中国科学院指定考研参考书

第二版

高等数学导论

中国科学技术大学高等数学教研室 编

中册

GAODENG SHUXUE DAOLUN

中国科学技术大学出版社

高 等 数 学 导 论

（第二版）（中册）

中国科学技术大学高等数学教研室　编

中国科学技术大学出版社
2004·合肥

内 容 提 要

本“导论”是中国科学技术大学非数学专业通用的讲义，是在35年的使用过程中，经过不断的修订、充实而成的．与同类书相比，其广度有所拓宽，论证定理、公式逻辑严谨，编排内容循序渐进，阐述概念联系实际，深入浅出．为加深对概念、定理等的理解和掌握，书中编有丰富的例题，以及习题和总复习题．

本“导论”分三册出版．上册讲述单变量函数微积分，中册讲述空间解析几何、多变量函数微积分，下册讲述级数与常微分方程．本书另配学习辅导一册．

本“导论”可作理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学．

高等数学导论

（第二版）（中册）

中国科学技术大学高等数学教研室　编

*

中国科学技术大学出版社出版发行

（安徽省合肥市金寨路96号，邮编：230026）

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本：850×1168/32　印张：13.875　字数：360千

1990年2月第1版　1996年5月第2版

2004年6月第5次印刷　印数：25001—28000册

ISBN 7-312-00686-8/O·163　定价：13.00元

目　　次

5 空间解析几何

坐标法和向量代数的方法，是研究几何学的有力工具. 本章要应用以上方法，研究一些关于直线和平面的问题，介绍一些常见曲面，讨论空间的坐标变换.

5.1 空间直角坐标系

与平面解析几何类似，为了使空间的几何图形与代数方程联系起来,须在空间中引进坐标，以使空间中的点与某数组对应起来，最常用的坐标系是空间直角坐标系.

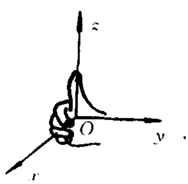

图 5.1

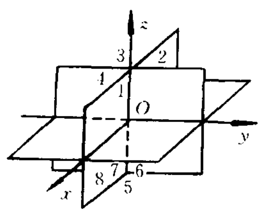

图 5.2

过空间某一定点 O 作三条互相垂直的直线，在这些直线上取定一个相同的长度单位，再各选定一个方向作为正向，这样就有了三条数轴. 把这三条数轴排定一个次序，依次记为 x 轴、y 轴和 z 轴，这样就构成了一个空间直角坐标系，记作 $Oxyz$. 称定点 O 为坐标原点，称三条轴为坐标轴，x 轴也称为横轴，y 轴也称为纵轴，而 z 轴也称为立轴. 通常我们还规定三坐标轴构成右手系统，即

用右手握住 z 轴，且大姆指指向 z 轴的正向，则其余四指弯曲的方向恰是从 x 轴正向沿最小角度转到 y 轴正向的旋轴方向(图 5.1). 三坐标轴中的每一对轴所确定的三张平面 Oxy , Oyz 和 Ozx 两两相互垂直，称为坐标平面. 这些平面把空间分成八个区域，称为八个卦限(图 5.2).

现在设 P 为空间中的任意一点，过点 P 分别作垂直于 x 轴，y 轴与 z 轴的三张平面，它们与各坐标轴的交点依次为 A,B,C (图 5.3). 设这些交点对应的实数分别是 a,b,c . 于是点 P 决定了一个三有序实数组 (a,b,c) . 反之，如果给出一个三有序实数组 (a,b,c)，并过 x 轴，y 轴，z 轴上的点 A,B,C 作三张平面，分别垂直于其所在的坐标轴，则这些平面就相交于空间的一点 P . 这样一来，空间的点 P 与三有序实数组 (a,b,c) 间就建立了一一对应关系，而有序数组 (a,b,c) 就称为点 P 的直角坐标，记作 $P(a,b,c)$ ，其中 a 称为横标，b 称为纵标，c 称为立标.

