



第三版

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

6

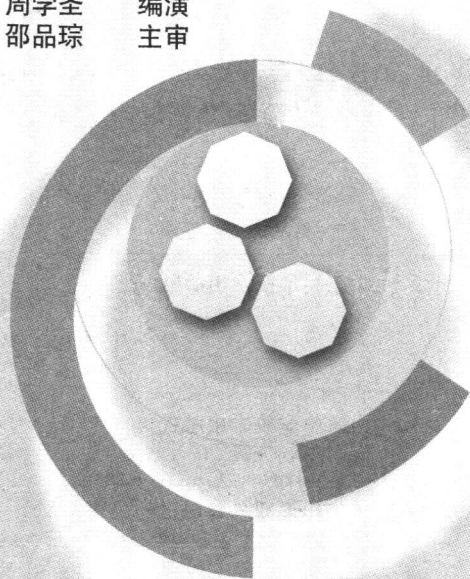
第三版

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖 周学圣
郭大钧 邵品琮

编演
主审



山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (6)/费定晖 周学圣编演. —3版. —济南:山东科学技术出版社, 2005.1(2005.3重印)

ISBN 7-5331-0104-9

I.Б... II.①费... ②周... III. 数学分析—高等学校—解题 IV.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43949 号

**Б.П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(6)**

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

出版者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路 16 号
邮编: 250002 电话: (0531) 2098088
网址: www.lkj.com.cn
电子邮件: sdkj@sdpress.com.cn

发行者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路 16 号
邮编: 250002 电话: (0531) 2098071

印刷者: 济南申汇印务有限责任公司

地址: 济南市王官庄 12 号
邮编: 250022 电话: (0531) 7966822

开本: 850mm×1168mm 1/32

印张: 14

字数: 345 千

版次: 2005 年 3 月第 3 版第 16 次印刷

印数: 224001—230000

ISBN 7-5331-0104-9

0·10

定价: 18.50 元



出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,



出版说明

CHUBANSHUOMING

特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。



第三版前言

DISANBANQIANYAN

这套书自 1979 年出版发行以来,20 余年一直畅销不衰,读者称其为学习数学分析“不可替代”之图书,我们对此倍感欣慰。

本次第三版主要做了如下改动:

第一,修正了部分题目的解法,使其更加注重了科学性、规范性和简明性。

第二,改正了第二版的个别印刷错误。

第三,在文字上进行了些润色,力求文字更加准确。

第四,对版面和开本进行了调整,突出了时代感。

这次的修改得到山东科学技术出版社的大力支持,责任编辑宋德万、胡新蓉等对该书的再版付出了艰辛的劳动,在此深表感谢。

在第三版修改过程中由费定晖逐章逐题予以校阅,不当之处恳请指正。

费定晖

2005.1





目 录

MULU

第八章 重积分和曲线积分	1
§ 1. 二重积分	1
§ 2. 面积的计算法	52
§ 3. 体积的计算法	70
§ 4. 曲面面积计算法	87
§ 5. 二重积分在力学上的应用	99
§ 6. 三重积分	119
§ 7. 利用三重积分计算体积法	139
§ 8. 三重积分在力学上的应用	155
§ 9. 二重和三重广义积分	179
§ 10. 多重积分	222
§ 11. 曲线积分	245
§ 12. 格林公式	284
§ 13. 曲线积分的物理应用	308
§ 14. 曲面积分	328
§ 15. 斯托克斯公式	352
§ 16. 奥斯特洛格拉德斯基公式	361
§ 17. 场论初步	389

第八章 重积分和曲线积分

§ 1. 二重积分

1° 二重积分的直接计算法 所谓连续函数 $f(x, y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, 而其和为对所有 i, j 使 $(x_i, y_i) \in \Omega$ 的那些值来求的.

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x).$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2° 二重积分中的变量代换 若可微分的连续函数

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

把平面 Oxy 上的有限域 Ω 单值惟一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω' 及雅哥比式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0,$$

则下之公式正确:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f[x(u, v), y(u, v)] |I| du dv.$$

特别是, 根据公式 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ 的情形有





$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

[3901] 把积分 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$ 当作积分和的极限, 用直线

$$x = \frac{i}{n} \quad y = \frac{j}{n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

把积分域分为许多正方形, 并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值, 计算所论积分的值.

解 由于 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty),$

其中

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2},$$

故 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy = \frac{1}{4}.$

[3902] 用直线

$$x = 1 + \frac{i}{n}, \quad y = 1 + \frac{2j}{n} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

把域 $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ 分为许多矩形. 作出函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在此域内的积分下和 $\underline{S}$ 与积分上和 $\bar{S}$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上和与下和的极限等于什么?

