非数学类专业

研究生教学用书

应用泛函分析

Applied Functional Analysis

樊磊 何伟

高等教育出版社

非数学类专业
研究生教学用书

应用泛函分析

Applied Functional Analysis

樊磊 何伟

高等教育出版社

内容提要

本书从具体应用问题出发，扼要介绍了泛函分析的一些基本概念和原理。全书共有五章，内容分别涉及 Banach 空间，Lebesgue 积分概要，Hilbert 空间，Hilbert 空间上的线性算子和 Fourier 变换。附录中给出了两个重要分析不等式的详细证明，书后对参考文献分别附有简短的评注。本书对题材的选择和处理既简明，又有一定深度，在内容安排上由浅入深，强调抽象概念的直观及应用背景。本书理论的推导和证明比较详尽，特别是书中穿插了应用泛函分析思想方法的经典应用实例，包括 Shannon 采样定理和时频分析中的测不准原理等，这是同类书籍所少见的。

阅读本书只需具备工科高等数学和线性代数的知识，超出此范围的数学知识在书中都有适当的介绍。

本书可作为高等学校通信、信息和计算机科学类各专业的研究生或高年级本科生的相关课程的教材，也适合有一定数学基础的工程技术人员自学使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/樊磊，何伟. —北京：高等教育出版社，2005.4

ISBN 7-04-016574-0

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①樊… ②何… Ⅲ. 泛函分析—高等学校—教材 Ⅳ. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 018042 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	涿州市京南印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005 年 4 月第 1 版
印　　张	8	印　　次	2005 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	140 000	定　　价	12.10 元

物料号　16574-00

前　言

本书源于作者近年来为几所大学的研究生所开设的《应用泛函分析》选修课所使用的讲义。参加听课的学生多数都不是来自数学或应用数学专业,更多的是来自计算机科学、教育技术、软件工程、人工智能、通信、图像与信号处理和非线性科学等需要较多现代数学知识的一些专业,因此本书的编写一直有比较明确的目标和定位,就是为这些学生今后阅读相关领域的文献做些分析数学上的准备。

笔者在准备课程中发现,尽管目前可使用的泛函分析课本和专著并不少,但能够满足我们所设课程要求的教材却非常罕见,一个明显的原因是:泛函分析融合了代数、拓扑和经典分析中的深刻思想和方法,要真正理解和掌握它所需要的数学背景超出了信息与计算机科学专业低年级研究生的一般学习水平,而本课程的课时相当有限,不可能补足所需要的所有数学预备知识。此外,现有的课本中大多比较重视将泛函分析作为一个独立的学科系统地加以讲解,很少花篇幅详细介绍基本思想的来龙去脉以及与应用领域的衔接。另一方面,在这些专业的实践中,泛函分析知识主要是作为一种方便的数学语言和工具来使用的,若为掌握这个工具花大量时间去啃抽象的数学,既没有时间也没有必要。我们编写这本小书的目的就是希望能为相关专业的学生快速熟悉泛函分析基本概念和方法提供一个指南。书中尽量用学生已经比较熟悉的内容和直观作为原型,逐步地引入抽象概念,强调与熟知的数学现象相关联的知识,避免过多的形式化数学基础与技术细节,让学生能尽快地接触到抽象概念和方法的应用。例如,本书中很少涉及拓扑概念(当然一些拓扑思想不可避免地隐含在证明或推理过程中),甚至很少提到 Hahn - Banach 定理。书中为数不多的几个非平凡应用例子也主要来自于信号处理而不是纯数学领域,比如 Fourier 变换、Shannon 采样定理、时频分析中的 Heisenberg 测不准原理、Balian - Low 定理以及分布(广义函数)等。

毫无疑问,仅靠阅读这样一本入门性质的小书不可能对泛函分析及其应用有太深的了解。为部分弥补本书内容方面的欠缺,我们在书后的参考文献分别附有简短的注释,除列举出本书写作时经常参考的资料外,主要是向读者推荐一些可供进一步钻研和学习的文献。对文献的选择和注释仅代表笔者个人的不成熟看法。

