DAXUESHUXUE

大学数学

WEIJIFEN

微积分（上册）

李卫军　王　艳　主编

科学出版社
www.sciencep.com

大　学　数　学

微积分（上册）

李卫军　王　艳　主编

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本套教材是教学改革和教学实践总结的结晶，充分体现数学素质教育，注重教材内容的“新陈代谢”与现代化，按照教育部相应课程的改革计划与基本要求，吸取同类教材的优点，编成这套教材，定名为“大学数学”，可作为理、工、农、医、经、管等专业的大学数学基础课程教材.

本书是《大学数学·微积分(上册)》，主要内容有：函数，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程等. 每章有小结、阅读材料和复习题，书末附有习题答案或提示. 完成教学约需70～90学时.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学·微积分(上册)/李卫军，王艳主编. —北京：科学出版社，2003.8

ISBN 7-03-011668-2

Ⅰ.大… Ⅱ.①李…②王… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第049233号

责任编辑：徐一帆/责任校对：王望荣

责任印制：高 嵘/封面设计：李 静

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2003年8月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2003年8月第一次印刷 印张：14 7/8

印数：1—10 000 字数：389 000

定价：19.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

数学是思维的体操，数学技术是高新技术的本质，数学语言是科学的基本语言，数学计算是科学研究的主要手段之一，“数学是科学之王”. 当人类进入21世纪之时，数学水平已经成为衡量一个国家、一个民族的科技文化素质、社会进步程度和发展潜力的重要标志. 高等学校的基本任务是培养合格人才，对学生全面素质和能力的培养已成为广大教育工作者的共识. 数学教育不仅是专业技术教育，也是文化素质的重要组成部分，对理工类数学教育而言，既要重视其作为科学技术的基础作用，又要重视它作为文化基础的作用. 当前，各高校的教学改革方兴未艾，而教学改革的重点与难点是教学内容的改革，每门学科依照何种体系，讲授哪些内容则体现在教材之中.

我们总结分析了近些年来数学教学的经验，按照教育部《面向21世纪高等工程教育教学内容课程改革计划》的总体要求，根据原国家教委颁布的理工科类本科《高等数学课程教学基本要求》及教育部高等学校理工科数学课程教学指导委员会拟定的数学课程教学基本要求，参照教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试大纲，同时认真吸取国内多种同类教材的优点，编写了这套系列性教材，定名为“大学数学”.

本教材共分四册：微积分（上册）、微积分（下册）、线性代数及随机数学，包含了大学本科非数学专业的主要数学课程，可作为理、工、农、医、经、管等专业的大学数学基础课程教材. 在编写中，我们从以下几个方面进行了努力：

1. 在“知识、能力、素质”三维空间的框架下，合理选取内容，在保留必要的传统体系和经典内容的基础上，力图溶入现代数学的思想与知识.

2. 叙述详略得当，语言力求确切.

3. 对概念的引出，注意了阐明实际背景，着重于概念实质

的揭示.

4. 对一些重要定理的证明,注意了推证思路的阐述,并尽量设法结合几何直观.

本书是《大学数学·微积分(上册)》,内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,中值定理及导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程六章,在附录中列出了几种常用的曲线,完成教学大约需70～90学时.本书具有如下特点:

1. 削弱或删去了与中学教材重复的知识部分,精简了某些陈旧的东西.比如对函数概念、常见的初等函数仅作了简略的叙述.

2. 注重概念、定理表述的严谨性、准确性,发挥本课程在培养学生的逻辑推理能力,判断辨别能力和综合概括能力以及严密、准确、精炼的表述能力诸方面的特殊作用.基于此,我们补充了一些重要的概念及定理的证明,比如上、下确界的概念,数列收敛的单调有界定理的证明等等.

3. 压缩了一些"不必要"的定理证明,尽量给予直观的解释,适当调整了对解题的某些特殊技巧训练的要求,简化了一些公式的推导,比如常系数线性非齐次微分方程的解法等.