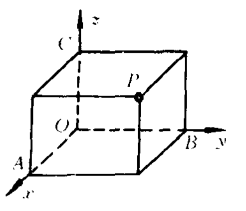

图 5.3

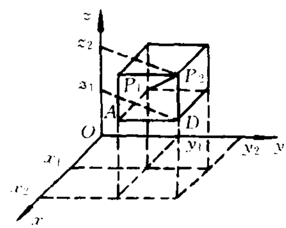

图 5.4

由定义可知，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$ ，若点 P 在 x 轴上，则其坐标为 $(a,0,0)$;同样，对于 y 轴上的点，坐标就是 $(0,b,0)$ ；而对于 z 轴上的点，坐标是 $(0,0,c)$. 若点 P 在平面 Oxy 上，则其坐标为 $(a,b,0)$ ；同样，对于平面 Ozx 上的点，坐标是 $(a,0,c)$ ；对于平面 Oyz 上的点，坐标就是 $(0,b,c)$. 容易看出，在八个卦限中，有一个卦限内的每一点的横、纵、立标全是正，称它为第一卦

限，而只有横标是负的卦限称为第二卦限，其余卦限的称号如图5.2所示.

应用点的坐标概念，可以导出空间两点间的距离公式.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，过点 P_1 与 P_2 分别作垂直于各坐标轴的平面，相交而成一长方体(图5.4)，它的三条棱长各是

$$P_1A = |x_2 - x_1|,\ AD = |y_2 - y_1|,\ DP_2 = |z_2 - z_1|.$$

由于所求距离 P_1P_2 为其对角线的长，故得

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= P_1A^2 + AD^2 + DP_2^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \end{aligned}$$

或开方后给出

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

这就是空间两点 P_1 与 P_2 间的距离公式. 特别点 $P(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$PO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例1 求点 $P_1(1,0,-1)$ 与 $P_2(4,3,-1)$ 之间的距离.

解 $$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2 + (-1+1)^2} \\ &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

例2 求 z 轴上一点，使与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等.

解 设所求的点为 $M(0,0,z)$，则由两点间的距离公式可得

$$AM = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{66 - 14z + z^2},$$

$$\begin{aligned} BM &= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (z+2)^2} \\ &= \sqrt{38 + 4z + z^2}. \end{aligned}$$

由题设 $AM = BM$，所以

$$66 - 14z + z^2 = 38 + 4z + z^2,$$

解得 $z = \frac{14}{9}$，故所求之点为 $\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

习题 5.1

1. 指出下列各点在哪条坐标轴上或哪个坐标平面上?

(1) $(-4,0,0)$; (2) $(0,-7,0)$;

(3) $(0,-7,2)$; (4) $(-5,0,3)$.

2. 指出下列各点位于第几卦限?

(1) $(2,-1,3)$; (2) $(-1,-2,4)$;

(3) $(1,4,-3)$; (4) $(-1,-2,-3)$;

(5) $(1,-1,-1)$; (6) $(-2,1,-3)$.

3. 设某点与给定点 (a,b,c) 分别对称于下列坐标平面:(1) Oxy;(2) Oyz;(3) Oxz，求它的坐标.

4. 设某点与给定点 (a,b,c) 分别对称于:(1) x 轴;(2) y 轴;(3) z 轴;(4) 原点 O，求它的坐标.

5. 求点 $P(4,-3,5)$ 到坐标原点以及到各坐标轴的距离.

6. 求顶点为 $A(2,1,4)$，$B(3,-1,2)$，$C(5,0,6)$ 的三角形各边的长.

7. 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

8. 在 Oyz 平面上求一点 P，使它与三已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 及 $C(0,5,1)$ 等距离.

9. 求点 $(1,-3,2)$ 关于点 $(-1,2,1)$ 的对称点. 提示:应用中点公式.

5.2 向量代数

5.2.1 向量的概念

在研究力学与物理学时，经常会遇到这样一些量，仅知道它们数值的大小是不够的，要完全表示它们，还必须同时指出它们的方向，例如速度，加速度，力等等. 这种既有大小又有方向的量称为向量. 我们可以用一个有向线段来表示它，线段的长度表示它的大小，线段的方向表示它的方向. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$（图 5.5）. 有时也用小写的粗体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$ 来记向量.

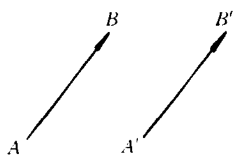

图 5.5

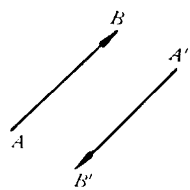

图 5.6

如果两个向量的大小相等、方向相同，就称这两个向量是相等的. 如图 5.5 中，$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 是相等的向量，记作

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

从两个向量相等的定义可知，一个向量平行移动后，仍为与原来向量相等的向量，所以向量的起点可以放置在空间的任意一点. 这种能平移至任意起点的向量称为自由向量. 必须注意，在实际问题中，有些向量不能平移，例如一个力，它的作用点只能沿力的作用线移动，而不能移向任意点. 这种只能沿一直线移动的向量称为滑动向量. 今后没有特别说明，我们只考察自由向

量.

