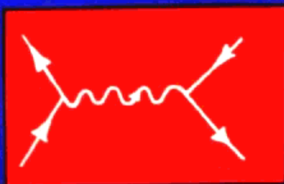
李淮江 编著



量子场论导引

云南科技出版社

前　言

物理学号称“科学技术之母”．物理学的主体乃是对于物质结构层次和时空观的探索．正是这种探索带来了生产技术的发展变革．而现今的粒子物理学则是处于这种探索的前沿，因此，作为这一研究前沿的理论工具，量子场论在物理学里处于十分重要的地位．现今，量子场论的用处已超出粒子物理学的范围，它在统计物理、固体物理等物理学分支里均获得了许多应用．

在许多高等院校里，量子场论是一门必修课或选修课．因而适合于初学者的基础教材就十分急需．近十余年出版的中外文量子场论专著，其着眼点多是把读者尽快引导到研究前沿，起点均较高．这些深奥的专著的确是深入学习的好书，但初学者更急需一本入门书．本书编写的指导思想是，作为一本针对初学者的基础教材和教学参考书，应具有如下诸特点：（1）它既要降低起点，又要具有适当的深度，以便使读者既易入门，又能为学习现有专著打下必要的基础；（2）它应尽可能清晰透彻地阐述物理思想和物理概念．物理理论的思想、概念是其灵魂，数学则是构成理论的形式体系、揭露物理实质、获得物理结果的必要工具，因此，这两方面应密切结合起来．在保证叙述连贯性的前提下，尽可能详述数学推算方法，这样，教师在课堂上不必进行繁琐的推算，而把时间主要用于讲解物理内容；（3）学生的知识最终来自他们自己的独立钻研，教师的讲授旨在为学生课后的钻研指明道路，并通过讲授传授具体的治学方法．因此，书应写得详细易读，应充分考虑到初学者（特别是自学者）的困难，这样，教材的大部分内容就可在教师指导下让学生自己阅读，借以培养自学能力；（4）量子场论并不是最终的理论．为了培养青年一代的创造力，教材既要以介绍正统理论为主要任务，又要适当提出问题，启发读者自己的思考．

编者虽然学识浅薄，但在上述指导思想的促使下，结合教学需要于1981年上半年写成本书初稿．此后在教学基础上几经修改而形成本书．本书在出版前曾送往许多兄弟院校征求意见，并得到有关专家和许多老师的热情支持和肯定，普遍认为本书适于作基础教材也可供有关专业的研究生参考，可望对量子场论的教学有益．

本书内容可划分为六个部分：第一部分（第一章）详述相对论波动方程的有关知识，这是全书的基础；第二部分(第二至四章)中心问题是量子化，这是初学者学习量子场论时遇到的一个难点，本书没有一开始就讲述正则量子化的形式体系，而是首先用一章（第二章）来叙述从量子力学过渡到量子场论时物理思想和概念的变化；第三部分(第五至七章)叙述自由场的量子理论，其中对Feynman传播函数、不定度规等，较多地谈了编者自己的看法；第四部分(第八至十章)叙述相互作用和微扰论，举了较多的相互作用实例，其中既有早期的典型实例，也有近十余年来在理论和实验两方面处于重要地位的实例．在第十章里，注意把理论结果与实验事实进行比较；第五部分（第十一章）

介绍QED重整化的基本思想和基本方法．重整化是初学者学习量子场论的又一难点．本书在保持科学性和严谨性的前提下，力图把这一章叙述得易于理解．初学者对发散积分的处理感到特别困难，针对这一点，书中不但详细介绍了Pauli-Villars正规化和维数正规化（后者是近十余年发展起来的处理发散积分的新方法）的基本思想和基本方法，而且以旋量电动力学的三个基本的单圈图为例进行了详细的计算；第六部分是附录，其中，附录三详述了Pauli度规和Bjorken-Drell度规，并给出两种度规之间的联系与过渡（这在同类书里是没有的），这样做，旨在帮助读者阅读不同度规的参考书刊．最后的附录四给出计算正规化积分的公式，并对其中的某些公式作了证明．此外，为了配合教学需要，每章末都附有一定数量的习题和思考题，其中少数打“*”号的题并无现成答案，读者可充分发挥自己的思考．本书中涉及电磁学的量均采用洛伦兹-亥维赛单位制，并取 $\hbar=c=1$．