本书作为应用泛函分析课程的讲义已经使用多次。参加本课程的北京师范大学信息科学学院 2001,2002 和 2003 级研究生们在课上或者通过 E-mail 给我

们反馈了很多有价值的建议和改进意见;北京师范大学信息科学学院副院长黄荣怀教授鼓励作者将讲义整理成书,并始终关注和支持本书的写作和出版;曾海军老师为本书出版提供了很多帮助;作者的同事和朋友也提出不少中肯意见,在此我们深表感谢。

本书写作过程中参考了大量的国内外有关著作,其中对本书影响比较大的书目均列在书后的参考文献中。由于我们都非泛函分析方面专家,水平有限,错误和不当之处在所难免,望使用本书的读者和专家学者批评指正。

樊磊　何伟

2004.12

购书请拨打电话:(010)58581118

策划编辑　李　蕊
责任编辑　李　陶
封面设计　李卫青
责任绘图　郝　林
版式设计　张　岚
责任校对　杨凤玲
责任印制　陈伟光

目　录

第1章 赋范空间

本章引入泛函分析中一些最基本的概念和结论，包括：赋范空间及其线性算子、完备性、Banach 空间、连续(有界)线性算子、Hahn - Banach 定理、对偶空间、Banach 代数、Banach 不动点定理等等．我们通过对一个求解微分方程的具体问题的仔细分析，从单个具体的解(函数)逐步被引申到抽象空间(赋范线性空间)的概念，并根据问题的需要自然地在抽象空间中引进诸如收敛、完备性和完备化、线性变换与有界线性变换等泛函分析的重要思想和概念．

记号约定

本书中将不加说明地使用下列标准逻辑和集合记号：

$\forall$：全称量词(对所有……)；

$\exists$：存在量词(存在……)；

$\Rightarrow$：蕴涵(如果……，则……)；

$\Leftrightarrow$：逻辑等价(当且仅当，充分必要，……)．

$\mathbf{N}=\{n \mid n=0,1,2,3,\cdots\}$：全体非负整数的集合或称自然数集；同时也规定 $\mathbf{N}_+=\{n \mid n=1,2,3,\cdots\}$：全体正整数的集合．

$\mathbf{Z}=\{n \mid n=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$：全体整数的集合；

$\mathbf{Q}=\{p/q \mid p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0\}$：全体有理数的集合；

$\mathbf{R}$：全体实数的集合；$\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R} \mid x>0\}$；

$\mathbf{C}$：全体复数的集合．

§1.1 从求解微分方程谈起

本节将通过分析一个具体实例，说明泛函分析的基本思想和概念在分析数学的应用中会自然(甚至是不可避免地)出现．同时在分析这个问题的过程中，顺便也简要回顾一下数学分析和线性代数中的若干概念和结果．

例 1.1 设 g 是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数．试求解下列微分方程的边值问题：

$$\begin{aligned} &f''(x)+f(x)=g(x),\ a\leqslant x\leqslant b,\\ &f(a)=1,\ f'(a)=0 \quad (\text{边值条件}). \end{aligned} \tag{1}$$

解(概要)　根据微分方程理论,可先考虑对应的齐次方程:

$$f''(x)+f(x)=0. \tag{2}$$

容易知道,(2)的通解是:

$$f(x)=A\sin x+B\cos x,$$

其中 A,B 为任意常数.

当 $g(x)$为$[a,b]$上任意连续函数时,没有一般的通用方法能求解方程(1).但在实践中,一个经常有效的方法(尽管我们并不十分清楚它为什么有效!)是所谓的**常数变易法**.这种方法用于求解方程(1)的一般过程是:先假设(2)的通解中出现的常数 A,B 为依赖于 x 的函数(因此也就记为 $A(x),B(x)$),然后将 $f(x)$代入到原方程(1)后,根据给定的边值条件找到其所必须满足的性质或条件.

