$P(A)=\frac{n_a}{N}$$

B之機率為：

$$P(B)=\frac{n_b}{N}$$

(2)機率定理:

(a)互排事件——加法定理

設有E_1,E_2, … E_n 事件，其中任一事件E_1發生時，其他各事件自E_2至E_n皆不能同時發生，則稱E_1與其他各事件間為互排(mutually exclusive)。例如，擲一銅幣，設E_1為正面之出現，E_2為背面之出現，E_1與E_2不能同時出現，因此，正面與背面之出現為互排事件。又擲一骰子，設E_1為1點之出現，E_2為2點之出現……E_6為6點之出現等等。E_1與E_2至E_6亦不能同時出現，因此，亦為互排事件。設E事件可分為E_1，E_2…… E_n個，n個互排事件，其各單獨事件之機率為$p(E_1)$，$p(E_2)$，… $p(E_n)$。則事件E之機率為各事件機率之和。是謂機率加法定理。

證明：因n個事件為互排，則任何二事件不能同時發生，故結果不外有下列$n+1$種不同情形發生：

(1)E_1發生，其餘不發生，設有a_1種情形。

(2)E_2發生，　　不發生，設有a_2種情形。

…………………………………………………

(n)E_n發生，其餘不發生，設有a_n種情形。

(n+1)各事件皆不發生，設有b種情形。

總計各事件可能發生之結果共有$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+b$種，其中發生$E$事件的有$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$種，因此，事件$E$之機率為：

$$P(E)=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+b}$$

$$=\frac{a_1}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+b}+\frac{a_2}{a_1+a_2+\cdots+a_n+b}$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+b}$$

$$=p(E_1)+p(E_2)+\cdots+p(E_n) \qquad 1.1$$

【例】 擲一骰子出現偶數(2或4或6)之事件為E，E可分成$E_1=2$，

$E_4=4$，及$E_6=6$，此時E事件之機率爲：

$$p(2\text{或}4\text{或}6)=p(2)+p(4)+p(6)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

應用加法定理最需注意的是應小心分解事件E爲E_1，$E_2\cdots E_n$，而E_1，$E_2\cdots E_n$間爲互排。若我們問"擲一骰子出現偶數或能爲3除盡之機率爲何？"而我們誤說爲"偶數和能爲3除盡"是互排的，則機率爲：

p（偶數或能爲3除盡）$=p$（偶數）$+p$（能爲3除盡）　(1)

因偶數事件爲E_2,E_4或E_6　因它們互排，故：

p（偶數）$=p(E_2)+p(E_4)+p(E_6)$　(2)

能爲3除盡之事件爲E_3或E_6，因它們亦爲互排，故：

p（能爲3除盡）$=p(E_3)+p(E_6)$　(3)

現將式(2)(3)代入(1)，則得：

p（偶數或能爲3除盡）$=p(E_2)+p(E_3)+p(E_4)+2p(E_6)$(4)

這顯然是謬誤的，因爲原意爲偶數或能爲3除盡之可能結果，該等結果爲E_2,E_3,E_4,E_6,且它們間是互排的，故事件E（偶數或能爲3除盡）之機率應爲：

p（偶數或能爲3除盡）$=p(E_2)+p(E_3)+p(E_4)+p(E_6)$

上式之機率才是正確的。以上是說明事件E，若分成偶數和能爲3除盡就錯了，若分成E_2,E_3,E_4,E_6則對了，因此分解事件時應小心。

(b)複雜事件——乘法定理

設有A，B二事件，該二事件（實際上可以多於二事件）同時發生或相繼發生，此等事件稱爲複雜事件（Compound event）。

該等複雜事件又可分爲(1)A，B二事件互爲獨立，即A之發生不影響B (2)A，B二事件互相間不獨立（即相倚），即B之發生與A事件有關。

例如：一袋中裝黑白兩種球，今從袋中取出一球之事爲事件A，若第一次取出後之球仍放回袋中，取出第二球之事爲事件B，則此兩事件互爲獨立。若第一次取出後不放回袋中，再取第二次球，則此兩事件互爲不獨立。從袋中兩次取球之事件爲複雜事件。