本书若作为教材，教师只需择重讲解，学生就可顺利地阅读．对于自学者，倘若已具有较好的初等量子力学基础，就可顺利阅读本书．

复旦大学倪光炯教授对编写本书给予了热情的支持、鼓励，并在百忙中审阅了本书的书稿，云南大学王仲永教授对本书出版十分关心，并向出版社推荐本书的书稿，编者在此对两位教授致以衷心感谢；国内许多兄弟院校的老师曾先后来信对书稿给予热情肯定并提出宝贵的修改意见，编者对各位老师深表谢意；云南科技出版社的单沛尧总编、责任编辑戴彦同志为本书出版和编辑做了大量工作．云南师范大学校领导、科研处以及物理系党政领导同志热情关心本书的出版并给予巨大的支持，编者在此一并致以衷心的感谢．由于编者水平有限，书中难免还有不妥之处，欢迎读者批评指正．

李淮江

1986年8月于云南师范大学

目　录

第一章　相对论量子力学方程

相对论性量子力学是人们把量子论和相对论结合起来的第一次尝试，其目的是要把描写低速微观现象的非相对论量子力学推广到高速微观现象的领域。由于这样建立起来的相对论波动方程存在着负能困难和负几率困难，因而这第一次尝试未能圆满地取得预期的成功。虽然如此，这一尝试却为量子场论的建立奠定了基础。

怎样把非相对论量子力学推广到相对论领域里去呢：根据爱因斯坦发展了的相对性原理，在不同的 Lorentz 参考系里，物理规律是相同的。这就意味着物理学的基本方程式和关系式应当具有 Lorentz 不变性（相对论原则）。因此，相对论量子力学的基本方程式必须既具有 Lorentz 不变性，又符合量子力学的基本原理。在本世纪二十年代末期，Klein和Dirac 等人正是从这样的考虑出发建立了自旋零和自旋$\frac{1}{2}$粒子的相对论波动方程式。

§1　Klein-Gordon方程

1926—1927年Klein和Gordon建立了第一个相对论波动方程式，即Klein-Gordon方程式（以下简称K—G方程式）。在非相对论量子力学里，自由粒子的Schrödinger 方程式是用如下的量子化手续建立的：首先假定如下的算符对应关系：

$$\left.\begin{aligned} E &\longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{k} &\longrightarrow -i\nabla=\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x} \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

其中，E、$\mathbf{k}$ 分别是单粒子能量、动量，$\mathbf{x}$ 是空间点的坐标。其次，假定动量算符 $\hat{\mathbf{k}}$ 和坐标算符 $\mathbf{x}$ 满足如下对易关系：

$$[x_l,\ \hat{k}_j]=i\delta_{jl},\quad (\hbar=1,\ j、l=1,2,3) \tag{1.2}$$

在上述两点假设下，立即可从经典的能量、动量关系建立起如下的算符关系：

$$i\frac{\partial}{\partial t}=\hat{\mathrm{H}}, \tag{1.3}$$

这里，$\hat{\mathrm{H}}=-\frac{1}{2m}\nabla^2$是自由粒子的Hamilton算符，由于微观粒子具有波粒二象性，尚

需假定其状态要用Hilbert空间的态矢量 $\psi(\mathbf{x},t)$来描写。将（1.3）式作用于态矢量ψ，便得到自由粒子的Schrödinger方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t)=\widehat{H}\psi(\mathbf{x},t). \qquad (1.4)$$

方程式（1.4）包含对时间坐标的一阶导数和对空间坐标的二阶导数，时间与空间处于不对称的地位，因而它不具有 Lorentz 不变性。为了建立相对论波动方程式，人们自然会想到把经典相对论力学的能量、动量关系式

$$E=\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2} \qquad (c=1) \qquad (1.5)$$

拿来进行（1.1）式的算符对应。但是，这样建立起来的波动方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t)=\sqrt{-\nabla^2+m^2}\,\phi(\mathbf{x},t) \qquad (1.6)$$