于是,我们假定:

$$f(x)=A(x)\sin x+B(x)\cos x,$$

其中 $A(x),B(x)$为待定函数.求导数得到:

$$f'(x)=A'(x)\sin x+B'(x)\cos x+A(x)\cos x-B(x)\sin x.$$

当然,我们可以继续求 $f''(x)$,然后代入到方程(1)中得出函数 $A(x)$和 $B(x)$应满足的条件.但如果直接求 $f''(x)$,相应的表达式将非常复杂,所以我们试图对 $A(x),B(x)$施加一个自然的限制条件,即令:

$$A'(x)\sin x+B'(x)\cos x=0. \tag{3}$$

从而 $f'(x)$化简为如下形式:

$$f'(x)=A(x)\cos x-B(x)\sin x.$$

现在对 $f(x)$求二阶导数,整理后得到:

$$f''(x)=A'(x)\cos x-B'(x)\sin x-f(x).$$

于是:

$$g(x)=A'(x)\cos x-B'(x)\sin x. \tag{4}$$

现在(3),(4)就是函数 $A(x),B(x)$应该满足的条件.将其联立求解可以得出:

$$A'(x)=g(x)\cos x,B'(x)=-g(x)\sin x.$$

再结合原方程的初值条件求出函数 $A(x),B(x)$的显式表达式:

$$A(x)=\sin a+\int_a^x g(t)\cos t\,dt,$$

$$B(x)=\cos a-\int_a^x g(t)\sin t\,dt.$$

将其代入到表达式 $f(x)=A(x)\sin x+B(x)\cos x$ 中,并适当地化简就得到了原边值问题的解:

$$f(x)=\cos(x-a)+\int_a^x g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t.$$

容易验证:这个 $f(x)$的确满足所提出的边值问题.

下面我们尝试用相同的方法来求解下列形式的**非线性**边值问题.

问题 设 $\sigma(x)$是$[a,b]$上连续函数.试求解下列微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} f''(x)+f(x)=\sigma(x)f(x), a\leqslant x\leqslant b, \\ f(a)=1, f'(a)=0 \quad (\text{边值条件}). \end{cases} \tag{5}$$

按照上述常数变易法不难得出,此时的解应该满足如下条件:

$$f(x)=\cos(x-a)+\int_a^x \sigma(t)f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

但是要注意:这与前面的情形完全不同了,因为原来提出的问题(5)并没有得到解决,我们仅仅是将求解**微分方程**(5)的问题转化为求解**积分方程**(6).

注 方程(6)是一个所谓的 **Volterra** 型积分方程的例子,其一般形式为:

$$f(x)=u(x)+\int_a^x f(t)k(x,t)\mathrm{d}t.$$

后面求解(6)的方法本质上也适用于这种类型的积分方程.

为了找到求解的途径,我们试图将问题中的一些具体细节抽象化.首先,出现的特殊函数可以用一般的固定函数来代替,所以令:

$$u(x)=\cos(x-a).$$

其次,方程(6)的右边是含有未知函数 f 的一个变上限积分,可以看成是对该函数的一种**变换**.与我们熟知的将数变为数的函数概念有所不同:这个变换是将函数变为函数,所以也称为**泛函数**.于是,对$[a,b]$上的任意连续函数 h,令 $K(h)$是如下定义的$[a,b]$上函数:对 $x\in[a,b]$,

$$K(h)(x)=\int_a^x \sigma(t)h(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t.$$

容易看到,这样定义的函数 $K(h)$也是$[a,b]$上的一个连续函数.于是:K 将$[a,b]$上的任意连续函数 h **变换(映射)**为$[a,b]$上的另一个连续函数 $K(h)$.

现在用 $C[a,b]$来表示闭区间$[a,b]$上的全体连续函数的集合.积分方程(6)可以转化为 $C[a,b]$中下列形式的方程:

$$f=u+K(f). \tag{7}$$

如果这个方程在 $C[a,b]$中可以求解,那么原来的求解方程(6)问题也就随之解决了.

方程(7)是关于 $C[a,b]$中元素的一个代数表达式,涉及到 $C[a,b]$中元素的线性运算和定义在 $C[a,b]$上的变换.所以要使(7)有意义,首先必须明确$C[a,b]$中的线性结构以及变换的精确含义.

显然,在 $C[a,b]$中可以规定如下的线性运算:

(1) $\forall f,g\in C[a,b],(f+g)(x)=f(x)+g(x)$;

(2) $\forall f\in C[a,b],\alpha\in\mathbf{R},(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$.