4. 每章后面附有一个阅读材料,这些阅读材料或是教材正文中概念或思想方法的延续,或是所学内容的应用,意在扩大学生的视野,增加学生学习数学的兴趣,增强学生的能力与素质,为现代数学初步提供内容展示的"窗口"和延伸发展的"接口".

5. 每章后面都有一个内容小结及复习题,期望对学生掌握本章的知识点、重难点能有所帮助.

本书由李卫军、王艳任主编,高明成、胡伟文、李薇任副主编,参加编写的其他编者还有:万为国、覃章景,最后由李卫军、王艳统稿、定稿.限于编者的学识,书中定有不当之处,诚望读者批评指正.

编者

2003年6月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学研究的基本对象是实函数，极限方法是研究函数的基本方法，连续性是函数的一种重要性态．本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

第一节　函　　数

1.1　常用的集合、符号与不等式

所有自然数的集合、所有整数的集合、所有有理数的集合和所有实数的集合分别记为 N、Z、Q 和 R．众所周知，$N\subset Z\subset Q\subset R$．不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，规定空集为任何集合的子集．

区间是常用的一类数集．设 a、$b\in R$，且 $a<b$．数集

$$\{x\,|\,a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$．数集

$$\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$．

类似地：

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间．

以上这些区间都称为有限区间．数 $b-a$ 称为这些区间的长

度. 此外，引入记号$-\infty$和$+\infty$，分别读作负无穷大和正无穷大，对于任何$x\in R$，都有$-\infty<x<+\infty$. 注意，$-\infty$和$+\infty$只是记号而不是实数. 推广区间的概念，把$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$和$(-\infty,+\infty)$都称为**无穷区间**. $(-\infty,b)$和$(a,+\infty)$是开区间，$(-\infty,b]$和$[a,+\infty)$是闭区间，而$(-\infty,+\infty)$是既开又闭的区间. R 也可记作$(-\infty,+\infty)$.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用I表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点a为中心的任何开区间称为点a的**邻域**，记作$U(a)$.

设$\delta>0$，则开区间$(a-\delta,a+\delta)$就是点a的一个邻域，称为点a的**δ邻域**，记作$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点a称为这邻域的中心，δ称为这邻域的半径.

由于$a-\delta<x<a+\delta$相当于$|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

因为$|x-a|$表示点x与a间的距离，所以$U(a,\delta)$表示：与点a距离小于δ的一切点x的全体.

点a的δ邻域去掉中心a后，称为点a的去心δ邻域，记作$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里$0<|x-a|$就表示$x\neq a$.

此外，我们还常用到下面几种邻域，设δ为正数，记

$$U_+(a,\delta)=\{x\mid 0\leqslant x-a<\delta\}=\{x\mid a\leqslant x<a+\delta\},$$

$$U_-(a,\delta)=\{x\mid -\delta<x-a\leqslant 0\}=\{x\mid a-\delta<x\leqslant a\},$$

分别称它们为点a的δ右邻域和δ左邻域，也常简单地写作$U_+(a)$和$U_-(a)$，至于记号$\mathring{U}_+(a)$和$\mathring{U}_-(a)$则分别表示数集（或开区间）

$$\mathring{U}_+(a)=(a,a+\delta),\quad \mathring{U}_-(a)=(a-\delta,a).$$

设 A 是 R 的一个子集. 若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x\in A$,都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$,则称 A 为有上(下)界的数集,数 $M(L)$ 称为 A 的一个上(下)界. 显然,任何大(小)于 $M(L)$ 的数,也都是 A 的上(下)界. 若数集 A 既有上界又有下界,则称 A 为有界集. 容易证明:A 为有界集的充分必要条件是存在正数 M_0,使得对一切 $x\in A$,都有 $|x|\leqslant M_0$.

若 A 不是有界集,则称它为无界集.