仍然没有对称地处理空间与时间，而且方程右边出现了平方根算符，这一算符包含着微分算子“∇^2”的高次幂，因而一点的$\phi(\mathbf{x},t)$的变化不再由无限接近的点的ϕ值来决定，而要由ϕ在某一空间范围的分布来决定。因此，以方程（1.6）为基础的相对论性量子力学理论不再是一个定域的量子力学理论[注1]。倘若将（1.6）式两边平方，不但不能消除右边的平方根算符，而且还会出现平方项$(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2$，从而违背了量子力学的态叠加原理。解决上述困难的办法是，利用算符$i\frac{\partial}{\partial t}$和$\sqrt{-\nabla^2+m^2}$的对易性，将（1.6）式两边的算符均重复作用一次，由此得到

$$-\frac{\partial}{\partial t^2}\phi(\mathbf{x},t)=\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\phi(\mathbf{x},t)=$$

$$=\left(\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi(\mathbf{x},t)=(-\nabla^2+m^2)\phi(\mathbf{x},t)$$

即

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-m^2\right)\phi(\mathbf{x},t)=0 \qquad (1.7)$$

此式便是自由粒子的K—G方程式。在K—G方程里，对时间坐标的导数和对空间坐标的导数都是二阶导数，即把空间与时间同等对待。因此，可以期望方程（1.7）具有Lorentz不变性。为了证明的确如此，首先把（1.7）式写成四维形式：

$$(\Box-m^2)\phi(x)=0. \qquad (1.8)$$

〔注1〕 关于理论的定域性，可参阅 J. D. Bjorken, S. D. Drell, «Relativisic Quantum Fields», pp. 3—5, McGraw-Hill, 1965.

这里，$x=(\mathbf{x},\ it)=(x_1, x_2, x_3, x_4)$是Minkowski空间的坐标矢量。而算符$\Box$称为d'Alembert算符，它由下式定义：

$$\Box=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\partial_\mu\partial_\mu, \tag{1.9}$$

$\partial_\mu\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$。今后若不特别声明，凡同一乘积项里出现两个相同的Lorentz指标，便表示从1到4求和。算符$\Box$是四矢$\dfrac{\partial}{\partial x}=(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots,\ \dfrac{\partial}{\partial x_4})$的模平方，因而它是一个Lorentz不变的算符。假定在Lorentz 变换

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{1.10}$$

之下，$\phi(x)$按下式变换：

$$\phi'(x')=S\phi(x), \tag{1.11}$$

则可将（1.8）式中的各个量用变换后的量来表示：

$$(\Box'-m^2)S^{-1}\phi'(x')=0. \tag{1.12}$$

要使方程（1.12）在形式上回到方程（1.8），必须、仅需S是一个恒等变换，即$S=S^{-1}=I$，或

$$\phi'(x')=\phi(x). \tag{1.13}$$

这时，（1.12）式成为

$$(\Box'-m^2)\phi'(x')=0. \tag{1.14}$$

此式就是在新参考系里写出的K—G方程式，它与（1.8）式具有相同形式，这就表明K—G方程的确具有Lorentz不变性。但必须加上（1.13）式之限制，即波函数$\phi(x)$必须是 Lorentz 标量函数。我们以后将会看到，态函数是标量函数的粒子其自旋值为零。

上面证明 Lorentz 不变性的方法是从线性变换的被动观点出发的，即量子系统和四维时空固定不动而四维坐标系作一个转动〔注1〕，然后在四维时空中的同一点来考察波函数的变化（同一时空点在新旧两个参考系中的坐标经由Lorentz变换(1.10)相互联系）；我们还可以从线性变换的主动观点出发来讨论K—G方程的 Lorentz 不变性。为此，令时空每点在固定的四维坐标系中的坐标矢量x经受一个无穷小转动，转动前后的矢量x和x'由无穷小的Lorentz 变换相互联系：

〔注1〕 正Lorentz变换相当于四维时空的转动变换。令系统和时空不动而四维坐标系转动，便是被动变换；反之令坐标系不动而系统和时空转动，便是主动变换。两种变换方式是等效的。对于光子情况要复杂一些，见本章 §12。

$$x' = ax \qquad (a = \left[a_{\mu\nu}\right] = \left[\delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\right])$$

或

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu} x_\nu \tag{1.15 a}$$

其中

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \qquad (\text{一阶小量}) \tag{1.15 b}$$

转动后的波函数在x'点的值与转动前的波函数在x点的值相等[注1]，即$\phi'(x')=\phi(x)$（或$\phi'(x)=\phi(a^{-1}x)$），与（1.13）式比较可知，波函数的主动变换与被动变换等效．在（1.13）式里略去二阶以上无穷小量可得：

$$0 = \phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x') - \phi'(x) + \underbrace{\phi'(x) - \phi(x)}_{\delta\phi(x)} =$$

$$= \delta x_\mu \partial_\mu \phi(x) + \delta\phi(x),$$

或

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -\delta x_\mu \partial_\mu \phi(x) \tag{1.16}$$

$\delta\phi(x)$是当四维坐标系不动而量子系统和四维时空转动时，在固定坐标系中同一点波函数$\phi(x)$的增量，故称为波函数的主动变分．极易证明，$\phi'(x)$与$\phi(x)$满足相同的波动方程式，即与（1.8）式同样地有：

$$(\Box - m^2)\phi'(x) = 0 \tag{1.17}$$

到此为止，我们用两种变换方式证明了K—G方程的正Lorentz不变性．应当指出，算符对应关系（1.1）也可写成Lorentz协变的形式：

$$k_\mu \longrightarrow -i\partial_\mu = \hat{k}_\mu,$$

$$x \longrightarrow x \tag{1.18}$$

其中，$k=(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)=(k_x,\ k_y,\ k_z,\ iE)=(\mathbf{k},\ iE)$是粒子的四维动量矢量，而$\hat{k}=(\hat{k}_1,\hat{k}_2,\hat{k}_3,\hat{k}_4)$是相应的算符．因此，到此为止的全部讨论都已符合相对论原则．方程（1.8）是一个线性微分方程式，只要对波函数$\phi(x)$加上标准化条件，方程（1.8）看来就可同时符合量子力学原理；但我们立刻就会看到，K—G方程存在负能困难和负几率困难．

首先来看负能困难．假定ϕ_k是K—G方程的某个单色平面波解，则

$$(\Box - m^2)\phi_k = (-k_\mu k_\mu - m^2)\phi_k = (-|\mathbf{k}|^2 + E^2 - m^2)\phi_k = 0$$

因而

〔注1〕见B. Г. 贝依曼，《群论及其在核谱学中的应用》，第八讲，上海科学技术出版社，1963年（中译本）．

$$E=\pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\,. \tag{1.19}$$

由此可见，K—G方程不但存在正能解，而且还存在负能解．在粒子自身参考系里，$\mathbf{k}=0$，（1.19）式成为

$$E=\begin{cases}+m, & \text{对正能解}\\ -m, & \text{对负能解}\end{cases} \tag{1.20}$$

这就是说，一个处于负能态的粒子，其静止质量也为负值．但是，质量为负的概念与迄今为止的全部力学概念相抵触．负能解造成的困难还远不止于此．在经典理论里，可以把负能解看成是物理上不能实现的态而抛弃掉，但在量子理论里，能级跃迁是不可避免的，如果微观粒子存在能量为负的状态，那么，所有的正能态就将是不稳定的，处于正能级的粒子将会不断地放出能量，跃迁到越来越低的负能级上去．这一跃迁过程是没有止境的，这就与客观物质世界的相对稳定性矛盾．因而负能解在物理上是不能接受的，而在理论上又无法避免它．这就是K—G方程的负能困难．

其次来看负几率困难．以ϕ^*左乘（1.8）式，再以ϕ左乘（1.8）式之复共轭式，然后将所得式相减即得：

$$\partial_\mu(\phi^*\partial_\mu\phi-\phi\partial_\mu\phi^*)=0\,.$$

此式两边乘以常数因子$\frac{-i}{2m}$便得到如下的微分守恒定律：

$$\partial_\mu J_\mu(x)=0\,. \tag{1.21}$$

其中，$J_\mu(x)=\frac{i}{2m}(\phi\partial_\mu\phi^*-\phi^*\partial_\mu\phi)$．按照量子力学的几率守恒定律，可把$J_\mu(x)$的空间分量解释为几率流，并将它的时间分量解释为几率密度：

$$\rho(x)=-iJ_4(x)=\frac{-i}{2m}(\phi\dot{\phi}^*-\phi^*\dot{\phi})\,. \tag{1.22}$$

但由于K—G方程包含对时间t的二阶导数，对于任意给定的初始条件：$\phi(x)|_{t=0}$，$\dot{\phi}(x)|_{t=0}$，$\rho(x)$不可能总是取正值．它有可能在某些空间区域内取正值，而在另一些区域取负值，它还可能在$\phi(x)\neq 0$的整个空间区域均取负值．$\rho(x)$的非正定性与量子力学的几率解释矛盾．这就是K—G方程的负几率困难．对K—G方程而言，负几率困难更带有根本性，因为$\rho(x)$不是正定的，它就不能解释为几率密度，从而$\phi(x)$也就缺乏适当的几率解释，它不能作为量子力学的波函数．

K—G方程提出后，曾被认为是一次失败的尝试．但这一失败却暗示了一个重要的事实：在高能区域，粒子相互作用和相互转化的现象是十分普遍的，以几率解释为基础的量子力学在高能区域不再适用．1934年，Pauli和Weisskopf把K—G方程解释为场方程，使它和其它相对论波动方程一样取得了很大的成功．

为了以后的需要，我们来讨论K—G方程的解．因为方程（1.8）是线性齐次方程

式，故任意解$\phi(x)$可表示为所有本征振动的叠加．描写这些本征振动的平面波是所有正、负能的平面波解的完全集：

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ik\cdot x} \quad (正能平面波解) \tag{1.23}$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ik\cdot x} \quad (负能平面波解)$$

因此，K—G方程（1.8）的任意解为：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_k e^{ik\cdot x}+a_k^* e^{-ik\cdot x}\right), \quad [当\phi(x)为实函数] \tag{1.24a}$$

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_k e^{ik\cdot x}+b_k^* e^{-ik\cdot x}\right) \quad [当\phi(x)为复函数] \tag{1.24b}$$

其中V是归一化体积，a_k、b_k是一些展开系数，$\omega_k=\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}$．

§2 Dirac方程的建立

1928年，Dirac 建立了电子的相对论波动方程．他认为几率密度的正定性是必须坚持的量子力学概念，而K—G方程导致负几率困难的原因，就在于包含对时间t的二阶导数．下面，我们就遵循 Dirac 当年的基本思想来建立 Dirac 方程：

第一，这个方程只应含有对时间t的一阶导数，以保证几率密度的正定性．因此，可假定它仍具有以下的Schrödinger形式：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi. \tag{1.25}$$

第二，为了保证方程的 Lorentz 不变性，上式右边的算符$\hat{H}$同样只含有对空间坐标的一阶导数．换言之，$\hat{H}$应当具有以下形式：

$$\hat{H}=\frac{1}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+\beta m, \tag{1.26}$$

这样，又可把（1.25）式改写为：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\psi+\beta m\psi. \tag{1.27}$$

第三，（1.27）式中的α_j（$j=1, 2, 3$）和β不能是普通的数（c数），而必须

是一些矩阵算符（q 数）．这样，才能保证（1.27）式具有 Lorentz 不变性（因若α_j是 c 数，则$\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}$将像三维矢量的■分量一样地变换，即使在三维空间正转动下，方程（1.27）也不是不变的）．与此相应，$\psi(x)$也必须是一个列矩阵．

第四，方程（1.27）的解$\psi(x)$应能保持量子力学波函数的几率解释，而且这种几率解释应与所选定的Lorentz 参考系无关．这同样要求$\psi(x)$不是一个普通函数，而必须是某类 Lorentz 协变量．

第五，（1.27）式作为一个相对论波动方程式，应能导致经典的能量、动量关系式(1.19)．换言之，一个自由粒子的能量、动量本征值仍应满足相对论力学所建立的经典关系（这样，就使负能困难不可避免）．这一要求导致$\psi(x)$的每一分量均应满足K—G方程（1.8）．据此，分别将（1.27）式两边的算符重复作用一次，并适当调整求和指标后得到：

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\sum_{j,l=1}^{3}\frac{\alpha_j\alpha_l+\alpha_l\alpha_j}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_l}+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{i}m\,(\alpha_j\beta+\beta\alpha_j)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\beta^2m^2\psi. \tag{1.28}$$

不难看出，只要α_j、β满足如下代数关系，（1.28）式就与K—G方程（1.8)一致：

$$\alpha_j\alpha_l+\alpha_l\alpha_j=2\delta_{jl},\quad (j、l=1,2,3) \tag{1.29a}$$

$$\alpha_j\beta+\beta\alpha_j=0 \tag{1.29b}$$

$$\alpha_j^2=\beta^2=I_N\qquad (N\text{为待定之正整数}). \tag{1.29c}$$

这里，I_N是$N\times N$单位矩阵．（1.29)c 式表明，$N\times N$矩阵α_j、β的本征值均为± 1．即这些矩在对角形式下，其对角元素是$+1$或-1．另一方面，由(1.29)c和(1.29)b分别得到

$$\mathrm{Tr}\alpha_j=0,\qquad \mathrm{Tr}\beta=0. \tag{1.30}$$

此式与（1.29)c式表明，α_j和β均为偶维矩阵．除此以外，作为量子力学的 Hamilton 算符，$\widehat{\mathrm{H}}$应当是厄米的．按照（1.26）式，α_j和β也必须是厄米矩阵．根据以上诸特点和代数关系（1.29），我们来寻找α_j、β的矩阵表示．首先来看$N=2$的情形．在所有2×2矩阵里，具有这些特点的矩阵便是三个Pauli矩阵：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

因此，在$N=2$的情形下，无法找到四个满足代数关系（1.29）的矩阵；其次来看$N=4$的情形．这时，可用三个Pauli矩阵和2×2单位矩阵I_2构成α_j、β的如下矩阵表示：

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\\ \sigma_j & 0\end{pmatrix}\qquad \beta=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix}\tag{1.31}$$

从物理学理论的简单性考虑，我们不需要再去寻找更高的偶维表示．另一方面，从Lorentz不变性和空间反演不变性的要求考虑，波函数 ψ 必须、仅需具有四个分量[注1]，这同样排除了高维表示的可能性．因此，（1.31）式就是所要寻找的矩阵表示．与此相应，$\psi(x)$应是一个 4×1 矩阵：

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \vdots\\ \psi_4(x)\end{pmatrix}\tag{1.32}$$

（1.27）、（1.31）和（1.32）相结合，完全确定了Dirac方程的具体形式．现在，我们把Dirac方程（1.27）写成四维形式．以 $-\beta$ 乘（1.27）式两边，并引入下式定义的 γ 矩阵：

$$\gamma_j=-i\beta\alpha_j,\qquad j=1,2,3$$

$$\gamma_4=\beta,\tag{1.33}$$

就可把（1.27）式写成如下的四维形式：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi(x)=0.\tag{1.34}$$

这里及以后常把 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$ 形式地看成一个四维矢量，$\gamma_\mu\partial_\mu$便是两个四维矢量的标量积．不过，γ 并不是Lorentz矢量，因而$\gamma\cdot\partial$也不是Lorentz不变的算符．将（1.31）代入（1.33）得：

$$\gamma_j=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_j\\ i\sigma_j & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma_4=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix}\tag{1.35a}$$

或者形式地写为

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & -i\boldsymbol{\sigma}\\ i\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma_4=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix}\tag{1.35b}$$

其中，$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$．$\gamma$ 矩阵的上述表示称为Pauli表示．γ 矩阵的表示有很多种．在附录三里还将介绍 Bjorken-Drell 度规下的表示．容易看出，(1.33)式定义的γ_μ均为厄米矩阵，并满足如下的代数关系：

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}\tag{1.36a}$$

$$\gamma_\mu^2=I_4=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}\tag{1.36b}$$

〔注1〕参见 A. N. 阿希叶泽尔，B. Б. 别列斯捷茨基《量子电动力学》pp58—59。科学出版社，1964年。

在引入γ矩阵以后，（1.26）式的Hamilton算符可重新写为

$$\hat{H}=i\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{k}}+\gamma_4 m. \tag{1.37}$$

§3 Dirac方程的正Lorentz不变性

如上一节所述，Dirac方程必须具有Lorentz不变性。但是，方程（1.34）并没有明显的不变性。在这一节里，我们就来讨论Dirac方程的正Lorentz不变性。

首先从线性变换的被动观点出发，假定在正Lorentz变换

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu \tag{1.38}$$

之下，$\psi(x)$ 经受如下的线性变换：

$$\psi'(x')=\Lambda(a)\psi(x). \tag{1.39}$$

由（1.38）式易得：

$$\partial_\mu=a_{\nu\mu}\partial'_\nu. \tag{1.40}$$

利用（1.39）和（1.40）把（1.34）式中的各个量均用变换后的量来表示：

$$(\gamma_\mu a_{\nu\mu}\partial'_\nu+m)\Lambda^{-1}(a)\psi'(x')=0,$$

再以$\Lambda(a)$左乘上式得：

$$[\Lambda(a)\gamma_\mu a_{\nu\mu}\Lambda^{-1}(a)\partial'_\nu+m]\psi'(x')=0. \tag{1.41}$$

所谓“方程(1.34)的不变性”，是指变换后的波函数$\psi'(x')$与变换前的波函数$\psi(x)$满足形式相同的方程式。不难看到，只要$\Lambda(a)$满足如下条件：

$$\Lambda^{-1}(a)\gamma_\mu\Lambda(a)=a_{\mu\nu}\gamma_\nu, \tag{1.42}$$

则（1.41）式就成为：

$$(\gamma_\mu\partial'_\mu+m)\psi'(x')=0 \tag{1.43}$$

此式正是在变换后的参考系里写出来的 Dirac 方程式，它与变换前参考系里的（1.34）式具有完全相同的形式。因此，证明Dirac方程具有正Lorentz不变性的问题，转化为要证明满足（1.42）式之$\Lambda(a)$的存在性问题。为简单起见，我们考虑无穷小的 Lorentz 变换(1.15)。这时$a_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}$，相应地，$\Lambda(a)$应代以$\Lambda(\omega)$。在$\omega=0$点把$\Lambda(\omega)$展开：

$$\Lambda(\omega)=\Lambda(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Lambda(\omega)}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right)_{\omega=0}\omega_{\mu\nu}+O(\omega^2) \tag{1.44}$$

$O(\omega^2)$是一个二阶小量，它代表所有高次项的贡献。由于Lorentz群只有六个独立的无穷小参数$\omega_{\mu\nu}$，而上式右边第二项的求和共有十二个非零项，而且其中两两相等：

$$\left(\frac{\partial\Lambda(\omega)}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right)_{\omega=0}\omega_{\mu\nu}=\left(\frac{\partial\Lambda(\omega)}{\partial\omega_{\nu\mu}}\right)_{\omega=0}\omega_{\nu\mu},$$

所以在（1.44）式右边第二项里加入常数因子$\frac{1}{2}$来消去多余的求和项。略去二阶以上小量，并令

$$\left(\frac{\partial\Lambda(\omega)}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right)_{\omega=0}=i\frac{1}{2}S_{\mu\nu}. \tag{1.45}$$

就得到

$$\Lambda(\omega)=\Lambda(0)+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \tag{1.46a}$$

或

$$\Lambda(\omega)=\Lambda(0)+\frac{i}{2}\sum_{\mu>\nu}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}. \tag{1.46b}$$

所有$\Lambda(a)$的全体构成正 Lorentz 群的双旋量表示$D^{\frac{1}{2},0}\dot{+}D^{0,\frac{1}{2}}$，而$\Lambda(0)$正是这个表示群的恒等变换：$\Lambda(0)=I_4$，$\frac{1}{2}S_{\mu\nu}$则是这个表示群的生成元[注1]。因此，可将(1.46)式重新写为下式：

$$\Lambda(\omega)=I_4+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \tag{1.47a}$$

或

$$\Lambda(\omega)=I_4+\frac{i}{2}\sum_{\mu>\nu}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu} \tag{1.47b}$$

把（1.47）a 代入（1.42）式并略去二阶以上无穷小，就得到：

$$\omega_{\alpha\beta}[\gamma_\mu,\ iS_{\alpha\beta}]=4\omega_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{1.48}$$

适当改变求和指标，又可将上式变为：

$$\omega_{\alpha\beta}[\gamma_\mu,\ iS_{\alpha\beta}]=2\omega_{\alpha\beta}(\delta_{\alpha\mu}\gamma_\beta-\delta_{\beta\mu}\gamma_\alpha),$$

即

$$[\gamma_\mu,\ iS_{\alpha\beta}]=2(\delta_{\alpha\mu}\gamma_\beta-\delta_{\beta\mu}\gamma_\alpha). \tag{1.49}$$

利用代数关系（1.36）a 适当变化上式右方，即得

〔注1〕 关于Lorentz 群及其表示，建议阅读P. 罗曼《基本粒子理论》第一章，上海科学技术出版社，1966年。但在本书里基本上不涉及群论知识。

$$S_{\alpha\beta}=\frac{1}{2i}[\gamma_\alpha,\ \gamma_\beta]. \tag{1.50}$$

(1.50) 式与 (1.47) 式相结合完全确定了$\Lambda(\omega)$. 任何一个有限变换$\Lambda(a)$均可表示为无数个无穷小变换$\Lambda(\omega)$的连乘积. 因此,

$$\Lambda(a)=\lim_{n\to\infty}(\Lambda(\omega))^n=\lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{i}{4}\ \frac{\theta_{\mu\nu}}{n}S_{\mu\nu}\right)^n=$$

$$=\exp\frac{i}{4}\theta_{\mu\nu}S_{\mu\nu}. \tag{1.51}$$

式中的$\theta_{\mu\nu}$是Lorentz群的六个独立参数. 至此, 我们证明了满足 (1.42) 式之$\Lambda(a)$ 存在,从而也就证明了Dirac方程的正Lorentz不变性. 但应注意, 在上述的证明里对波函数$\psi(x)$ 作了很强的限制: $\psi(x)$ 必须按Lorentz 群的表示$D^{\frac{1}{2}0}\dot{+}D^{0\frac{1}{2}}$变换, 亦即$\psi(x)$必须是一个双旋量 (所谓双旋量, 乃是两个二分量基本旋量的可约组合) . 在§6里将要证明, Dirac 方程所描写的粒子其自旋值为$\frac{1}{2}$. 这一点正好说明了相对论量子力学与非相对论量子力学的一个重要区别. 在非相对论量子力学里, Schrödinger 方程可描写具有不同自旋值的粒子, 而在相对论量子力学里, Lorentz不变性的限制要求波函数必须是某类Lorentz协变量, 因而不同的波动方程式将描写具有不同自旋值的粒子.

与K—G方程的情形类似, 在证明Dirac方程的正Lorentz不变性时, 同样可从线性变换的主动观点出发: 令四维坐标系不动, 量子系统和时空经受无穷小转动, 则转动后的波函数在x点的值与转动前的波函数在$a^{-1}x$点的值由下式联系:

$$\psi'(x)=\Lambda(\omega)\psi(a^{-1}x)=\Lambda(\omega)\psi(x-\delta x), \tag{1.52}$$

其中, $a=\left\{\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}\right\}$. 容易看出, 上式与被动变换 (1.39) 等效. 把 (1.47) a 代入 (1.52) , 并将$\psi(x-\delta x)$在x点展开, 精确到一阶无穷小量, 可得 $\psi'(x)$ 的如下展开式:

$$\psi'(x)=\psi(x)-\delta x_\mu\partial_\mu\psi(x)+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}\psi(x), \tag{1.53a}$$

波函数的主动变分为:

$$\delta\psi(x)=\psi'(x)-\psi(x)$$

$$=-\delta x_\mu\partial_\mu\psi(x)+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}\psi(x). \tag{1.53b}$$

为了证明$\psi'(x)$仍满足Dirac方程式, 可将 (1.53)a式改写为:

$$\psi'(x)=\psi'(x')-\delta x_\mu\partial_\mu\psi(x)$$

$$=\psi'(x)+\delta x_\mu\partial_\mu\psi'(x)-\delta x_\mu\partial_\mu\psi(x).$$