这些运算使 $C[a,b]$成为实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个**线性空间**(或**向量空间**).然后我们注意:K 是线性空间$C[a,b]$上的一个**线性变换**(或**线性映射**),即满足下列条件:对任意 $h,k\in C[a,b]$,以及任意常数 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,

$$K(\alpha h+\beta k)=\alpha K(h)+\beta K(k).$$

任取$[a,b]$上的连续函数 f_0,递归地构造 $C[a,b]$中的函数列$\{f_n\}$如下:

$$f_1=u+K(f_0),\cdots,f_n=u+K(f_{n-1}),\cdots.$$

如果对于某个正整数 n,有 $f_n=u+K(f_n)$,那么 f_n就是我们要找的一个解.但若不然,就需要取极限了.直观地讲:如果序列$\{f_n\}$**收敛于**$[a,b]$上的一个连续函数 f,则由 K 的**连续性**(变换符号与极限符号可以交换),f 就必定是(7)的一个解.

因此,我们所需要的是如下这样一些基本概念的框架:在线性空间 $C[a,b]$(一个代数结构)内,可以谈论诸如序列的**收敛**和变换的**连续性**等分析内容.

§1.2 赋范线性空间

通过对实函数连续性概念的分析,我们发现:为了谈论连续性,实数的绝对值在其中起到度量大小或相互接近的作用.因此要在一般线性空间上能够定义连续性概念,我们需要一种类似于绝对值的、可以用来衡量元素**长度**或元素之间**接近程度**的量.

定义 1.2 设 V 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间,且 $\|\cdot\|:V\to\mathbf{R}$ 是一个映射,满足下列性质:对 $\forall u,v\in V,\alpha\in\mathbf{R}$,

(1) $\|u\|\geqslant 0$,且 $\|u\|=0\Leftrightarrow u=0$; (非负性)

(2) $\|\alpha u\|=|\alpha|\,\|u\|$; (齐次性)

(3) $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$, (三角不等式)

则称$\|\cdot\|$是 V 上的一个**范数**,而对$(V,\|\cdot\|)$称为 $\mathbf{R}$ 上的一个**赋范线性空间**,或简称为**赋范空间**.对 $u\in V$,$\|u\|$ 称为 u 的**范数**,赋范空间$(V,\|\cdot\|)$的**维数**就是 V 作为 $\mathbf{R}$ 上线性空间的维数.此外,当从上下文能够明确范数$\|\cdot\|$的所指时,我们也将$(V,\|\cdot\|)$简记为 V.

只要将范数所满足的性质与实数绝对值(或复数的**模**)的最基本性质做比较,就会看到一般线性空间中元素(向量)的范数实质上就是平面或空间中向量长度的一种抽象(练习 1.1),这个事实可作为理解与范数有关的概念、结论和证明的出发点(练习 1.2 是一个例子).当然,$\mathbf{R}$ 本身关于通常的绝对值构成 $\mathbf{R}$ 上的一个赋范线性空间.

注 范数的定义是抽象的,因此在线性空间上定义范数的方法可以相当随意,即只要满足定义 1.2 中三个条件的任意映射都有资格成为一种范数,尽管有些范数看起来与长度的直观理解相去甚远.

有了范数(长度)的概念,收敛和极限的定义就是常规性的:

定义 1.3 设$(V,\|\cdot\|)$是 $\mathbf{R}$ 上的赋范线性空间,$\{u_n\}$是 V 中一个序列,$u\in V$.若

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0,$$

则称序列$\{u_n\}$(依范数)**收敛**于 u,或称 u 是序列$\{u_n\}$的**极限**,并记为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u,\text{或者 } u_n\to u\,(n\to\infty).$$

用标准的 $\varepsilon-N$ 语言,上述定义可以改写为:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N\in\mathbf{N}_+,\text{使得当 } n\geqslant N \text{ 时},\|u_n-u\|<\varepsilon.$$

我们注意到:除了用一般范数代替实数绝对值外,这个定义与实数序列的收敛和极限定义几乎完全一样.根据这种相似性,我们可以进一步引入诸如**子序列**等相关概念,而且可以期待在赋范空间中,收敛序列的一般性质与收敛数列的性质非常相似,部分结论请参见练习 1.3.