例如,由自然数全体构成的数集 N,是个有下界、但没有上界的无界集. 有限区间是有界集.

若数集 A 有上界,则它有无限多个上界,在这些上界中最小的一个常常具有重要的作用,称它为数集 A 的上确界. 更细致的定义如下:

定义 1.1 对于给定的数集 A,若数 β 满足条件:

(i) β 是 A 的一个上界,即对一切 $x\in A$,都有 $x\leqslant\beta$;

(ii) 任何小于 β 的数不再是 A 的上界,即对任何 $\varepsilon>0$,$\beta-\varepsilon$ 不再是 A 的上界,亦即存在某个 $x_0\in A$,使 $x_0>\beta-\varepsilon$.

则称数 β 为数集 A 的上确界,记作

$$\beta=\sup A \quad 或 \quad \beta=\sup_{x\in A} x.$$

类似地,当数集 A 有下界时,称它的最大的下界为 A 的下确界,细致的定义如下:

定义 1.2 对于给定的数集 A,若数 α 满足条件:

(i) α 是 A 的一个下界,即对一切 $x\in A$,都有 $x\geqslant\alpha$;

(ii) 任何大于 α 的数不再是 A 的下界,即对任何 $\varepsilon>0$,$\alpha+\varepsilon$ 不再是 A 的下界,亦即存在某个 $x_0\in A$,使 $x_0<\alpha+\varepsilon$.

则称数 α 为数集 A 的下确界,记作

$$\alpha=\inf A \quad 或 \quad \alpha=\inf_{x\in A} x.$$

例如:开区间 $(0,1)$ 的上、下确界分别是 1 和 0,闭区间 $[0,1]$ 的上、下确界也分别是 1 和 0. 自然数集 N 仅有下确界 1 而无上确界.

由上、下确界的定义易知,若数集 A 有上(下)确界,则一定是

惟一的. 另外由上面例子也可看出，若 A 有上（下）确界 $\beta(\alpha)$，则 $\beta(\alpha)$ 可能属于 A，也可能不属于 A.

关于数集确界的存在性问题，我们给出如下公理.

确界原理 非空有上（下）界的数集，必有上（下）确界.

下面引进两个符号：

$\forall$，表示对每一个或对任意（给定）的，称之为全称量词；

$\exists$，表示存在，称之为存在量词.

例如：

$$A\subset B \quad 即 \quad \forall\, x\in A，有\ x\in B;$$

$$A\not\subset B \quad 即 \quad \exists\, x\in A，使得\ x\notin B.$$

本段的最后我们介绍几个常用的不等式.

(1) 三角形不等式：设 a、$b\in R$，则有

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

(2) 伯努利(Bernoulli)不等式：设 $h>-1$，n 为自然数，则有

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

证 运用数学归纳法易得结论.

(3) 平均值不等式：n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的几何平均值不大于其算术平均值，即

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证 当 $n=1,2$ 时命题显然成立. 假设 $n=k$ 时命题成立，现设有 $k+1$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$，若它们全相等，显然其几何平均值等于算术平均值. 若它们不全相等，记

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1},$$

又不妨设 $a_k<A<a_{k+1}$. 令

$$b_k=a_k+a_{k+1}-A,$$

则 $b_k>0$，且

$$b_kA-a_ka_{k+1}=(A-a_k)(a_{k+1}-A)>0,$$

即 $a_k a_{k+1} < b_k A$. 由归纳假设:

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} b_k} \leqslant \frac{1}{k}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + b_k)$$

$$= \frac{1}{k}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} - A)$$

$$= \frac{1}{k}[(k+1)A - A] = A.$$

即 $a_1 a_2 \cdots a_{k-1} b_k \leqslant A^k$, 从而

$$a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1}) a_k a_{k+1} < (a_1 a_2 \cdots a_{k-1}) b_k A$$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} b_k) A \leqslant A^k A = A^{k+1}.$$

于是

$$\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}} \leqslant A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1}.$$

故而对一切自然数 n 不等式成立. 显然, 当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等式成立, 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全相同时严格的不等式成立.

