线性代数理论与方法

XIAN XING DAI SHU LI LUN YU FANG FA

刘展鸿
黄福生　编著
王颂生

科学出版社
www.sciencep.com

线性代数理论与方法

XIAN XING DAI SHU LI LUN YU FANG FA

线性代数理论与方法

刘展鸿　黄福生　王颂生　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书主要介绍矩阵理论、矩阵的相似标准形、矩阵的分解、矩阵的有理标准形、线性空间与线性变换(映射)、二次型与矩阵的合同、欧氏空间与复方阵的酉相似等内容.每章后面都配有大量习题.

本书可作为数学专业高等代数后继课程的教材,可作为数学专业报考研究生的辅导材料,也可作为理工科、计算机学科高等代数与线性代数的教学和研究参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数理论与方法/刘展鸿,黄福生,王颂生编著.—北京:科学出版社,2004.8

ISBN 7-03-013876-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①刘…②黄…③王… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第068583号

责任编辑:杨瑰玉　责任印制:高　嵘

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社出版　各地新华书店经销

*

2004年8月第一版　开本:850×1168 1/32

2004年8月第一次印刷　印张:7 1/4

印数:1—4 000　字数:188 000

定价:12.00元

前　　言

高等代数是大学数学专业的一门重要基础课程，也是理工科大学各专业的重要专业基础课，其主要内容是以矩阵、线性空间、线性变换等为研究对象的线性代数理论.该课程的特点是比较抽象，对初学者来说，不容易掌握要领，与其他基础课程相比较，遇到的困难会更多些，在碰到问题或解答问题时，缺少方法，无从入手，以致一筹莫展.编写本书的目的就是为了使初学者进一步加深对课本内容的理解，并用大量的例题阐述应用基本知识解决问题的基本方法与技巧，进一步提高读者分析问题、解决问题的能力.高等代数(线性代数)也是数学各专业研究生入学考试的一门必考课程，许多大专院校都为本科生开设了高等代数的后继课程，主要是为报考研究生而开设的，但目前国内这类系统的教材甚少，编写本书的目的也是为了满足这种需要.

基于上述目的，在编写本书时，力图对线性代数的基本知识和基本理论进行系统的分析和有机的结合，并将知识内容提升和拓展，同时在每一章节中选择了具有典型意义的例题进行分析讲解，引入了许多新颖的证明方法和技巧，不少例子从不同角度给出了多种解法.读者不仅可以学到许多解题方法，还可以扩大知识面，开阔思路，增进学习兴趣，提高解题技巧和能力.每章末精选了一些习题和硕士生入学考试的典型试题以供读者练习.

江西师范大学数信学院从1981年起就开设了高等代数课程的后继课程，所以本书是代数教研室几代老师心血的结晶，该书的出版与代数教研室前辈的工作是分不开的.

该书的出版得到了江西师范大学教务处和数信学院的大力支持，在此我们谨致以深切的谢意.

全书共六章，第一、二章由刘展鸿执笔，第五、六章由黄福生执

笔,第三、四章由王颂生执笔,全书由王颂生统稿.

由于作者水平有限和经验不足,难免有错误和不当之处,我们诚恳希望各位同行与读者不吝指正.

编　者

2004年4月于江西师范大学

目 录

第一章 矩 阵

设 P 是一个数域，$a_{ij} \in P, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$，由 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的矩形数组 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 称为数域 P 上一个 m 行 n 列的矩阵，记作 $A = (a_{ij})_{m \times n}$，当 $m = n$ 时，称 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵. 特别当 $P = R$，称上述矩阵为实矩阵；当 $P = C$ 时，称为复矩阵.

矩阵是线性代数的最主要的内容之一，其贯穿线性代数的始终，也是处理许多数学问题的主要工具.

本章的主要概念有：分块矩阵，可逆矩阵与逆矩阵，矩阵的初等变换与初等矩阵，矩阵的秩，矩阵的等价等.

主要方法有：处理矩阵问题的矩阵分块方法，初等变换方法，降阶与升阶的方法，运用标准单位向量方法，可逆矩阵的判别与逆矩阵的求法，矩阵秩的应用等.

§1.1 基本概念及基本结论

定义 1.1 $A = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} \end{array}$ 称为分块矩阵，记作 $A = (A_{ij})_{r \times s}$，其中 A_{ij} 是 $m_i \times n_j$ 矩阵，称为 A 的子块.

定义 1.2 对数域 P 上 n 阶矩阵 A，若存在同阶方阵 B 使 AB

$= BA = E_n$,则称 A 为可逆矩阵,B 为 A 的逆矩阵.

逆矩阵是惟一的,记作 A^{-1}.

定义 1.3 矩阵的初等变换是指对矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 作如下的三种变换:

1) 交换 A 的 i,j 两行(列)的位置.

2) 以一个非零数 k 乘 A 的第 i 行(列).

3) 将 A 的第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上去.

定义 1.4 由单位矩阵经过一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵有:

交换矩阵 $$P(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

倍法矩阵 $$P(i(c)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (c \neq 0)$$

消去矩阵 $$P(i,j(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

定义 1.5 矩阵的行秩等于矩阵的列秩,称为矩阵的秩,记作 $r(A)$.