如果两个向量的大小相等而方向相反，则称此二向量为相反向量. 如图 5.6，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 就是相反向量，记作 $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$. 因此又称 $\overrightarrow{A'B'}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 的负向量.

向量的长度又称为向量的模. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 a 表示. 模为 1 的向量称单位向量. 模为零的向量称零向量，记作 $\mathbf{0}$. 显然零向量的起点和它的终点是重合的，所以它没有确定的方向. 我们规定，一切零向量都相等. 这些特殊向量在向量的代数运算中有着很重要的作用.

5.2.2 向量的加法与数乘

将物理学中的速度与力的合成法则加以抽象，就得到向量之和的定义.

设给定具有共同起点 O 的两个向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$，则以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量 $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$（图 5.7）就称为这两个向量的和，记作

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

或简写成

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

这种求和的方法称为平行四边形法则.

从图 5.7 可知 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$，故得

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}.$$

由此可推出求两个向量的和的三角形法则.

在向量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 引向量 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$，则以 O 为起点，C 为终点的封口向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和.

特别，如果两个向量在同一直线上，则它们的和就是这样一个向量：当两向量同向时，和向量的方向与原向量的方向相同，其模等于两向量的模之和；当两向量反向时，和向量的方向与模较大的向量的方向相同，而其模等于两向量模之差.

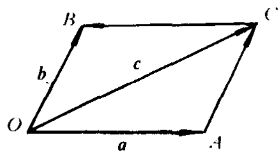

图 5.7

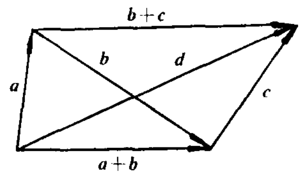

图 5.8

如果两个向量是相反向量，则其和显然为零向量，就是

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

如果两个向量之一为零向量，则其和仍为原非零向量，就是

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$$

此外，从三角形法则容易证明向量的加法满足交换律，即

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

上面对两个向量所建立的加法运算可以推广到多个向量的情形. 例如欲求三个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的和，可在 $\boldsymbol{a}$ 的终点上引 $\boldsymbol{b}$，再在 $\boldsymbol{b}$ 的终点引 $\boldsymbol{c}$，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点至 $\boldsymbol{c}$ 的终点引所得折线的封口向量 $\boldsymbol{d}$ (图 5.8)，即为所求的和，记作

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

从图 5.8 不难看出，这个和向量亦可先作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，再与 $\boldsymbol{c}$ 相加而求得. 又若以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ 相加，则得到同样的结果. 就是说，向量的加法满足结合律

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}.$$

向量的减法与数量的减法一样是定义为加法的逆运算.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和是向量 $\boldsymbol{c}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 就定义为向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 之差，记作

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}.$$

从图 5.7 可见

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{a}).$$

于是得到减法的法则：若要从向量 $\boldsymbol{c}$ 减去向量 $\boldsymbol{a}$，就只须把 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到 $\boldsymbol{c}$ 上去.

现在再来考虑向量与数的乘积. 先叙述一般的定义.

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和数 λ，则其乘积表示这样一个向量，它的模等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模之 $|\lambda|$ 倍，而方向当 λ 大于零时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 λ 小于零时与 $\boldsymbol{a}$ 相反(图 5.9).

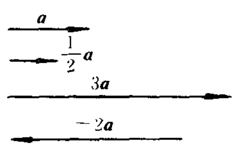

图 5.9

由定义可知，当 $\lambda = 0$ 时，$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = 0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. 就是说零与任何向量相乘，其积为零向量.

显然又有

$$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

就是 -1 与任何向量相乘，其积为该向量的负向量.

利用向量与数的乘积，向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,$$

其中 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量. 由此得到

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

即一个不为零的向量除以它的模后是一同向的单位向量.

向量与数的乘积具有以下性质.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是给定的两个向量，而 λ 及 μ 是任意常数，则有

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a};$$