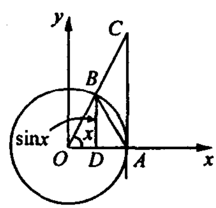

图1.1

(4) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x < x < \tan x$; 且对任何 x, 有 $|\sin x| \leqslant |x|$.

证 取 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 作单位圆(图1.1), 令 $\angle AOB = x$(弧度). 由图可见

△AOB 的面积<圆扇形 AOB 的面积<△AOC 的面积. 即

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

或

$$\sin x < x < \tan x.$$

当 $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$ 时, 显然 $|\sin x| \leqslant |x|$, 当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, 故由上式得 $\sin(-x) < -x$ 或 $-\sin x < -x$, 这就证明了当 $|x| < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ 时 $|\sin x| < |x|$, 当 $x = 0$ 时等号成立. 总之, $\forall\, x \in R$, 都有 $|\sin x| \leqslant |x|$.

值得注意的是，上述不等式中的 x 以弧度为单位. 在高等数学中，角度通常以弧度作单位，今后如无特殊说明均作此默认.

1.2 函数概念

关于函数概念，在中学数学中我们已有了初步的了解，本段将对此作进一步的讨论.

定义1.3 给定两个实数集 D 和 M，若有一个对应法则 f，使 D 内每一个数 x，都有惟一的一个数 $y\in M$ 与它相对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记作

$$\begin{aligned} f: D &\to M, \\ x &\mapsto y. \end{aligned} \tag{1-1}$$

数集 D 称为函数 f 的**定义域**. 对于 D 中每一个 x 根据法则 f 所对应的 M 中的数 y，称为 f 在点 x 的**函数值**，常记为 $f(x)$，全体函数值的集合

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}\subseteq M$$

称为函数的**值域**.

(1-1)式中第一式"$D\to M$"表示按法则 f 建立 D 到 M 的函数关系，第二式"$x\mapsto y$"表示元素之间的对应关系，也可记为"$x\mapsto f(x)$". 习惯上，我们称函数关系中的 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

定义中的 M 通常以 R 来代替，于是定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个主要因素. 所以，我们也常用

$$y=f(x),\quad x\in D$$

表示一个函数. 由此，我们说某两个函数相同，是指它们有相同的定义域和相同的对应法则.

在函数定义中，对每一个 x，只能有惟一的 y 值与它对应，这种函数称为单值函数. 若允许同一个 x 可以和多于一个的 y 值相对应，则称为**多值函数**. 在本书范围内，我们只讨论单值函数.

我们在中学里已经知道，表示函数最主要的方法是公式法，即用数学运算式子来表示函数. 这时，函数的定义域常取使该运算式

子有意义的自变量值的全体，通常称为存在域（或自然定义域）. 在此情形下，函数的定义域D也可省略不写. 因此，在不致引起混淆的情况下，我们可简单地说“函数$y=f(x)$”或“函数f”.

设函数$y=f(x)$的定义域为D. $\forall x\in D$，对应的函数值$y=f(x)$. 这样，以x为横坐标、y为纵坐标就在xOy平面上确定一点(x,y). 当x遍取D上的每一个数值时，就得到点(x,y)的一个集合C：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

这个点集C称为函数$y=f(x)$的图形.

函数的表示法除解析法（或称公式法）外还有列表法和图像法. 但有些函数无法用上述三种方法表示，只能用言语来描述. 此外，有些函数虽然也可用解析式表出，但在其定义域的不同部分用不同的公式表达，这类函数常称为分段函数. 下面举几个函数的例子.

例 1.1 设$c\in R$，函数$y=f(x)=c$的定义域$D=R$，值域$f(D)=\{c\}$，它的图形是一条平行于x轴的直线，如图1.2所示.