定义 1.6 如果矩阵 B 可以由 A 经过一系列初等变换得到,则称矩阵 A 与矩阵 B 等价.矩阵的等价满足反身性、对称性和传递

性.

本章的主要定理有:

定理 1.1 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$(非退化)且 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$,这里 A^* 为 A 的伴随矩阵.

定理 1.2 矩阵 A 可逆的充要条件是 A 可以表成初等矩阵的乘积.

定理 1.3 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是 A 等价于 E_n.

定理 1.4 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是 $n \times 2n$ 矩阵(A,E_n)可经过行初等变换化为(E_n,B),此时 $B = A^{-1}$.

定理 1.5 若 A,B 可逆,则 AB 可逆且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

定理 1.6 一个矩阵的秩为 r 的充分必要条件是矩阵中有一个 r 阶子式不为 0,同时所有 $r+1$ 阶子式全为 0.

定理 1.7 对任意矩阵 A 有 $r(A) = r(A')$

定理 1.8 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{jk})_{n\times l}$, 则 $r(AB) \leqslant \min(r(A), r(B))$.

定理 1.9 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$,且 $r(A) = r$,则存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 P,Q,使 $PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

定理 1.10 设 A,B 是两个 n 阶矩阵,则 $|AB| = |A| \cdot |B|$.

§1.2 矩阵的运算

定义 1.7 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$,称 $C = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$ 为 A 与 B 的和,记作 $A + B$. 对矩阵和,下列规则成立:

i) $A + B = B + A$.

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

iii) $A + 0 = A$.

iv) $A + (-A) = 0$.

定义 1.8 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, k \in P$,称 $C = (ka_{ij})_{m\times n}$ 为 k 与 A

的数乘，记作 $C = kA$. 关于数乘矩阵，下列规则成立：

i) $k(A+B) = kA + kB$.

ii) $(k+l)A = kA + lA$，其中 $k, l \in P$.

iii) $(k \cdot l)A = k(lA)$.

iv) $1A = A$.

定义 1.9 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{js})_{n\times l}$，称 $C = (c_{is})_{m\times l}$ 为 A 与 B 的积，记作 $C = AB$，其中 $c_{is} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{js}$.

关于矩阵乘法，下述规则成立：

i) $A(BC) = (AB)C$.

ii) $A(B+C) = AB + AC$.　　$(B+C)A = BA + CA$.

iii) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$，$k \in P$.

两矩阵能相乘的条件是第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数，一般说两矩阵相乘不满足交换律，即 $AB = BA$ 未必成立. 设 $A \neq 0$，$B \neq 0$ 且 $AB = 0$，则称 A 是一个零因子. 矩阵乘法存在零因子. 特别矩阵乘法不满足消去律，换言之，由 $AB = AC$ 不能保证有 $B = C$，$BA = CA$ 也不能保证 $B = C$.

定义 1.10 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，称 $A' = (a_{ji})_{n\times m}$ 为 A 的转置.

转置满足下列法则：

i) $(A')' = A$.

ii) $(A+B)' = A' + B'$.

iii) $(kA)' = kA'$.

iv) $(AB)' = B'A'$.

结合矩阵的运算给出两个结论：

1. 设 $P^{m\times n} = \{A = (a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij} \in P\}$，则 $P^{m\times n}$ 关于矩阵的加法和数乘运算构成数域 P 上一个 $m \times n$ 维的线性空间，其一组基为 E_{ij}，$i = 1,2,\cdots,m$；$j = 1,2,\cdots,n$. 这里 E_{ij} 是除 (i,j) 位置元素为 1 外，其余元素为零的 $m \times n$ 矩阵.

2. 设 $P^{n\times n} = \{A = (a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in P\}$，则 $P^{n\times n}$ 关于矩阵的加法和矩阵的乘法构成一个有单位元、有零因子的非交换环，称为数域

P 上 n 阶矩阵环.

§1.3 初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换是十分有用的工具,比如解线性方程组的消元法,求数字矩阵的秩,求一组 n 维向量的极大无关组,求各种矩阵的标准形等都可通过初等变换来实现.

定理 1.11 初等矩阵都是可逆矩阵,且其逆矩阵是同类初等矩阵.

易验证

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j)$$

$$P(i(c))^{-1} = P\left(i\left(\frac{1}{c}\right)\right)\ (c \neq 0)$$

$$P(i,j(k))^{-1} = P(i,j(-k))$$

初等变换与初等矩阵的关系可表述为:

定理 1.12 对 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 作一次初等行变换就相当于 A 的左边乘一个 m 阶初等矩阵,对 A 作一次初等列变换就相当于 A 的右边乘一个 n 阶初等矩阵.

证 只对初等行变换给出证明.

设 $B = (b_{ij})_{m\times m}$ 为任意 m 阶方阵,

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

A_i 为 A 的行向量($i = 1,2,\cdots,m$),则

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11}A_1 + b_{12}A_2 + \cdots + b_{1m}A_m \\ b_{21}A_1 + b_{22}A_2 + \cdots + b_{2m}A_m \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ b_{m1}A_1 + b_{m2}A_2 + \cdots + b_{mm}A_m \end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}(i,j)$，则

$$\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}$$

这相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行交换.