例 1.4 现在我们考虑将 $C[a,b]$作成赋范空间,所选择的范数是为了满足求解方程(7)的需要.对 $f\in C[a,b]$,定义

$$\|f\|_\infty=\|f\|=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,$$

则不难证明$\|\cdot\|:C[a,b]\to\mathbf{R}$ 是一个范数,即$\|\cdot\|$满足下列条件:$\forall f,g\in C[a,b],\alpha\in\mathbf{R}$,

(1) $\|f\|\geqslant 0$,且$\|f\|=0\Leftrightarrow f=0$;

(2) $\|\alpha f\|=|\alpha|\,\|f\|$;

(3) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

这使$(C[a,b],\|\cdot\|)$成为 $\mathbf{R}$ 上的赋范线性空间.

注 熟知数学分析相关知识的读者不难看出:在$(C[a,b],\|\cdot\|)$中,依范数收敛等价于$[a,b]$上连续函数列的**一致收敛**.

现在考虑赋范线性空间之间的映射及其连续性.

定义 1.5 设$(V,\|\cdot\|_V)$,$(W,\|\cdot\|_W)$是 $\mathbf{R}$ 上的赋范线性空间,$T:V\to W$ 是一个映射(也称为变换或算子).

(1) 若存在映射 $S:W\to V$,使得对$\forall\,u\in V,w\in W$,有:

$$ST(u)=u,TS(w)=w$$

(其中 ST 表示映射的合成),则称 S 是 T 的**逆映射**(**算子**),并记作 $S=T^{-1}$.若 T 有逆映射,则称 T 是**可逆的**.一个可逆的线性映射称为**线性空间同构**.注意:这个定义没有涉及到范数,所以对一般线性空间也都有效.

(2) 若 T 是线性空间的同构,且对 $\forall u \in V$,有:

$$\| T(u) \|_W = \| u \|_V,$$

则称 T 是从赋范空间 V 到 W 的一个(**保范数**)**同构**或**等距同构**.如果存在 V 到 W 的保范数同构,则称 V 与 W(作为赋范空间)是**同构的**,并记为 $V \cong W$.

(3) 若 $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v),$$

则称 T 是一个**线性映射**;

(4) 若存在常数 $C>0$,使得对 $\forall u \in V$,

$$\| T(u) \|_W \leqslant C \| u \|_V,$$

则称 T 是**有界映射**,常数 C 称为 T 的一个**界**;

(5) 设 $u_0 \in V$.若对 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,使得

$$(\| u - u_0 \|_V < \delta) \Rightarrow (\| T(u) - T(u_0) \|_W < \varepsilon),$$

则称 T 在 u_0 点**连续**.若 T 在 V 的每个点都连续,则称 T 在 V 上**连续**.

特别地,当 $W = \mathbf{R}$ 时,一个(线性/有界/连续)映射 $T: V \to \mathbf{R}$ 也称为(线性/有界/连续)**泛函**.

定理 1.6 设$(V, \| \cdot \|_V)$,$(W, \| \cdot \|_W)$是 $\mathbf{R}$ 上的赋范线性空间,$T: V \to W$ 是线性变换.则以下条件等价:

(1) T 在 V 的某个点(比如说 O 点)连续;

(2) T 在 V 上连续;

(3) T 是有界的.

证明 (1)⇒(2),设 T 在 O 点连续,则对 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,使得 $\forall u \in V$,

$$(\| u \| < \delta) \Rightarrow (\| T(u) \| < \varepsilon).$$

现在对 $\forall v \in V$,若 $\| u - v \|_V < \delta$,则根据 T 的线性性质,有:

$$\| T(u) - T(v) \| = \| T(u - v) \| < \varepsilon,$$

即 T 在 v 点也连续,所以 T 在整个 V 上连续.

注 在证明中,δ 的选择仅依赖于 ε,而与 v 的选取无关.换言之,线性映射的连续一定是**一致连续**,以下在(2)⇒(3)的证明中要用到这个事实.