爲陳述方便計，我們需用名詞條件機率（conditional probability），

幷用符號 $p(A|B)$ 表示之，讀作在已知 B 的情況下，A 發生之機率，或簡言之，已知 B，A 之機率，其求法見後。

因複雜事件分獨立及不獨立二種，因此複雜事件之機率亦分：

(A)不獨立時：

設複雜事件 A 及 B 之機率爲 A 之機率乘已知 A，B 之機率，或 B 之機率乘已知 B，A 之機率。

卽：

$$p(A\text{及}B) = p(A)\,p(B|A)$$

$$= p(B)\,p(A|B) \qquad 1.2$$

由此可求得條件機率爲：

$$p(A|B) = p(A\text{及}B)/p(B)$$

$$p(B|A) = p(A\text{及}B)/p(A) \qquad 1.3$$

證明：設有 N 次試驗，n_A 次爲 A 事件，n_B 次爲 B 事件，n_{AB} 爲 A 及 B 事件，則其機率分別爲：

$$p(A) = \frac{n_A}{N}, \quad p(B) = \frac{n_B}{N}, \quad p(A\text{及}B) = \frac{n_{AB}}{N}$$

現在考慮出現 A 之事件，若 n_A 次是 A 的事件，其中 n_{AB} 次中有部份爲 B 之結果，因此，在 A 事件的總次數中有 B 之機率爲：

$$p(B|A) = \frac{n_{AB}}{n_A}$$

今 $$p(A\text{及}B) = \frac{n_{AB}}{N}$$

$$= \frac{n_A}{N}\cdot\frac{n_{AB}}{n_A}$$

$$=p(A)\,p(B|A)$$

【例1】　某系其中有姓張的男同學3人，女同學2人，姓王的男同學4人，女同學5人，假設由這14人當中產生一位系代表。設男生爲事件A，系代表姓張爲事件B，則該系代表爲男生且姓張之機率爲：

$$p(B|A)=\frac{3}{7}$$

因　　$n_{AB}=3$，$n_A=7$.

【例2】　袋中有5球，其中3球爲白球，今從袋中取出一球，不放入袋中，而後又取出一球，問二次取出皆爲白球之機率爲何？

第一次取出白球之事件爲A，其機率爲$p(A)=3/5$，然後求已知A的情況下，求取出白球之可能爲B事件，即已知A，求B之機率，所謂A之情況即是已取出一白球，在此情況下，袋中只有四個球了，（即$n_A=4$），其中白球只有兩個（即$n_{AB}=2$），因此，

$$p(B|A)=\frac{2}{4}$$

故

$$p(A及B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

式(1.2)可以擴大爲：

$$p(A\cdot B\cdot C\cdot D\cdots\cdots)=p(A)p(B|A)\,p(C|AB)\,p(D|ABC)\quad 1.4$$

(B)獨立時

設事件A與事件B互爲獨立，則：

$$p(B|A)=p(B)$$

將此結果代入式(1.2)，得：

$$p(A及B)=p(A)\,p(B)\quad 1.5$$

此即爲乘法定理。

同樣式（1.5）可以擴大爲：

$$p(ABC\cdots)=p(A)\,p(B)\,p(C)\,\cdots\cdots \qquad 1.6$$

【例】 若一骰子擲三次，其第一及第二次均爲2，第三次爲奇數之機率爲何？

設第一次出現2之事件爲A，其機率$p(A)=1/6$

第二次出現2之事件爲B，其機率$p(B)=1/6$

第三次出現1,3,5之事件爲C，其機率爲$p(C)=3/6$

因第一次，第二次，及第三次事件互爲獨立

$$\text{故}\quad p(A\cdot B\cdot C)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{72}$$

3. 因子頻度 (gene frequency)

