高等学校教材

高等数学(上册)

MATHEMATICS

车向凯　谢崇远　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

(上册)

车向凯　谢崇远　主编
王学理　孙艳蕊　付连魁　孔庆海　编

高等教育出版社

内容提要

本教材是为工科各专业编写的，分上下两册，上册内容包括函数与极限，导数与不定积分，微分中值定理与导数的应用，定积分及其应用和常微分方程等。每节后均配置了适量的习题，充分考虑了各方面的需要，习题中既有基本题目，也有较难的题目。

本书叙述简洁、严谨，概念清晰，既符合《高等数学课程教学基本要求》，又有所引申和延拓。本书可作为工科各专业的教材，也可作为教学参考书和自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/车向凯，谢崇远主编．—北京：高等教育出版社，2005.6

ISBN 7-04-016622-4

Ⅰ.高...　Ⅱ.①车...②谢...　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 036732 号

策划编辑　马　丽　**责任编辑**　张晓晶　**封面设计**　王凌波
责任绘图　黄建英　**版式设计**　马静如　**责任校对**　俞声佳
责任印制　杨　明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http: //www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http: //www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http: //www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市联华印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005 年 6 月第 1 版
印　　张	19	**印　　次**	2005 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	**定　　价**	20.10 元

物料号　16622－00

前　　言

17 世纪的欧洲工业革命推动了天文学、力学、光学等诸多学科的发展，进而促使数学发生了根本性的变革。这一变革的重要标志，就是变量的引入，恩格斯称之为“数学的转折点”。经过诸多数学家近一个世纪的探索，到 17 世纪末，18 世纪初，Newton，Leibniz 完成了微积分的奠基工作。19 世纪 Cauchy 又将极限理论引进数学分析。19 世纪后期实数理论的建立使得数学分析成为一门理论完备的基础学科。近一百年来，数学分析方法不断发展，日臻完善，微积分的应用日益广泛。目前，以微积分为主体的高等数学已经成为全世界公认的理工科各专业的重要的基础课程。

近年来，随着我们对教育本质认识的不断深化，数学教育已成为素质教育不可或缺的组成部分，高等数学课程在高等学校的地位和作用发生了微妙的变化。高等数学课不仅仅是重要的基础课和工具课，它所传授的也不只是数学知识，更是一种思维模式，一种文化，它所要培养的是具有数学素养的、富有创造力的高质量的人才。

为适应现代教育和现代科技发展的需要，我们编写了这部《高等数学》教材。本书以极限理论为主线，阐述了一元微积分和多元微积分，并辅以向量代数与空间解析几何、级数和微分方程的基本知识，构成了完整的知识体系，力求将数学的高度的抽象性、严密的逻辑性及广泛的应用性有机地结合在一起。

本书在每节后都留有适量的习题，习题难度循序渐进。对于较难的题目，读者要争取独立解答，这对于数学水平的提高是大有裨益的。本书有些章节带有评述，其内容一般是超出大纲要求的，其目的是将高等数学的经典内容与近现代数学的一些成果及新兴数学学科做一链接，使读者在学习高等数学的同时，能接触到高等数学“后”的数学，开阔视野。本书还在部分章节后对在相关学科中做出突出贡献的数学家给予了介绍。

数学建模与数学实验本可作为一门独立的数学课来开设，但鉴于课时的限制，很多院校没有开设这门课，本书将该部分内容作为一章放在最后，只需增加少量课时，便可完成这部分内容的讲授，应该不会对学生造成太大的负担。

本书适用于工科院校本科各专业，也可作为高等学校数学教师的教学参考书，对于自学高等数学和报考研究生的同志也是不可多得的参考教材。

编写一本反映自己教学经验或教改心得的高水平、高质量的高等数学教材，是我们多年的夙愿，我们衷心感谢高等教育出版社对我们工作的大力支持，特别

感谢李艳馥和马丽同志为本书出版所做出的贡献。

教材虽已编写完成，但工作仍没有结束，我们恳请读者对本书的不足之处给予批评指正，以便再版时加以修正，使其更加完善。

作者于东北大学

2005年1月

本书常用数学符号说明

$\forall x$　对任意 x,对所有 x

$\exists x$　存在 x,有 x

$\Rightarrow$　命题间的“蕴含”关系

$\Leftrightarrow$　命题间的逻辑等价关系

$\in$　属于

$\overline{\in}$　不属于

$\cup$　集合的“并”