(2)⇒(3),取 $\varepsilon = 1$,则 $\exists \delta>0$,使得对 $\forall u \in V$,

$$(\| u \| < \delta) \Rightarrow (\| T(u) \| < 1).$$

现在对 $x \in V$,取 $u = (\delta/2 \| x \|) x$,则有:

$$\begin{aligned} \| u \| &= \| (\delta/2 \| x \|) x \| \\ &= (\delta/2 \| x \|) \| x \| < \delta, \end{aligned}$$

因此

$$\| T(u) \| = \| T((\delta/2 \| x \|) x) \|$$

$$= (\delta/2\|x\|)\|T(x)\| < 1,$$

或者 $\|T(x)\| < (2/\delta)\|x\|$.

(3) ⇒(1)是显然的.

将定理 1.6 的结论应用于我们求解方程的例子,可以得到所需要的算子 K 的连续性.

命题 1.7 例 1.1 中定义的 $K:C[a,b]\to C[a,b]$是有界线性算子,因此一定是连续的.

证明 前面我们已经证明了 $K:C[a,b]\to C[a,b]$是线性算子,所以只要再证明其有界性.对于$\forall h\in C[a,b]$,根据 $C[a,b]$中范数的定义,

$$\begin{aligned}
\|K(h)\| &= \sup_{a\leqslant x\leqslant b}|K(h)(x)| \\
&= \sup_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^x \sigma(t)h(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x |\sigma(t)||h(t)||\sin(x-t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_a^b |\sigma(t)||h(t)||\sin(x-t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_a^b \|\sigma\|\,\|h\|\,\mathrm{d}t \\
&= (b-a)\|\sigma\|\,\|h\|,
\end{aligned}$$

这表明常数 $C=(b-a)\|\sigma\|$是 K 的一个界,于是证明了 K 的有界性.

§1.3 完备性 Banach 空间

有理数域 **Q** 和实数域 **R** 之间有一个重要区别:一个实数列若收敛,则其极限必定也是实数.但却存在这样的有理数列$\{a_n\}$,当 n,m 充分大时,该数列中的任意项之间的差$|a_m-a_n|$可以任意小(小于任何预先给定的整数),但在有理数域 **Q** 内却没有极限.从直观上看数列$\{a_n\}$似乎应该有一个极限.事实上,它的确是有极限的,然而,这个极限不是有理数(在 **R** 中,但不在 **Q** 中).这说明 **R** 关于数列的"极限运算"是完备的,而 **Q** 不是.在考虑涉及极限的问题时,这种完备性具有极其重要的作用.

定义 1.8 设$(V,\|\cdot\|)$是 **R** 上的赋范线性空间.

(1) 设$\{u_n\}$是 V 中的一个序列,若对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}$,使得

$$(n,m\geqslant N)\Rightarrow(\|u_m-u_n\|<\varepsilon),$$

则称$\{u_n\}$是 V 中的 **Cauchy 序列或基本序列**;

(2) 若 V 中的任何 Cauchy 序列都收敛,则称$(V,\|\cdot\|)$是**完备的**;

(3) 一个完备的赋范线性空间称为 **Banach 空间**.

例如,**R** 关于绝对值是完备的,因此是 Banach 空间,但 **Q** 不是 Banach 空间.

现在我们可以建立求解算子方程 $f=u+K(f)$的精确框架.

命题 1.9 $(C[a,b],\|\cdot\|)$是 Banach 空间.

证明 到目前为止,我们已经知道$(C[a,b],\|\cdot\|)$是赋范空间,惟一需要证明的就是$(C[a,b],\|\cdot\|)$的完备性,即 $C[a,b]$中的任何 Cauchy 序列必定收敛.