設某一因子座（locus）上有一相對因子（Alleles）A,a 且設有N個二倍體個體，其中P_I個是顯性的（AA），H_I 個是異質接合體的（Aa）及Q_I個是隱性的（aa），$P_I+H_I+Q_I=N$ 爲了簡便起見，如此的一個集團個體我們用如下符號表示之。

$$(P_I,\ H_I,\ Q_I)$$

其意思是表示AA 個有P_I個，Aa個有H_I個，aa個體有Q_I個，因此，在這集團中，有三種形態（type）的個體，二種形態的因子（A及a） N個體中共有$2N$個因子，因爲每一個AA個有二個A因子，Aa個體有一A因子，故在此集團中總共A因子之個數是$2P_I+H_I$。則A因子頻度爲：

$$p=\frac{2P_I+H_I}{2N}=\frac{P_I+\frac{1}{2}H_I}{N} \qquad 1.7$$

按機率定義，p即爲A因子之機率。
同理，a因子之頻度（即a因子之機率）爲：

$$q = \frac{H_I + 2Q_I}{2N} = \frac{\frac{1}{2}H_I + Q_I}{N} \qquad 1.8$$

因而 $p+q=1$，本書所指頻度（freguency）意思就是比率（porp-ortion）。

【例】 設某集團有40個體：（2，12，26）

則：
$$p = \frac{2+6}{40} = 0.20$$
$$q = \frac{26+6}{40} = 0.80 \text{（或} q = 1-0.20 = 0.80\text{）}$$

4.因子型頻度（genotype frequency）

上述三種因子型（AA，Aa，aa）在集團中之個體用百分率表示，則每一因子型之百分率稱謂因子型頻度或接合體頻度，用P, H, Q分別表示AA，Aa及aa之因子型頻度。如上例：

AA之個體爲2，化成百分率爲：

$$40 : 100\% = 2 : x$$
$$x = 0.05.$$

該值也等於$P = P_I/N$（從機率定義言，此值實爲發生AA之機率，可寫作$P(AA)$），因此，AA因子型之頻度爲0.05即$P=0.05$.）

同理求得：
$$H = \frac{H_I}{N} = P(Aa) = 0.30$$
$$Q = \frac{Q_I}{N} = P(aa) = 0.65$$

因而，$P+H+Q=1$.
由因子型頻度求因子頻度，則式 1.7 及 1.8 可改寫成式 1.9 及 1.10，

$$p=P+\frac{1}{2}H \tag{1.9}$$

$$q=Q+\frac{1}{2}H \tag{1.10}$$

仍利用上例由式 1.9 及 1.10 求因子頻度爲：

$$p=0.05+0.15=0.20$$
$$q=0.65+0.15=0.80$$

另舉一實例：
人類$M-N$血型決定於一因子座上二相對因子，三因子型即三血型M，MN，N。調查East Greenland及Iceland之Eskimoes人的結果如下：

	血型之因子型頻度			調查人數
	M	MN	N	
Greenland	.835	.156	.009	569
Iceland	.312	.515	.173	747

其因子頻度爲：

	M	N
Greenland	.913	.087
Iceland	.570	.430

很明顯的二集團有不同因子型頻度及因子頻度，N型在Greenland發生很少，但在 Iceland 則很平常。

5. 機率定理在遺傳上之應用

(1)加法定理

設有三種因子型且爲完全顯性，其結果如下：

因子型	AA	Aa	aa
機　率	P	H	Q

問顯性性狀之機率爲何？

因AA與Aa皆爲顯性事件且爲互排，故：

$$P\,(\text{顯性}) = P\,(AA\text{或}Aa) = P + H.$$

(2)乘法定理

(A)獨立時

設父母本各有H個Aa，問$Aa \times Aa$交配之機率爲何？

我們可視父本Aa爲A 事件，母本Aa爲B事件，且A　B二事件互爲獨立，故：

$$P\,(A\text{及}B) = H^2$$

另例：問$Aa \times Aa$交配，子代爲AA之機率若干？

在獨立分離原則上，父母遞傳給子代爲逢機二因子之一，如此，則$Aa \times Aa$交配，父傳給子之機率爲$1/2$，母傳給子之機率爲$1/2$，前者爲A事件，後者爲B事件，A，B互爲獨立，故子爲AA之機率爲：

$$P\,(A\text{及}B) = P\,(\text{子爲}AA) = P\,(\text{父傳給}A)\,.\,P\,(\text{母傳給}A)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(B)不獨立時：

設某集團爲：