解 下和

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\left(1 + \frac{i}{n} \right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \\ &= \frac{2n}{n^2} \left[n + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n + \frac{4}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j + \frac{4}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \right] \\ &= \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}, \end{aligned}$$



其中

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

而上和

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n}\right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\underline{S}$ 与 $\bar{S}$ 的极限均等于 $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

【3903】 用一系列内接正方形作为积分域的近似域, 这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点, 并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值, 近似地计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比较.

解 由题意知, 应取的正方形顶点为 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)$, 故利用对称性知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{34}} \\ & + \frac{2}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{2}{\sqrt{37}} + \frac{2}{\sqrt{44}} + \frac{1}{\sqrt{42}} + \frac{2}{\sqrt{49}} \\ & \approx 0.196 + 0.371 + 0.343 + 0.312 + 0.177 \\ & + 0.329 + 0.302 + 0.154 + 0.285 \approx 2.470, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \approx 9.880.$$

下面计算积分的精确值:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$



$$\begin{aligned}
 &= 4 \int_0^5 \ln(y + \sqrt{24 + x^2 + y^2}) \Big|_0^{\sqrt{25-x^2}} dx \\
 &= 4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx - 2 \int_0^5 \ln(24 + x^2) dx.
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \int \ln(24 + x^2) dx &= x \ln(24 + x^2) - \int \frac{2x^2}{24 + x^2} dx \\
 &= x \ln(24 + x^2) - 2x + \frac{24}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{24}} + C.
 \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^5 \ln(24 + x^2) dx &= \left[2x \ln(24 + x^2) - 4x + \frac{48}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{24}} \right] \Big|_0^5 \\
 &= 20 \ln 7 - 20 + 8\sqrt{6} \arctan \frac{5}{\sqrt{24}};
 \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
 &4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx \\
 &= 4 \left[x \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) \right] \Big|_0^5 + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}} \\
 &= 20 \ln 7 + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}},
 \end{aligned}$$

再令 $x = 5 \sin t$, 有

$$\begin{aligned}
 &\int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-25 \cos^2 t + 25}{5 \cos t + 7} dt \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cos t - 7) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24}{5 \cos t + 7} dt \\
 &= (7t - 5 \sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24 \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \tan \frac{t}{2} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$



$$= \frac{7\pi}{2} - 5 - 4\sqrt{6}\arctan \frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而,

$$4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7) dx = 20\ln 7 + 14\pi - 20 - 16\sqrt{6}\arctan \frac{2}{\sqrt{24}}.$$

注意到

$$2\arctan \frac{2}{\sqrt{24}} + \arctan \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{\pi}{2},$$

最后便得到

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} &= 14\pi - 4\sqrt{24} \left(2\arctan \frac{2}{\sqrt{24}} + \arctan \frac{5}{\sqrt{24}} \right) \\ &= 2\pi(7 - \sqrt{24}) \approx 13.19. \end{aligned}$$

将精确值与近似值作比较, 显见误差较大, 其原因在于有不少不是正方形的域都被忽略, 因而产生较大的绝对误差 4.31 及较大的相对误差 $\frac{4.31}{13.19} \approx 32.7\%$.

注意 求 $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$ 的精确值若采用极坐标则较为简单:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 \frac{r dr}{\sqrt{24+r^2}} = 2\pi(7 - \sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排, 似应在 3937 题以后才开始使用极坐标, 故本题仍用直角坐标进行计算.

[3904] 用直线 $x = \text{常数}$, $y = \text{常数}$, $x + y = \text{常数}$ 把域 S 分为四个相等的三角形, 并取被积函数在每个三角形的中线交点之值. 近似地计算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y} dS,$$

其中 S 表由直线 $x=0$, $y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的三角形.





解 我们只须以 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ 及 $x + y = \frac{1}{2}$ 分域 S , 即得四个相等的三角形, 它们的面积均为 $\frac{1}{8}$, 重心为 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ 及 $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$, 于是, 得此积分的近似值为

$$\begin{aligned}\iint_S \sqrt{x+y} dS &\approx \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + 2 \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} \right) \\ &\approx \frac{1}{8} (0.577 + 0.816 + 2 \cdot 0.912) \approx 0.402,\end{aligned}$$

其精确值为

$$\begin{aligned}\iint_S \sqrt{x+y} dS &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{2}{5} = 0.4.\end{aligned}$$