设$\{f_n\}$是$(C[a,b],\|\cdot\|)$中的 Cauchy 序列,即对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,使得

$$(n,m\geqslant N)\Rightarrow(\|f_m-f_n\|=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon).$$

现在对每个 $x\in[a,b]$,数列$\{f_n(x)\}$是 **R** 中的一个 Cauchy 序列,所以根据 **R** 的完备性,存在惟一的数 $f(x)\in\mathbf{R}$,满足$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

因为$\{f_n\}$是 Cauchy 序列,所以对给定的 $\varepsilon>0$,可找到 $N\in\mathbf{N}_+$,使得当 n, $m\geqslant N$ 时,有 $\|f_m-f_n\|<\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-f_N(x)|&=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f_N(x)|\\&\leqslant\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\sup_{n\geqslant N}|f_n(x)-f_N(x)|\\&=\sup_{n\geqslant N}\|f_n-f_N\|\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

如果我们能证明 f 在$C[a,b]$中,那么上述推导表明在 $C[a,b]$中,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$.

为证明函数 f 在$C[a,b]$中,我们必须证明它是连续的. 取固定的 $x_0\in[a,b]$. 根据前面的推导,对给定的 $\varepsilon>0$,可以选择 n,使得

$$\|f_n-f\|=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-f_N(x)|<\varepsilon/3.$$

再根据 f_n的连续性,选取到 $\delta>0$,使得当 $y\in[a,b]$,且$|x_0-y|<\delta$ 时,

$$|f_n(x_0)-f_n(y)|<\varepsilon/3.$$

将以上结论综合起来得到:

$$\begin{aligned}|f(x_0)-f(y)|&\leqslant|f(x_0)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|\\&\leqslant\|f_n-f\|+|f_n(x)-f_n(y)|+\|f_n-f\|\\&<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon,\end{aligned}$$

这证明 f 在 y 点连续.

注 在证明函数 f 连续时所使用的所谓$\varepsilon/3$ 方法,是一个非常基本的分析技巧.

在很多实际应用中,确定一个赋范空间是否为 Banach 空间非常重要,下面给出一个简单(但未必实用)的判别准则.

定义 1.10 设 V 是赋范空间,$\{u_n\}$是 V 中的一个序列.

(1) 若存在 $u\in V$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\right)=u,$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**可和的**,u 称为该级数的**和**.

(2) 若非负实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|$ 收敛,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**绝对可和的**.

定理 1.11 设 V 是赋范空间,则以下条件等价:

(1) V 是 Banach 空间;

(2) V 中的任何绝对可和级数也是可和的.

证明 我们只给出(2)⇒(1)的证明,而将(1)⇒(2)的证明留做练习.

设 $\{u_n\}$ 是 V 中的任意 Cauchy 序列,通过考虑 $\{u_n\}$ 的子序列(为简化起见,仍然沿用与原序列相同的记号),可知对每个 $k\in\mathbf{N}_+$,有

$$\|u_k-u_{k+1}\|<2^{-k},$$

于是根据实数级数的比较判别法,级数

$$u_1+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots$$

是绝对可和的.根据条件(2),该级数也是可和的.因此存在 $u\in V$,使得

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(u_k-u_{k-1})\right)=u.$$

这说明 $\{u_n\}$ 的某个子序列在 V 中收敛于 u,所以 $\{u_n\}$ 在 V 中也收敛于 u(练习 1.7),这就证明了 V 的完备性.

现在再次回到本章开始时提出的问题.

命题 1.12 对 $\forall f_0\in C[a,b]$,迭代地做出函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_1=u+K(f_0),\cdots,f_n=u+K(f_{n-1}),\cdots,$$

则 $\{f_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列.序列 $\{f_n\}$ 在 $C[a,b]$ 中的极限是算子方程

$$f=u+K(f)$$

的一个解.

证明 由函数序列 $\{f_n\}$ 的定义,

$$f_1=u+K(f_0),$$

$$f_2=u+K(f_1)=u+K(u+K(f_0))=u+K(u)+K^2(f_0),$$

一般地用归纳法可知,对 $n\geqslant1$,有

$$f_n=u+K(f_{n-1})=u+K(u)+K^2(u)+\cdots+K^{n-1}(u)+K^n(f_0).$$

于是对任何 $n,m\in\mathbf{N}_+$,当 $n>m$ 时,

$$f_n-f_m=K^m(u)+\cdots+K^{n-1}(u)+K^n(f_0)-K^m(f_0).$$