$\cap$　集合的“交”

$\subseteq$　包含于

$\mathbf{R}^n$　n 维欧氏空间

$U(P_0)$　点 P_0 的邻域

$\mathring{U}(P_0)$　点 P_0 的去心邻域

sup　上确界

inf　下确界

max　最大

min　最小

$f:X\to Y$　f 是从集合 X 到集合 Y 的映射

f^{-1}　映射 f 的逆映射,函数 f 的反函数

$\operatorname{sgn} x$　符号函数

$\equiv$　恒等于

$\not\equiv$　不恒等于

$\approx$　约等于

$\ll$　远小于

$\gg$　远大于

$(2n)!!$　$2n$ 的双阶乘,$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)$

$(2n+1)!!$　$(2n+1)$的双阶乘,$(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)$

$[x]$　不大于 x 的最大整数

$\to$　收敛于,趋于

lim　极限

$\beta=o(\alpha)$　β 是比 α 高阶的无穷小

$\beta=O(\alpha)$　β 与 α 是同阶无穷小

$\beta\sim\alpha$　β 与 α 是等阶无穷小

$\beta=O(\alpha^k)(k>0)$　β 是 α 的 k 阶无穷小

Δx　x 的有限增量

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$　导数符号

$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$　二阶导数符号

$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$　n 阶导数符号

d　微分符号

$\int$　积分符号

$L=a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a_0(x)$　线性微分算子

$C(I)$　所有在 I 上连续的函数构成的集合

$C^k(I)$　区间 I 上 k 阶连续可导函数类

$f(x)\in R[a,b]$　$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积

目　录

第 1 章　函数与极限

初等数学研究的对象是常量，高等数学研究的对象则是变量.变量之间的依赖关系称为函数.极限方法是研究变量的一种基本方法.本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等高等数学的基础内容.

1.1　n 维空间　点集　实数系

1.1.1　n 维空间

设 A,B 是任意两个集合，$a\in A$，$b\in B$，则由 a,b 组成一个序偶(具有固定次序的两个元素组成的集合)，记为(a,b)，a 称为第一个元素，b 称为第二个元素.两个序偶(a,b)和(c,d)相等，当且仅当 $a=c$，$b=d$.所有第一个元素取自集合 A，第二个元素取自集合 B 的序偶构成的集合，称为 A 与 B 的 Descartes (笛卡儿)乘积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

注意一般情况下 $A\times B\neq B\times A$.当 $B=A$ 时，记 $A\times A$ 为 A^2.

当 A,B 为实数集合时，$A\times B$ 就表示一个平面点集.当 $A=B=\mathbf{R}$ 时，$A\times B$ 表示整个平面，记为 $\mathbf{R}^2$.

若设 C 也为非空集合，则定义三个集合的 Descartes 乘积为

$$\begin{aligned}A\times B\times C&=(A\times B)\times C=\{((a,b),c)\mid a\in A,b\in B,c\in C\}\\&=\{(a,b,c)\mid a\in A,b\in B,c\in C\}\end{aligned}$$

类似地，可以定义有限个非空集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的 Descartes 乘积为

$$\begin{aligned}A_1\times A_2\times\cdots\times A_n&=(A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n\\&=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

特别地，当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 记为 A^n，$n=1$ 时表示集合 A.

当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=\mathbf{R}$ 时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\mathbf{R}^n$.

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$$

是由所有 n 元有序数组构成的集合，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点，x_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标. 为了建立 $\mathbf{R}^n$ 中点之间的联系，在 $\mathbf{R}^n$ 中定义线性运算如下：

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点，$\lambda\in\mathbf{R}$，规定

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$$

这样定义了线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 是一个 n 维线性空间.