[3905] 把域 $S \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子域 $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$. 对于什么样的值 δ 能保证不等式:

$$\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0.001$$

成立? 其中 $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i , 则

$$\begin{aligned}&\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} [\sin(x+y) - \sin(x_i + y_i)] dS \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} |\sin(x+y) - \sin(x_i + y_i)| dS \\ &\leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} \omega_i dS = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i.\end{aligned}$$



由于域 $S \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的面积等于 π , 故只要 $\omega_i < \frac{0.001}{\pi}$, 便能满足原不等式的要求. 但因为

$$\begin{aligned} \omega_i &= \sup_{\substack{(x'_i, y'_i) \in \Delta S_i \\ (x_i, y_i) \in \Delta S_i}} |\sin(x'_i + y'_i) - \sin(x_i + y_i)| \\ &\leq \sup_{\substack{(x'_i, y'_i) \in \Delta S_i \\ (x_i, y_i) \in \Delta S_i}} |(x'_i + y'_i) - (x_i + y_i)| \\ &\leq \sup_{\substack{(x'_i, y'_i) \in \Delta S_i \\ (x_i, y_i) \in \Delta S_i}} [|x'_i - x_i| + |y'_i - y_i|] \\ &\leq \sup_{\substack{(x'_i, y'_i) \in \Delta S_i \\ (x_i, y_i) \in \Delta S_i}} \sqrt{2[(x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2]^*} = \sqrt{2}\delta_i, \end{aligned}$$

故只要取

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \times 0.001 \approx 0.00022,$$

则有

$$\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0.001.$$

*) 对于任意非负实数 a, b 有

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \text{或} \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

从而 $a+b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

计算积分:

$$[3906] \quad \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 1.$$

$$[3907] \quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right) dx = \frac{1}{40}.$$





$$[3908] \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr &= \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^3}{3} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

[3909] 设 R 为矩形

$$a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B,$$

证明等式

$$\iint_R X(x)Y(y)dx dy = \int_a^A X(x)dx \int_b^B Y(y)dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法,不妨先对 y 后对 x 积分,即得

$$\begin{aligned} \iint_R X(x)Y(y)dx dy &= \int_a^A dx \int_b^B X(x)Y(y)dy \\ &= \int_a^A X(x)dx \int_b^B Y(y)dy. \end{aligned}$$

[3910] 设: $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$, 计算

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)dy.$$

解 不妨按先对 y 后对 x 积分的顺序计算,即得

$$\begin{aligned} I &= \int_a^A [F'_x(x, B) - F'_x(x, b)]dx = F(x, B) \Big|_a^A - F(x, b) \Big|_a^A \\ &= F(A, B) - F(a, B) - F(A, b) + F(a, b). \end{aligned}$$

[3911] 设 $f(x)$ 为在闭区间 $a \leq x \leq b$ 内的连续函数,证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x)dx,$$

此处仅当 $f(x) = \text{常数}$ 时等号成立.





证 因为

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy \\ &= (b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy, \end{aligned}$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

当 $f(x) = \text{常数}$ 时, 显然上式中 等号 成立. 反之, 设上式中 等号 成立, 则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

由于函数 $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ 是 $a \leq x \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $F(x) \equiv 0 (a \leq x \leq b)$. 特别 $F(a) = 0$, 即 $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 dy = 0$. 又由于函数

$$G(y) = [f(a) - f(y)]^2$$

是 $a \leq y \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $G(y) \equiv 0 (a \leq y \leq b)$. 因此, $f(y) \equiv f(a) (a \leq y \leq b)$, 即 $f(x) = \text{常数}$. 证毕.

[3912] 下列积分有什么样的符号:

$$(1) \iint_{|x|+|y| \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy;$$

$$(2) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy;$$

$$(3) \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy?$$

解 (1) 由于 $0 < x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq 1$ 及 $\ln(x^2 + y^2)$





$\leq \ln 1 = 0$, 且当 $|x| + |y| < 1$ 时 $\ln(x^2 + y^2) < 0$, 故

$$\iint_{|x|+|y|<1} \ln(x^2 + y^2) dx dy < 0.$$

(2) 我们有 $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy = I_1 - I_2 - I_3$, 其中

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy,$$

$$I_2 = \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy,$$

$$I_3 = \iint_{2 \leq x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy.$$

显然

$$0 < I_1 < \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \pi,$$

$$I_2 > 0,$$

$$I_3 > \iint_{2 \leq x^2+y^2 \leq 4} dx dy = 4\pi - 2\pi = 2\pi,$$

故

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy < 0.$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0}} \arcsin(x+y) dx dy + \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy. \end{aligned}$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零, 第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数, 因而, 积分值是正