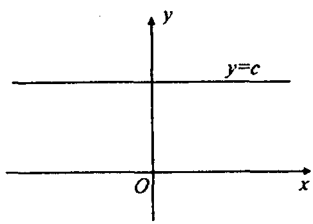

图1.2

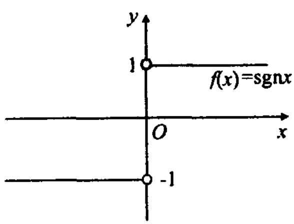

图1.3

例1.2 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域$f(D)=\{-1,0,1\}$. 通常将符号函数记为$\operatorname{sgn}x$，它的图形如图1.3所示. 对

任何实数 x，有 $x=\mathrm{sgn}x\cdot|x|$.

例1.3 函数

$$y=f(x)=u_a(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\1, & x>a\end{cases}$$

的定义域为 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，值域 $f(D)=\{0,1\}$，称为单位阶跃函数. 它的图形如图1.4所示. 图中的空点表示该点不属于函数的图形.

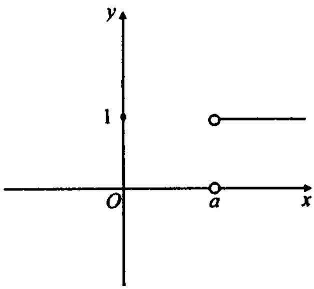

图1.4

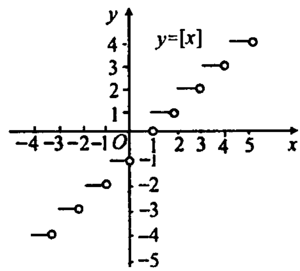

图1.5

例1.4 设 $x\in R$，不超过 x 的最大整数记作 $[x]$，则 x 可表示为 $x=[x]+r_x$，其中 $0\leqslant r_x<1$. 例如，$0.3=0+0.3$，$[0.3]=0$；$1.5=1+0.5$，$[1.5]=1$；$-1=-1+0$，$[-1]=-1$；$-0.1=-1+0.9$，$[-0.1]=-1$；$[\pi]=3$. 把 x 看作变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 Z. 它的图形如图1.5所示，这个图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为1，函数 $y=[x]$ 称为取整函数. 易知：$x-1<[x]\leqslant x$.

例1.5 函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，它的图形如图1.6所示. 这个函数称为绝对值函数. 它也可以不用分段表示：

$$y=|x|=\sqrt{x^2}.$$

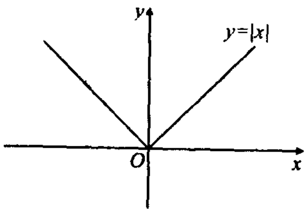

图 1.6

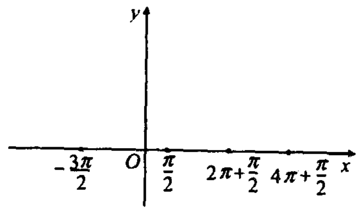

图 1.7

'**例 1.6** $y=f(x)=\sqrt{\sin x-1}$. 它的定义域是 $D=\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\right\}$,值域是$\{0\}$. 它的图形如图 1.7 所示.

例 1.7 函数

$$y=f(x)=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

的定义域$D=(-\infty,+\infty)$,值域$f(D)=\{0,1\}$. 称$D(x)$为狄利克雷(Dirichlet)函数.

例 1.8 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & -2<x<0,\\ 1+x, & 0\leqslant x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x<3.\end{cases}$$

试求$f\left(-\frac{1}{2}\right)$,$f(0)$,$f(1)$,$f(2)$.

解 因为$-\frac{1}{2}\in(-2,0)$,所以

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

因为 $0\in[0,1)$,所以 $f(0)=1+0=1$. 同样道理,$f(1)=1^2=1$,$f(2)=2^2=4$.

1.3 函数的几种特性

1. **函数的单调性.** 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subset D$. 如