规定 $\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离为

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \tag{1.1}$$

显然，$n=1,2$ 时，上述规定与数轴上和平面直角坐标系中两点间的距离公式是一致的.

1.1.2 点集

1. 邻域

设 P_0 是 $\mathbf{R}^n$ 中一点，δ 是某一正数，与 P_0 距离小于 δ 的点 P 的全体，称为点 P_0 的 δ **邻域**，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\,\big|\,|PP_0|<\delta\}$$

其中 P_0 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**.

集合 $\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$ 称为点 P_0 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$$

例如，数轴上一点 $P_0(2)$，$\delta=\frac{1}{3}$，P_0 的 δ 邻域就是区间 $\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$. 平面上一点 $P_0(1,1)$，$\delta=\frac{1}{2}$，P_0 的 δ 邻域就是以 $P_0(1,1)$ 为圆心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的开圆盘（如图 1.1 所示）.

如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的 δ 邻域；$\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的去心 δ 邻域.

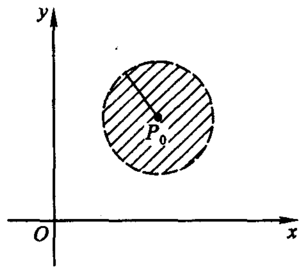

图 1.1

2. 区域

以 2 维（即平面点集）情况为例. 设 E 是平面点集，P 是平面上的一个点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$ 使 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**（如图 1.2 所示）. 显然 E 的内点属于 E.

如果点集 E 中的点都是内点,则 E 称为**开集**.例如,$E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 中每个点都是它的内点,因此 E_1 为开集.

如果在点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点,也有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的**边界点**(如图 1.3 所示).E 的边界点的全体称为 E 的**边界**,如圆周 $x^2+y^2=1$ 是 E_1 的边界.开集连同它的边界一起称为**闭集**.

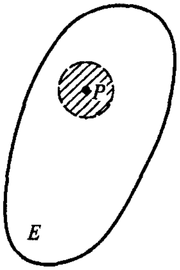

图 1.2

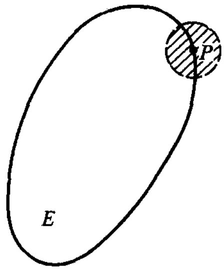

图 1.3

设 D 是开集,如果 D 内任何两点,都可用折线连结起来,且该折线完全落在 D 中,则称开集 D 是**连通的**.

如果点集 D 是连通的,则称 D 是**区域**.例如,E_1,$E_2=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$,$E_3=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<4\}$,上半平面 $E_4=\{(x,y)\mid y>0\}$ 等都是区域.

区域连同它的边界一起,称为**闭区域**.$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$,$\{(x,y)\mid y\geqslant 0\}$ 都是闭区域.

如果区域 D 内任意闭曲线所围的部分都属于 D,则称 D 为**单连通区域**,否则称为**复连通区域**.例如,E_1 和 E_4 都是单连通区域,E_2 和 E_3 是复连通区域.图 1.4 中去掉阴影和实心点所剩部分也是复连通区域.

对于点集 E,设 P_0 是其中一定点,如果 $\exists M>0$,$\forall P\in E$,都有 $|PP_0|\leqslant M$,即 P 与 P_0 之间的距离不超过 M,则称 E 为**有界点集**,否则称为**无界点集**.例如,前面定义的 E_1,E_2 和 E_3 都是有界区域,E_4 是无界区域.

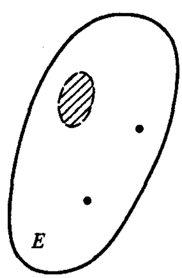

图 1.4

3. 聚点

设 E 是一点集,P_0 可以是 E 中的点,也可以不是 E 中的点.对于 P_0 的任意一个 δ 邻域,总存在异于 P_0 的 E 中的点,则称 P_0 是 E 的**聚点**.例如,点集 $E=\left\{1,1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\cdots,\frac{1}{n},n,\cdots\right\}$,0 是它的聚点.