取 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}(i(c))$，则

$$\boldsymbol{P}(i(c))\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ c\boldsymbol{A}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}$$

这相当于用 c 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行($c \neq 0$).

取 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}(i,j(k))$，则

$$\boldsymbol{P}(i,j(k))\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_i + k\boldsymbol{A}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}$$

这相当于第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去.

上述定理可简述为“左行右列”，意为左乘初等矩阵，变化的是某一行，右乘一个初等矩阵，变化的是某一列. 定理的主要作用有二：首先是通过初等矩阵把初等变换过程表为矩阵的等式关系，带

来许多方便；其次往往把涉及可逆矩阵的问题用初等变换来解决.

例 1 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 且 $r(A)=r$，则对 A 施行初等行变换（或初等列变换），可使后 $m-r$ 行（或后 $n-r$ 列）化为 0.

证 设 $r(A)=r$，存在 m 阶和 n 阶可逆阵 P,Q，使

$$PAQ=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$PA=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_1\\ 0\end{bmatrix}$$

其中 Q_1 是 $r\times n$ 矩阵.

$$AQ=P^{-1}\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=[P_1,P_2]\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=(P_1,0)$$

其中 P_1 是 $m\times r$ 矩阵.

这里 P,Q 均为初等矩阵之积.

例 2 设 n 阶方阵 A 的秩为 r，则 A 相似于一个后 $n-r$ 行为 0 的 n 阶方阵.

证 由上例，存在 n 阶可逆阵 P，使

$$PA=\begin{bmatrix}Q_1\\ 0\end{bmatrix}$$

其中 Q_1 是 $r\times n$ 矩阵，则

$$PAP^{-1}=\begin{bmatrix}Q_1\\ 0\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}Q_1P^{-1}\\ 0\end{bmatrix}$$

即 A 相似于后 $n-r$ 行为 0 的 n 阶方阵.

例 3 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)\in P[x]$，令

$$A(x)=\begin{bmatrix}f_1(x) & & & 0\\ & f_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f_n(x)\end{bmatrix}$$

利用 $f_i(x)=f_i(x)q_i(x)+r_i(x)$ 作初等变换，其中 $r_i(x)=0$ 或 $0\leqslant\partial(r_i(x))<\partial(f_i(x))$.

$$A(x) \xrightarrow{\text{初等变换}} A_1(x) = \begin{bmatrix} r_{11}(x) & r_{12}(x) & \cdots & r_{1n}(x) \\ r_{21}(x) & r_{22}(x) & \cdots & r_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1}(x) & r_{n2}(x) & \cdots & r_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

使

$$r_{11}(x) \mid r_{ij}(x), i, j = 1, 2, \cdots, n$$

则

$$r_{11}(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$$

即初等变换可用于求一组多项式的最大公因式.

§1.4 矩阵的分块与分块矩阵

矩阵的分块是处理高阶矩阵的常用方法,将一个矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 用 r 条横线和 s 条竖线分块,就得一个分块矩阵

$$A = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} \end{array} = (A_{ij})_{r\times s}$$

其中

$$A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, r; \quad j = 1, 2, \cdots, s)$$

是 $m_i \times n_j$ 的子块,由分法知

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = m, \quad \sum_{j=1}^{s} n_j = n$$

只要不改变子块间的相对位置,仍是原来的 $m \times n$ 矩阵.

将每个子块看做分块矩阵的一个元素,则可规定分块矩阵的运算.

设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵,对 A, B 用同样方法进行分块得分块

矩阵 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，$B=(B_{ij})_{r\times s}$，则两个分块矩阵 $A=B$ 当且仅当 $A_{ij}=B_{ij}(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$. $A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{r\times s}$，称为两分块矩阵之和. $kA=(kA_{ij})_{r\times s}$ 称为数乘分块矩阵.

$A=(A_{ij})_{r\times s}$，则 $A'=(A'_{ji})_{s\times r}$ 称为 A 的转置.

分块矩阵的乘法最为重要，也最有用.

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，对 A,B 分块为

$$A=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\
\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}
\end{array}=(A_{ij})_{r\times s}$$

$$B=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{array} \\
\begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{array} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}
\end{array}=(B_{jk})_{s\times t}$$

则

$$AB=(A_{ij})_{r\times s}(B_{jk})_{s\times t}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{array} \\
\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix}
\end{array}=(C_{ik})_{r\times t}$$

其中

$$C_{ik}=A_{i1}B_{1k}+A_{i2}B_{2k}+\cdots+A_{is}B_{sk}=\sum_{l=1}^{s}A_{il}B_{lk}$$

矩阵的分块方法是任意的，但要进行分块乘法，则必须满足：

1) $(A_{ij})_{r\times s}$ 的列数与 $(B_{jk})_{s\times t}$ 的行数相同，即 A 的列的分法与 B 的行的分法一致.

2) 分块后的子矩阵间的乘法都要有意义.

运算规则对分块矩阵的运算仍然适用. 分块乘法有许多方便