

A 1238

计8

R-1

# 有限元方法及其应用

计算技术研究所三室

中国科学院计算技术研究所

1975. 12.

## 前 言

有限元法是一种有效的数值计算方法，目前在许多生产，科研单位得到广泛的应用。

六十年代初期，我国的科技工作者结合工程计算提出了变分——差分方法（即有限元方法），并相应地开展了理论分析工作，为方法的有效性提供了理论根据。但是由于刘少奇修正主义路线的影响，有限元方法没有为广大革命群众所掌握，研究工作也只有少数人在进行，这种有效的方法也没有得到广泛的推广和应用。

无产阶级文化大革命和批林批孔以来，批判了刘少奇、林彪的修正主义路线。广大科技人员在毛主席无产阶级革命路线指引下，努力贯彻科研为无产阶级政治服务，为工农兵服务，与生产劳动相结合的方针，应用有限元法解决了社会主义建设中提出的大量工程计算问题，同时大力推广普及有限元法，理论研究工作也取得了新的进展。在贯彻执行毛主席以阶级斗争为纲，认真学习无产阶级专政理论的指示中，为了把有限元方法的推广普及和交流工作做得更好，我们将几年来应用有限元方法的情况汇编成册以供有关的读者参考。

这本书共收集了九篇文章，大体上可分为两部分。第一部分是基本方法介绍。为了便于不同专业的读者阅读，在这一部分中我们收集了两篇文章即本书的第一、二篇文章，从不同的角度介绍有限元法的物理背景，基本思想、理论基础，基本的计算公式以及一些解算方法等等。第二部分是有限元法在一些工程领域中的具体应用。这部分的七篇文章都是实际计算问题的工作总结。每篇文章包括实际工程问题的物理背景、数学描述、具体的计算公式、求解方法、计算结果等。各篇之间是相对独立的。由于是汇编而成，因此各篇的写法、符号也不完全统一。敬请读者谅解。

在汇编过程中得到有关单位的大力协助，书中一些部分也是和有关单位共同完成的，在此对这些单位及有关同志表示谢意。由于我们水平所限，编写的时间也很仓促，其中必有不少的谬误和不妥之处欢迎广大读者批评指正。

编者 1975、12、

# 目 录

一、有限元方法.....	冯康 (1)
二、弹性力学问题的有限元方法.....	王苳贤、崔俊芝 (53)
三、三维问题有限元法的计算和技巧.....	崔俊芝、丁江平 (129)
四、动力问题的有限元法.....	杨真荣 (151)
五、关于弹性接触问题的分析方法.....	崔俊芝、李光宗、梁复刚、史光洁、李国润 (166)
六、组合结构有限元法通用程序.....	何春发、林玉振 (182)
七、有限元法在飞机结构分析中的应用.....	王苳贤、张学峰、李志欣 (238)
八、矩阵力法在机身强度分析中的应用.....	张迪、王苳贤 (260)
九、完全协调三角形元分析板弯曲问题.....	高征铨、崔俊芝、赵超燮 (275)

# 有 限 元 方 法

馮 康

有限元方法是在生产实践基础上发展起来的,用于解椭圆型方程问题的一类数值方法(1—2),特别适合于几何上、物理上比较复杂的问题。在弹性力学领域内已经广泛应用,成效显著。由于方法是高度通用的,对于其它领域的应用发展前景亦是很宽广的。本文将对这个方法的要点作一初步介绍。

有限元法是以变分原理和剖分插值为基础的。一般说来,椭圆方程连同其边界条件等价于适当的变分问题即能量积分的极值问题。在变分问题中,边界和间断条件的处理可以得到很大的简化,对此将在§1中简单介绍。剖分插值是把定解区域从几何上剖分为点、线、面、体单元,然后分片即按单元分别插值从而形成总体的插值。这类插值方法有灵活、稳定的优点,将在§2中介绍,但主要讲最简单而通用的三角剖分和线性插值。有限元法是从变分原理出发,通过区域剖分和分片插值,把能量积分——二次泛函——化为各单元能量之和,从而把二次泛函的极值问题简化为普通多元二次函数的极值问题,后者又等价于一组多元线性代数方程,可以进行解算。§3以典型二阶椭圆方程为例说明这个离散化过程。§2.6和§3.6讨论离散解对于真解的误差和收敛性。§4介绍轴对称问题、本征值问题、平面弹性问题以及二次插值的应用。至于代数计算方法、三维问题、四阶椭圆方程如板、壳问题、动态问题以及方法的众多应用和其它的剖分插值法等等则不在本文之列,可以参考专门的著作。

## §1. 变 分 原 理

一般的椭圆型方程边值问题都有适当的“能量极值问题”即变分原理与之等价。有限元法正是直接从变分原理出发的。为了帮助理解,先回顾一下“初等”的变分原理,即微积分中函数的极值原理,然后讨论椭圆边值问题与变分问题的等价性。

### 1.1 初等变分原理

设有单变元函数 $F(s)$ ,对自变量某定值 $s$ 任给增量即微分 $\delta s$ ,则有幂次展式

$$F(s + \delta s) = F(s) + \delta F(s) + \frac{1}{2} \delta^2 F(s) + \dots \quad (1.1)$$

这里略去了高阶无穷小量, $\delta F$ 及 $\delta^2 F$ 为由 $\delta s$ 引起的 $F$ 的一次及二次微分:

$$\delta F(s) = F'(s) \delta s, \quad (1.2)$$

$$\delta^2 F(s) = F''(s) (\delta s)^2 \quad (1.3)$$

从(1.1)中各项的量级对比可以看到:函数 $F$ 在某点 $s$ 达到极值——指的是局部的即相对的极值,以下均按此理解——的必要条件是在该处一次微分恒为零,即对一切 $\delta s$

$$\delta F(s) \equiv 0, \quad (1.4)$$

也就是说，一阶导数为零：

$$F'(s) = 0. \quad (1.5)$$

此外，当在该点的二次微分恒正，即对一切  $\delta s \neq 0$ ，

$$\delta^2 L(s) > 0, \quad (1.6)$$

也就是说，当二阶导数为正

$$F''(s) > 0 \quad (1.7)$$

时 (1.4) 成为  $F$  达到极值的充要条件。这时，由于 (1.1)，(1.2)，(1.6)，恒有

$$F(s + \delta s) = F(s) + \frac{1}{2} \delta^2 F(s) > F(s), \text{ 当 } |\delta s| \text{ 充分小而不 } \neq 0 \text{ 时.}$$

因此这个极值是相对极小值。因此，在一定条件下，函数极值问题

$$F(s) = \min \quad (1.8)$$

与方程 (1.5) 求解的问题是等价的。

在多元函数  $F(s) = F(s_1, \dots, s_n)$  时情况也相似。这时展式 (1.1) 仍然成立，而

$$\delta F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial s_i} \delta s_i, \quad (1.9)$$

$$\delta^2 F(s) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial s_i \partial s_j} \delta s_i \delta s_j. \quad (1.10)$$

它们依赖于  $s$ ，同时又分别是  $\delta s = (\delta s_1, \dots, \delta s_n)$  的一次及二次型（在这里和以后所谓  $m$  次型是指  $m$  次齐次函数），其系数即  $F$  的偏导数在点  $s = (s_1, \dots, s_n)$  处计值。 $F$  在某点达到极值的必要条件仍然是一次微分恒为 0 即 (1.4)，这时等价于方程组

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial s_n} = 0. \quad (1.11)$$

当条件 (1.6) 满足时，(1.4) 也成为达到极值的充要条件，并且相当于极小。注意条件 (1.6) 意味着二次型  $\delta^2 F$  (1.10) 为正定，也就是说二阶导数矩阵

$$\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial s_i \partial s_j} \right], \quad i, j = 1, \dots, n$$

在有关点为正定。

考虑一个简单而重要的特例。取  $F$  为  $s_1, \dots, s_n$  的二次函数，其一般形式是

$$F(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} s_i s_j - \sum_{i=1}^n b_i s_i + c. \quad (1.12)$$

不失一般性，可以假定二次部分的系数是对称的

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.13)$$

这是因为，即使不对称时，可以把  $a_{ij}$  代以对称的系数  $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$  而二次型值不变

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} s_i s_j \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) s_i s_j, \quad (1.14)$$

读者不妨就  $n=2$  的情况验算即明。

由于  $F$  本身是二次函数，它的二次幂次展式是准确的，因此 (1.1) 成为

$$F(s + \delta s) = F(s) + \delta F(s) + \frac{1}{2} \delta^2 F(s), \quad (1.15)$$

其中  $\delta F$  及  $\delta^2 F$  的系数即  $F$  的一、二阶偏导数是

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial s_i} \left[ \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n a_{kl} s_k s_l \right] - \frac{\partial}{\partial s_i} \left[ \sum_{k=1}^n b_k s_k \right] + \frac{\partial}{\partial s_i} c = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (a_{ik} + a_{ki}) s_k - b_i,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_i \partial s_j} = \frac{\partial}{\partial s_i} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (a_{ik} + a_{ki}) s_k - b_i \right] = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}),$$

读者只要验算  $n=2$  的情况，即明。考虑到对称性  $a_{ij} = a_{ji}$  就得到

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j - b_i, \quad \delta F = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j - b_i \right) \delta s_i, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_i \partial s_j} = a_{ij}, \quad \delta^2 F = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta s_i \delta s_j. \quad (1.17)$$

注意由于  $F$  是二次函数，它的一次微分  $\delta F$  线性地依赖于  $\delta s$ ，也线性地依赖于  $s$ ，而二次微分  $\delta^2 F$  二次地依赖于  $\delta s$  但不依赖于  $s$ 。

运用以前的结论就得到：二次函数 (1.12) 在  $(s_1, \dots, s_n)$  达到极值的必要条件是

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} s_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

当矩阵  $A = (a_{ij})$  为正定时，这是达到极值的充要条件，并且极值是极小值，这时二次函数的极值问题

$$F(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} s_i s_j - \sum_{i=1}^n b_i s_i + c = \min \quad (1.19)$$

等价于线代数方程组 (1.18) 的定解问题，也就是说，二次函数  $F$  的极小点与方程组 (1.18) 的解点是一致的。

顺便指出，由于  $F$  为二次，展式 (1.15) 准确成立，因此，当  $A$  为正定阵，即  $\delta^2 F$  为  $\delta s$  的正定二次型时，在极值点  $s$  处恒有

$$F(s + \delta s) = F(s) + \frac{1}{2} \delta^2 F(s) > F(s), \quad \text{对一切 } \delta s \neq 0. \quad (1.20)$$

因此，所达到的极值是绝对的、全局的极小值，并且极小点是唯一的。

上面所说的初等变分原理，包括二次函数的变分原理虽然很简单但却很重要。这是因为，一、有限多个自由度的力学系统的平衡问题通常可以表为能量极值问题，而其能量函数又往往可以直接表为二次多元函数。二、二次函数的变分原理可以从有限多个自由度推广到无穷多个自由度而得到所谓二次泛函的变分原理，它与椭圆方程边值问题等价，从而作为有限元法的基点。这在下一节中即将讨论。三、在有限元方法中把无穷多自由度的变分问题进行离散化又回到有穷多自由度的变分问题，因此最终归结于解一个线代数方程组的问题。这将在 § 3 中讨论。

## 1.2 椭圆方程的变分原理

考虑二维域  $\Omega$  上的二阶变系数椭圆型方程



$$\Omega: -\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\beta\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f, \quad (1.21)$$

这里  $\beta = \beta(x, y) > 0$ ,  $f = f(x, y)$  是给定的系数及右项分布。由于方程是二阶的, 为了定解, 在边界  $\partial\Omega$  上要给定一个条件。边界条件通常有三种类型:

第一类:  $u = \bar{u}$

第二类:  $\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = q$ ,

第三类:  $\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = q$ ,

这里  $\bar{u} = \bar{u}(s)$ ,  $q = q(s)$ ,  $\eta = \eta(s) \geq 0$  为给定在边界上的分布,  $\beta = \beta(s) > 0$  就是  $\beta(x, y)$  在边界上的值,  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  表示外法向导数。在边界的不同区段上可以规定不同类型的边界条件, 第二类边界条件可以视为第三类当  $\eta \equiv 0$  时的特例。因此, 边界条件一般地可以表为

$$\Gamma_0: u = \bar{u}, \quad (1.22)$$

$$\Gamma'_0: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = q, \quad (1.23)$$

$\Gamma_0$  及  $\Gamma'_0$  为  $\partial\Omega$  上互补的两个部分, 即

$$\partial\Omega = \Gamma_0 + \Gamma'_0, \quad \Gamma_0 \cdot \Gamma'_0 = 0,$$

它们自身又可能分解为不相连结的区段。图 1 表示一个复连通域  $\Omega$ , 边界  $\partial\Omega$  上打毛的区段为  $\Gamma_0$ , 其余的区段为  $\Gamma'_0$ 。

对应于方程 (1.21) 和边界条件 (1.22—23) 可以构成所谓能量积分

$$J(u) = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ \beta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy + \int_{\Gamma'_0} \left[ \frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] ds. \quad (1.24)$$

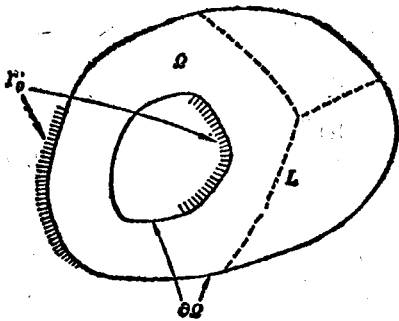


图 1

任取一个函数  $u = u(x, y)$ , 就有一个积分值  $J(u)$  与之相应, 因此  $J(u)$  可以说是“函数的函数”, 一般叫作泛函。这里它二次地依赖于  $u$ , 因此是一个二次泛函。

关键之点在于: 由所有满足边界条件 (1.22)

$$\Gamma_0: u = \bar{u}$$

的函数组成的函数类  $S$ ——这里当然默认  $u$  有起码的光滑性, 即具有一阶导数  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  以使积分 (1.24)

有意义, 但解析上的细节从略——中使得  $J$  达到极小值的那个函数即极值函数  $u = u(x, y)$  必定在  $\Omega$  内满足微分方程 (1.21), 而且除了在边界的  $\Gamma_0$  上满足 (1.22) 外, 还在  $\Gamma'_0$  上自动满足边界条件 (1.23)。反之, 满足 (1.21—23) 的函数  $u = u(x, y)$  也必定是函数类  $S$  中使得  $J$  达到极小的函数即极值函数。这就是说, 条件变分问题

$$\begin{cases} J(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \beta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy + \int_{\Gamma'_0} \left[ \frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] ds = \min, \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (1.25)$$

等价于椭圆边值问题

$$\begin{cases} \Omega: - \left( \frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f, \\ \Gamma'_0: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = q, \\ \Gamma_0: u = \bar{u}. \end{cases} \quad (1.26)$$

对此我们不打算给出完整的论证，可以参考〔1—3〕。仅仅仿照 § 1.1 中的初等方法列举其要点如下。

对于函数  $u(x, y)$  给以增量即变分  $\delta u = \delta u(x, y)$  即  $u$  变为  $u + \delta u$ ，相应地  $J(u)$  变为  $J(u + \delta u)$ ，不难算出

$$J(u + \delta u) = J(u) + \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J, \quad (1.27)$$

$$\delta J = \int_{\Omega} \left[ \beta \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} - f \delta u \right] dx dy + \int_{\Gamma'_0} (\eta u + q) \delta u ds, \quad (1.28)$$

$$\delta^2 J = \int_{\Omega} \left[ \beta \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left( \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma'_0} \eta (\delta u)^2 ds, \quad (1.29)$$

这里视  $\delta u$  为无穷小量， $\delta J = \delta J(u, \delta u)$  线性地依赖于  $u$  又线性地依赖于  $\delta u$ ，因此为  $\delta u$  的同阶无穷小量，叫做泛函  $J$  的一次变分。 $\delta^2 J = \delta^2 J(\delta u)$  不依赖于  $u$  但二次地依赖于  $\delta u$ ，因此为  $\delta u$  的二阶无穷小量，叫做  $J$  的二次变分。试与 (1.14—16) 相比较，不难看出，这里泛函的一次二次变分就是函数的一次二次微分的推广。

我们要求  $u$  和  $u + \delta u$  同属于函数类  $S$ ，即都满足边界条件 (1.22)，因此要求  $\delta u$  满足对应于 (1.22) 的齐次边界条件

$$\Gamma_0: \delta u = 0 \quad (1.30)$$

把满足这个齐次边界条件的函数类记为  $S_0$ 。显然可见，设  $u$  是属于  $S$  的某个特定的函数， $v$  为  $S$  内的任意函数，则它必可表为  $v = u + \delta u$ ，而  $\delta u$  属于  $S_0$ 。

对展式 (1.27) 各项作量级对比，不难看到函数类  $S$  中  $u$  使  $J$  达到极值的必要条件是  $J$  的一次变分恒为零即

$$\delta J = 0, \text{ 对一切 } \delta u \in S_0 \quad (1.31)$$

此外，从表达式 (1.29) 可知二次变分  $\delta^2 J$  是恒正的，即

$$\delta^2 J \geq 0, \text{ 对一切 } \delta u \in S_0 \quad (1.32)$$

并且，当集合  $\Gamma_0$  非空（即边界上确有第一类条件的区段）或者  $\eta \neq 0$ （即边界上确有第三类条件的区段）时也不难证明：当  $\delta u \in S_0$  而  $\delta^2 J = 0$  时必有  $\delta u \equiv 0$ ，这就是说二次变分  $\delta^2 J$  是正定的即

$$\delta^2 J > 0, \text{ 对一切 } \delta u \in S_0 \text{ 并且 } \delta u \neq 0 \quad (1.33)$$



因此 (1.31) 是  $J$  达到极值的充分而且必要的条件, 并且极值是极小值, 甚至是整体的、绝对的极小, 极值函数是唯一的。这与 § 1.1 中关于多元二次函数的极值原理是完全相似的, 条件 (1.31) 相当于条件 (1.4)。

余下的任务是把条件 (1.31) 转化为明显的方程的形式即 (1.21), (1.23), 就好比在 § 1.1 中 (1.4) 转化为 (1.17) 一样。为此目的, 运用高斯积分公式于表达式 (1.28) 使得积分号下只含“独立”的  $\delta u$  项而消去“依赖”的  $\frac{\partial}{\partial x} \delta u, \frac{\partial}{\partial y} \delta u$  项:

$$\iint_{\Omega} \left[ \beta \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right] dx dy = - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta u dx dy$$

$$+ \int_{\partial \Omega} \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \delta u ds,$$

利用边界条件 (1.30) 又得

$$\int_{\partial \Omega} \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \delta u ds = \int_{\Gamma'_0} \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \delta u ds,$$

因此对于  $\delta u \in S_0$  便有

$$\delta J = - \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} + f \right] \delta u dx dy + \int_{\Gamma'_0} \left[ \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u - q \right] \delta u ds. \quad (1.34)$$

再根据变分法中的基本引理 (见 (1)) 可知 (1.31) 成立的充要条件是 (1.34) 两个积分号下的项 (...) 恒为零, 这就是 (1.21) 和 (1.23)。

上面由 (1.31) 转化为 (1.21) (1.23) 时运用了高斯积分公式, 它仅当有关场量具有一定的光滑性时才是合法的, 例如当介质系数  $\beta$  为连续函数时就是这样。当系数  $\beta$  有间断时, 命其间断线为  $L$  (如图 1 中的虚线), 它把区域  $\Omega$  分割成几个小块。为简便计, 设分割为两块  $\Omega = \Omega^- + \Omega^+$ , 在  $L$  上规定从  $\Omega^-$  指向  $\Omega^+$  的方向为法线  $\nu$  的方向。于是

$$\iint_{\Omega} \dots dx dy = \iint_{\Omega^+ + \Omega^-} \dots dx dy.$$

这时分片对  $\Omega^-$  及  $\Omega^+$  运用高斯公式还是合法的, 由此不难算出

$$\delta J = - \iint_{\Omega^- + \Omega^+} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} + f \right] \delta u dx dy + \int_L \left[ \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^- \right.$$

$$\left. - \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^+ \right] \delta u ds - \int_{\Gamma'_0} \left[ \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u - q \right] \delta u ds.$$

注意  $\Omega^- + \Omega^+ = \Omega - L$ 。对此运用变分法的基本引理就得出结论: 当介质系数  $\beta$  有间断, 变分问题 (1.25) 等价于边值问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega-L: -\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\beta\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f \\ L: \left(\beta\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^- - \left(\beta\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ = 0 \\ \Gamma'_0: \beta\frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = q \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{array} \right. \quad (1.35)$$

与(1.26)相比较,这里多出一个在介质系数间断线 $L$ 上的交界条件。应该指出,在计算实践中经常会遇到介质间断性,包括间断性在几何上异常复杂的情况。

综合以上所述,微分方程(1.21)连同其第二、三类边界条件以及介质系数有间断时的交界条件都可以从适当的变分原理导出。值得注意的是,在解微分方程边值问题时,第二、三类边界条件以及交界条件都必须作为定解条件列出,而在解等价的变分问题时,它们是被极值解自动满足的,无须作定解条件列出,因此称这类边界条件为自然边界条件。反之,第一类边界条件,如果有的话,在变分问题中与在微分方程边值问题中一样,必须作为定解条件列出,也就是说,极值解必须在满足这个边界条件的函数类去找,因此称这类边界条件为强加边界条件。强加边界条件总是要比自然边界简单些,在这里举的二阶方程中,强加条件

只涉及 $u$ 本身,而自然边界条件涉及 $u$ 及其法向导数 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ ,后者特别当边界以及内部分界线比较复杂时在处理上是相当困难的。此外,这里微分方程中含二阶导数,而变分问题中只含一阶导数,低阶导数的处理总要比高阶导数方便些。以后可以看到,基于变分原理的有限元方法能使这些有利因素得到充分发挥。

上列变分问题与边值问题的等价性还可以推广到更复杂的情况,为了方便将 $x, y$ 改记为 $x_1, x_2$ ,于是变分问题

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \gamma u^2 \right] - fu \right\} dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma'_0} \left[ \frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] ds = \min \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{array} \right. \quad (1.36)$$

等价于边值问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega-L: -\left(\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \beta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \gamma u = f \\ L: \left(\sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^- - \left(\sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^+ = 0 \\ \Gamma'_0: \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \eta u = q \\ \Gamma_0: u = \bar{u}, \end{array} \right. \quad (1.37)$$

这里 $\beta_{ij} = \beta_{ij}(x_1, x_2)$ 为对称正定阵,各向异性的介质系数就是作此形式。 $\nu_1, \nu_2$ 是法向余弦。 $\gamma = \gamma(x_1, x_2)$ 通常反映环境的反作用,例如在热传导问题中相当于介质与环境的热交换系数,在弹性力学则相当于基础的弹性系数,等等。

将 (1.36—37) 中的求和下标改为  $i, j=1, 2, 3$ ,  $\Omega$  理解为立体,  $L, \Gamma_0, \Gamma'_0$  理解为曲面, 就把问题推广到三维的情况。

反之, 将 (1.36—37) 中的求和下标局限于  $i, j=1$ ,  $\Omega$  理解为一维区间,  $\Gamma_0, \Gamma'_0$  理解为边界点,  $L$  为  $\Omega$  内部的离散点, 则问题便简化为一维, 即

$$\begin{cases} J(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u^2 \right] - fu \right\} dx + \sum_{\Gamma'_0} \left[ \frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] = \min \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (1.38)$$

等价于

$$\begin{cases} \Omega - L: -\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = f \\ L: \left( \beta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^- - \left( \beta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ = 0 \\ \Gamma'_0: \epsilon \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \eta u = q \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (1.39)$$

这里  $\epsilon$  在右边界点为  $+1$ , 在左边界点为  $-1$ 。

应该指出, 在有些变分问题中, 人们并不要求泛函达到极小值而只要求达到临界值, 从而定出临界点或临界函数, 例如, 在函数  $F(s) = F(s_1, \dots, s_n)$  的极值问题中, 单独满足

$\delta F = 0$  即  $\frac{\partial F}{\partial s_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial s_n} = 0$  的点叫做临界点而不论  $\delta^2 F$  是否正定。类似地, 在泛函  $J(u)$  的极

值问题中, 单独满足一次变分恒为零  $\delta F \equiv 0$  的  $u$  叫做临界函数而不论二次变分  $\delta^2 J$  是否正定。在我们所举的典型例中, 变分问题与边值问题的等价性主要是通过临界性建立起来的。不过由于二次变分的正定性, 临界性遂成为极小性。一般说来, 变分问题可以根据其二次变分为正定或不定 (即  $\delta^2 J$  对于某些  $\delta u$  取正值, 对于另一些  $\delta u$  取负值) 而分为两类。椭圆方程中的势能原理多属于正定型的, 椭圆方程中的余能原理以及双曲方程中的最小作用原理等则多属于不定型。正定性对于变分原理的误差估计和收敛性论证是关键, 对于离散化后代数问题的解算也是有利的。但在不定的情况下也并不妨碍变分原理的实际运用, 这是因为变分原理这套形式工具在计算实践中所起的作用如自然边界条件的自动实现以及导数的降阶等方面主要是由临界性带来的, 与正定性无关。

## §2. 剖分插值

本节讨论平面区域的几何剖分和相应的分片插值方法, 对区域进行剖分时, 基本单元可以取为三角形、矩形、四边形等等, 插值函数可以取为一次 (线性) 或高次多项式等等。其中以三角剖分和相应的三顶点线性插值最简单, 最常用, 故主要讨论这一情况。为了尽快进入有限元离散化, 可以只读这里的 §§2.1-3 而转至 §3。

### 2.1 三角剖分

设有平面域  $\Omega$ 。如果  $\Omega$  的边界是曲的, 则总可以用适当的折线来逼近, 这样经过裁弯取

直后成为一个多边形域，仍记作 $\Omega$ 。 $\Omega$ 可以是单连通的，即其边界 $\partial\Omega$ 是一条闭曲线；也可以是复连通的，即有孔的，如果有 $p$ 个孔，则 $\partial\Omega$ 由 $p+1$ 条闭曲线组成。

把多边形域 $\Omega$ 分割为一系列的三角形，更确切地说，分割为

点元：  $A_1, A_2, \dots, A_{N_0}$ ,

线元：  $B_1, B_2, \dots, B_{N_1}$ ,

面元：  $C_1, C_2, \dots, C_{N_2}$ 。

$N_0, N_1, N_2$ 分别是点、线、面元的个数。面元是三角形，线元是直线段。每个面元以三个线元为其边，也以三个点元为其顶点，每个线元以两个点元为其顶点。如果区域内部的介质系数或边界条件中的系数有间断性，则这种间断的点、线应该落在分割出来的线元和点元上。也就是说，进行分割时应与问题本有的区分相协调。图2给出了对图1的一个分割。总的说来，分割基本上是任意的，可以根据需要在有些地方加密，有些地方放稀，有很大的灵活性。

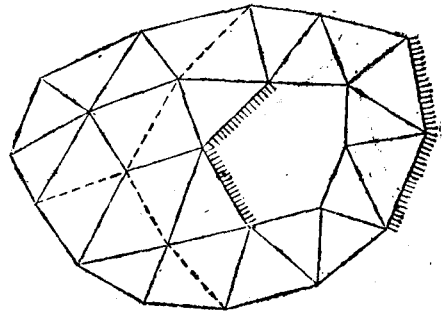


图 2

把点、线、面元都编上号并给出如下的信息

1. 点元坐标  $(x_k, y_k)$ ,  $k=1, \dots, N_0$ ,

2. 线元两顶点的编号

$(m_{1k}, m_{2k})$ ,  $k=1, \dots, N_1$ ,

3. 面元三顶点的编号

$(n_{1k}, n_{2k}, n_{3k})$ ,  $k=1, \dots, N_2$ ,

则 $\Omega$ 的几何分割便完全确定。顺便指出，点、线、面元的个数恒适合尤拉公式

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1 - p,$$

$p$ 为域 $\Omega$ 的孔数，当 $\Omega$ 为单连通时 $p=0$ 。

## 2.2 三角形上的线性插值

在有限元的离散化中，待解函数 $u(x, y)$ 在每个单元上用适当的插值函数 $U(x, y)$ 来代替。三角形单元上最简单的插值就是线性插值。

设有三角形 $C=(A_1, A_2, A_3)$ ，顶点 $A_i$ 的坐标为 $(x_i, y_i)$ ，函数 $u(x, y)$ 在 $A_i$ 的值为 $u_i = u(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, 3$ 。要求作线性插值函数。

$$U(x, y) = ax + by + c$$

使得

$$U(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c = u_1,$$

$$U(x_2, y_2) = ax_2 + by_2 + c = u_2,$$

$$U(x_3, y_3) = ax_3 + by_3 + c = u_3.$$

为了方便，在这里以及本文以后各节中采用下列统一的记号

$$\xi_1 = x_2 - x_3, \quad \xi_2 = x_3 - x_1, \quad \xi_3 = x_1 - x_2,$$

$$\eta_1 = y_2 - y_3, \quad \eta_2 = y_3 - y_1, \quad \eta_3 = y_1 - y_2,$$

$$\omega_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad \omega_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad \omega_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 = \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3 = \omega_1 \omega_2 \omega_3, \quad (2.1)$$

$$D_0 = |D|, \quad \varepsilon = \text{sign} D = \begin{cases} 1, & \text{当 } D > 0, \\ -1, & \text{当 } D < 0. \end{cases}$$

顺便指出, 当  $A_1 A_2 A_3$  作逆时针向 (如图 3) 时  $D > 0$ , 作顺时针向时  $D < 0$ 。三角形  $C$  的面积 (恒正) 则为

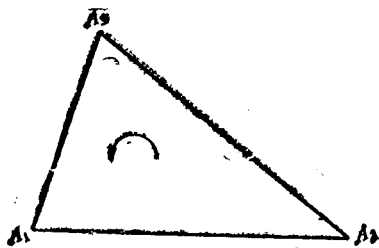


图 3

$$\iint_C dx dy = D_0 / 2. \quad (2.2)$$

由前列的方程组可以解出

$$a = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} u_1 & y_1 & 1 \\ u_2 & y_2 & 1 \\ u_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \eta_i u_i,$$

$$b = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_1 & u_1 & 1 \\ x_2 & u_2 & 1 \\ x_3 & u_3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \xi_i u_i, \quad c = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & u_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \omega_i u_i.$$

于是

$$U(x, y) = \frac{1}{D} \left( x \sum_{i=1}^3 \eta_i u_i - y \sum_{i=1}^3 \xi_i u_i + \sum_{i=1}^3 \omega_i u_i \right),$$

为了方便, 命

$$\lambda_i(x, y) = (\eta_i x - \xi_i y + \omega_i) / D, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

于是, 以顶点值  $u_1, u_2, u_3$  为基础的线性插值函数可以表为线性组合的形式

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_i \lambda_i(x, y). \quad (2.4)$$

函数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  可以称为三角形上线性插值的基函数, 它们本身也都是线性函数并满足

$$\lambda_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad (2.5)$$

顺便指出, 当被插函数  $u(x, y)$  自己是线性函数时, 它的三顶点线性插值是准确的, 即  $u(x, y) \equiv U(x, y)$ 。因此, 依次取  $u(x, y)$  为  $1, x, y$  时即得恒等式:

$$1 \equiv \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (2.6)$$

$$x \equiv x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + x_3 \lambda_3, \quad (2.7)$$

$$y \equiv y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 + y_3 \lambda_3. \quad (2.8)$$

基函数  $\lambda_i$  是线性的, 它们的偏导数是常数:

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda_i(x, y) = \eta_i / D, \quad \frac{\partial}{\partial y} \lambda_i(x, y) = -\xi_i / D \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \eta_i u_i / D, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = - \sum_{i=1}^3 \xi_i u_i / D.$$

在有限元方法中要用到基函数 $\lambda_i$ 及其导数的乘积的积分。根据积分公式

$$\iint_c \lambda_1^{P_1} \lambda_2^{P_2} \lambda_3^{P_3} dx dy = P_1! P_2! P_3! D_0 / (P_1 + P_2 + P_3 + 2)! \quad (2.10)$$

(见§2.4)以及(2.8)可以得出下列积分表

表 1  $\iint_c \psi dx dy$

$\psi$	1	$\lambda_i$	$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$	$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$
1	$D_0/2$			
$\lambda_i$	$D_0/6$	$D_0(1+\delta_{ij})/24$		
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$	$\varepsilon \eta_i/2$	$\varepsilon \eta_i/6$	$\eta_i \eta_j / 2D_0$	
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$	$-\varepsilon \xi_i/2$	$-\varepsilon \xi_i/6$	$-\xi_i \eta_j / 2D_0$	$\xi_i \xi_j / 2D_0$

有时,例如对于轴对称问题(§4),须要用到如 $\iint \dots x dx dy$ 形式的积分。命

$$x_0 = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3), \quad (2.11)$$

类似地可得积分表

表 2  $\iint_c \psi x dx dy$

$\psi$	1	$\lambda_i$	$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$	$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$
1	$x_0 D_0 / 2$			
$\lambda_i$	$(3x_0 + x_i) D_0 / 24$	$(3x_0 + x_i + x_j) D_0 (1 + \delta_{ij}) / 120$		
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$	$\varepsilon \eta_i x_0 / 2$	$\varepsilon \eta_i (3x_0 + x_j) / 24$	$\eta_i \eta_j x_0 / 2D_0$	
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$	$-\varepsilon \xi_i x_0 / 2$	$-\varepsilon \xi_i (3x_0 + x_j) / 24$	$-\xi_i \eta_j x_0 / 2D_0$	$\xi_i \xi_j x_0 / 2D_0$

### 2.3 线元上的线性插值

取三角面元 $C=(A_1 A_2 A_3)$ 的任意一边,例如 $B=(A_1 A_2)$ ,命 $s$ 为自 $A_1$ 至 $A_2$ 的弦长变量。 $C$ 上的函数 $u(x, y)$ 及其插值函数 $U(x, y)$ ,  $\lambda_i(x, y)$ 在 $B$ 上的值记为 $u(s)$ ,  $U(s)$ ,  $\lambda_i(s)$ 。由于 $\lambda_3$ 在 $A_3$ 的对边即 $B=(A_1 A_2)$ 上恒为0,故有

$$U(s) = \sum_{i=1}^2 u_i \lambda_i(s). \quad (2.12)$$

这表明在 $B$ 上 $U(s)$ 就是用两端点的值 $u_1, u_2$ 产生的线性插值。因此,面元 $C$ 的三顶点线性插

值在其任一边B上的结果与在B上独立地作两顶点线性插值是协调一致的。

命L为线元B的长度即

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (2.13)$$

显然有

$$\lambda_1(s) = 1 - s/L, \quad \lambda_2(s) = s/L, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial s} = -1/L, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} = 1/L, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial s} = (-1)^i/L, \quad i=1, 2. \quad (2.15)$$

与面元上的公式(2.5-8), (2.10)类似, 在线元上也有公式

$$\lambda_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad i=1, 2 \quad (2.16)$$

$$1 \equiv \lambda_1 + \lambda_2, \quad (2.17)$$

$$x \equiv x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2, \quad y \equiv y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2, \quad (2.18)$$

$$\int_B \lambda_1^{p_1} \lambda_2^{p_2} ds = p_1! p_2! L / (p_1 + p_2 + 1)!, \quad (2.19)$$

由此, 并命

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad (2.20)$$

可以得下列两个积分表备用

表 3  $\int_B \varphi \psi ds$

$\varphi \backslash \psi$	1	$\lambda_j$	$\frac{\partial \lambda_j}{\partial s}$
1	L		
$\lambda_i$	L/2	$L(1 + \delta_{ij})/6$	
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s}$	$(-1)^i$	$(-1)^i/2$	$(-1)^{i+j}/L$

表 4  $\int_B \varphi \psi x ds$

$\varphi \backslash \psi$	1	$\lambda_j$	$\frac{\partial \lambda_j}{\partial s}$
1	$x_0 L$		
$\lambda_i$	$(2x_0 + x_i)L/6$	$(x_0 + x_i \delta_{ij})L/6$	
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s}$	$(-1)^i x_0$	$(-1)^i (2x_0 + x_j)/6$	$(-1)^{i+j} x_0/L$

总结起来, 对于 $\Omega$ 上的函数 $u(x, y)$ , 按照三角剖分, 分别在每个面元作三顶点的线性插值, 它们在面元的公共边及公共顶点上取相同的值。因此拼起来得到在 $\Omega$ 上的分片线性插值函数 $U(x, y)$ , 它由 $u(x, y)$ 在各顶点的值 $u_1, \dots, u_{N_0}$ 决定。 $U(x, y)$ 在每个单元(面、线、点元)上就是有关顶点的线性插值。 $U(x, y)$ 在 $\Omega$ 上整体地是连续函数, 但一阶导数有间断。

## 2.4 重心坐标

在三角形 $C=(A_1 A_2 A_3)$ 上进行插值和微积分运算时, 线性基函数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 占很重要的地位。任给一点P的直角坐标 $(x, y)$ , 用公式(2.3)可以算出相应的 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 。 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中只有两个是独立的, 它们恒有关系式(2.6)。

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

反之, 给了满足这一恒等式的 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 则用公式(2.7) (2.8)可以算出相应的 $(x, y)$ 。因此 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 和 $(x, y)$ 一样可以作为坐标, 通常叫做重心坐标。这是因为, 任



取三个质量 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 其和为1, 分别放在顶点 $A_1, A_2, A_3$ 上; 这个质量系统的重心 $P=(x, y)$  应该是

$$x = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

$$y = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3) / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3.$$

这就是公式(2.7—8)。类似地, 对于线元 $B=(A_1 A_2)$ , 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 的 $(\lambda_1, \lambda_2)$  和弦长 $s$ 一样也可以作为坐标, 这是线元重心坐标, 见(2.14), (2.18)。

在面元上, 重心坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  也叫做面积坐标。事实上, 设 $P=(x, y)$  位于三角形 $A_1 A_2 A_3$ 之内, 并设 $A_1 A_2 A_3$ 作逆时针向, 于是 $PA_2 A_3, PA_3 A_1, PA_1 A_2$ 也都作逆时针向(图4), 并有面积公式

$$S = \Delta A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} D,$$

$$S_1 = \Delta P A_2 A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\eta_1 x - \xi_1 y + \omega_1) = \lambda_1 S,$$

$$S_2 = \Delta P A_3 A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\eta_2 x - \xi_2 y + \omega_2) = \lambda_2 S,$$

$$S_3 = \Delta P A_1 A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\eta_3 x - \xi_3 y + \omega_3) = \lambda_3 S,$$

因此, 对应于 $P=(x, y)$  的 $\lambda_i$  就是面积比 $S_i/S, i=1, 2, 3$ 。

当点 $P=(x, y)$  在三角形 $C$ 上变时, 相应的重心坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  的变化范围是

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \quad (2.21)$$

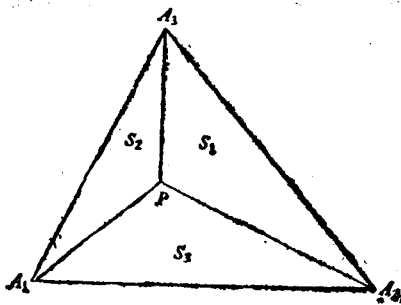


图 4

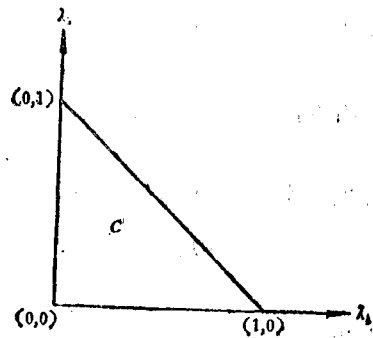


图 5

显然可见, 在 $A_i$ 的对边上 $\lambda_i = 0, i=1, 2, 3$ 。三个顶点 $A_1, A_2, A_3$  的重心坐标是 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 。

设 $\lambda_1, \lambda_2$ 为独立变量,  $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ , 于是(2.3)把 $xy$ 平面的三角形 $C = (A_1 A_2 A_3)$ 变为 $\lambda_1, \lambda_2$ 平面上的三角形 $C'$ (图5),

$$C': \quad 0 \leq \lambda_2 \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1 - \lambda_2.$$

这个变换的导数行列式就是

$$\frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(x, y)} \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} \eta_1 - \xi_1 \\ \eta_2 - \xi_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} = D$$

这样, 在三角形 $C$ 上求积分可以利用重心坐标变换到三角形 $C'$ 上求积分, 这是比较方便的, 特别当被积函数本身已用重心坐标表示的时候:

$$\begin{aligned} \iint_C F(\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y), \lambda_3(x, y)) dx dy &= \iint_{C'} F(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_1 - \lambda_2) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right| d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= D_0 \int_0^1 d\lambda_2 \int_0^{1-\lambda_2} F(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 \end{aligned}$$

由此并利用尤拉积分公式

$$\int_0^1 s^m (1-s)^n ds = m! n! / (m+n+1)!$$

就可以导出公式(2.10)。

三角形上的数值积分也可以用重心坐标来表示, 其一般形式为

$$\iint_C F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) dx dy = \frac{D_0}{2} \sum_{k=1}^m \rho^{(k)} F(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_3^{(k)}), \quad (2.22)$$

$D_0/2$ 是三角形 $C$ 的面积,  $(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_3^{(k)})$ 是一组特定的节点, 用重心坐标表示,  $\rho^{(k)}$ 是相应的权数,  $k=1, \dots, m$ 。列举几种常用的公式于表5, 其中精度次数 $n$ 是指该公式对于 $n$ 次多项式为准确的。

在线元 $B = (A_1 A_2)$ 有一个弦长坐标 $s$ (自 $A_1$ 指向 $A_2$ )和两个重心坐标 $(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , 见(2.14)。 $(\lambda_1, \lambda_2)$ 也可以解释为长度坐标,  $\lambda_i$ 就是长度比 $\overline{PA_j} / \overline{A_1 A_2}$ ,  $i \neq j$ 。当点 $P$ 在 $B$ 上变化时, 相应的重心坐标 $(\lambda_1, \lambda_2)$ 的变化范围是

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

显然可见,  $A_1, A_2$ 的重心坐标是 $(1, 0), (0, 1)$ 。取 $\lambda_1$ 为独立变量,  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ ,

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = -\frac{1}{L}, \quad \frac{ds}{d\lambda_1} = -L, \quad \left| \frac{ds}{d\lambda_1} \right| = L,$$

于是有积分公式

$$\int_B F(\lambda_1(s), \lambda_2(s)) ds = \int_0^1 F(\lambda_1, 1 - \lambda_1) \left| \frac{ds}{d\lambda_1} \right| d\lambda_1 = L \int_0^1 F(\lambda_1, 1 - \lambda_1) d\lambda_1,$$

据此以及尤拉积分公式就可以得到(2.20)。