点集的内点都是它的聚点.点集 E 的边界点可能是聚点也可能不是聚点,

但若 E 的边界不属于E,则边界点一定是聚点.

1.1.3 实数系

1. 实数系的完备性

正整数1,2,3,…是人们最早用来计数的,全体正整数构成的集合称为**正整数系**或**正整数集合**,记为 $\mathbf{N}^*$.若一个集合中的任意两个元素进行某种运算后,所得的结果仍属于这个集合,称这个集合对该运算是封闭的.显然,正整数集合对加法和乘法是封闭的.但正整数集合对加法和乘法的逆运算减法和除法运算不是封闭的.例如,$1-2$,$1\div 2$ 不再是正整数.为了使这些运算能够进行,就出现了0,负整数和分数.所有这些数的全体称为**有理数系**或**有理数集合**.至此,数系由正整数集合扩充到有理数集合 $\mathbf{Q}$,$\mathbf{Q}=\{x\mid x=\frac{p}{q},q\in\mathbf{N}^*,p\in\mathbf{Z}$,$\mathbf{Z}$ 表示整数集合$\}$.有理数集合对加法、减法、乘法和除法(除数不为0)运算都是封闭的.

整数系中相邻的两个数都可用距离为1的点在数轴上表示,它们是一系列的离散点,也就是说整数系具有"离散性".有理数集合的每个元素 $\frac{p}{q}$($q\in\mathbf{N}^*$,$p\in\mathbf{Z}$)也可以用数轴上的一个点表示,这种点称为**有理点**.任意两个有理点 r_1,r_2 之间必存在另一个有理点 $r_3=\frac{r_1+r_2}{2}$,再取 r_1 和 r_3 的中点,r_3 和 r_2 的中点,按这种方式进行下去,我们能在 r_1 和 r_2 之间求得任意多个有理点,这个性质就是有理数系的"稠密性".

有理数是公元前17世纪出现的.当时人们认为有理数充满了整个数轴,且数只有整数和分数.但后来在求边长为1的正方形的对角线的长度 l 时发现,l 不能用已有的整数或分数表示,有人就认为正方形的对角线的长度不是数,这显然是不可能的.因此,一时间陷入极大的矛盾中,这就是数学史上的第一次数学危机.

第一次数学危机后承认了除有理数外还有其他的数存在,这样的数就是**无理数**.有理数和无理数统称为**实数**.19世纪 Dedekind(戴德金)证明了全体实数连续地充满整个数轴,这个特性称为**实数系的完备性**.全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$,微积分中的很多概念和理论都与实数系的完备性有关,如确界、极限等概念.

2. 上界与下界

设 X 是一个非空数集,若存在数 M,使得 $\forall x\in X$,都有 $x\leqslant M$,称 M 为数集 X 的**上界**;若存在数 m,使得 $\forall x\in X$,都有 $x\geqslant m$,称 m 为数集 X 的**下界**;若存在 m,M,使得 $\forall x\in X$,都有 $m\leqslant x\leqslant M$ 或 $|x|\leqslant K(K>0)$,称数集 X **有界**,否则称为**无界**.

注意,前面所说的上界 M 和下界 m 都不是唯一的.例如,若 M 是数集 X 的一个上界,那么凡是大于 M 的数都是 X 的上界;若 m 是数集 X 的一个下界,那么凡是小于 m 的数都是 X 的下界.

我们知道,若一个数集 X 有上界 M,则任何大于 M 的数都是 X 的上界,因此上界没有最大值但可能有最小值.例如,令 $X=\{x\mid x=\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}^*\}$,大于或等于$\frac{1}{2}$的数都是其上界,但任何小于$\frac{1}{2}$的数都不是它的上界,故$\frac{1}{2}$是最小上界.对于下界也有类似的结论.

定义 1.1　如果 S 是数集 X 的最小上界,称 S 是数集 X 的**上确界**(supremum),记为 $S=\sup X$,即 $\forall x\in X$,都有 $x\leqslant S$,但 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in X$,使 $x_0>S-\varepsilon$.

如果 s 是数集 X 的最大下界,称 s 是数集 X 的**下确界**(infimum),记为 $s=\inf X$,即 $\forall x\in X$,都有 $x\geqslant s$,但 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in X$,使 $x_0<s+\varepsilon$.

数集的上确界、下确界统称为**确界**.

例如,数集 $X=\{x\mid 1<x<2\}$, $\forall x\geqslant 2$ 都是它的上界,而只有 $x=2$ 是它的上确界; $\forall x\leqslant 1$ 都是它的下界,而只有 $x=1$ 是它的下确界.

在讨论数集的界或确界时,必须先明确在什么范围内讨论.如由$\sqrt{2}$的不足近似值构成的有理数集$\{1,1.4,1.41,1.414,\cdots\}$,在有理数集内没有上确界,而在实数集内有上确界$\sqrt{2}$.我们有下述确界定理:

确界定理　有上界(或下界)的实数集合一定有上确界(或下确界).

实数系的确界定理是实数系的本质属性,是由实数系的完备性所规定的.实数系的完备性有几个等价的命题,读者可以参考《数学分析》(吉林大学数学系编,以下同).

1.2　函　　数

1.2.1　映射

映射是两个集合的元素之间通过某种法则确定的对应关系.

定义 1.2　设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在集合 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应,则称法则 f 为从 X 到 Y 的**映射**,记作 $f:X\to Y$,其中 y 称为 x 在映射 f 下的**像**,记为 $y=$

$f(x)$,而 x 称为 y 在映射 f 下的一个**原像**.集合 X 称为映射 f 的**定义域**(domain),记为 D_f,即 $D_f=X$;X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的**值域**(range),记为 R_f,即 $R_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$.显然 $R_f\subseteq Y$.

例1 设 $A=\{$Adams, Ann, Chou, Mark, Susan$\}$, $B=\{90,115,125,128,135,150\}$,图1.5给出了集合 A 到集合 B 的映射.

从这个例子看出,A 中每个元素在 B 中都有唯一的一个像,但 B 中元素并不都有原像,同时若有原像,也不一定唯一.

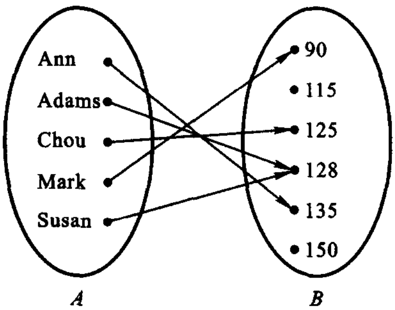

图1.5

定义1.3 设 X,Y 是两个非空集合,有映射 $f:X\to Y$.

(1) $\forall x_1,x_2\in X$,如果 $x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称映射 f 为 X 到 Y 的**单射**.

(2) 若 $R_f=Y$,则称映射 f 为 X 到 Y 的**满射**.

(3) 若映射 f 既是单射又是满射,则称 f 是从 X 到 Y 的**一一映射**,又称 X 与 Y 是**一一对应**的.

若 f 是 X 到 Y 的一一映射,则对于每一个 $y\in Y$,在 X 中存在唯一满足 $y=f(x)$ 的 x.这样就产生一个从 Y 到 X 的映射,称它为映射 f 的**逆映射**,记为 f^{-1}.

例2 设映射 $f:X\to Y$, $f(x)=\sin x$,则

(1) 当 $X=[0,\pi]$, $Y=[0,1]$时,f 是满射但不是单射;

(2) 当 $X=[0,\frac{\pi}{2}]$, $Y=[0,2]$时,f 是单射但不是满射;

(3) 当 $X=[0,\frac{\pi}{2}]$, $Y=[0,1]$时,f 是一一映射;

(4) 当 $X=[0,\frac{\pi}{2}]$, $Y=[0,1]$时,$f^{-1}(y)=\arcsin y$ 是 f 的逆映射.

定义1.4 设 X,Y,U 和 U_0 是非空集合,有两个映射: