高职高专推荐教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

狄成恩 主编

中国科学技术大学出版社

内 容 提 要

本书以教育部最新颁发的全国成人高等教育《高等数学教学基本要求》为依据，充分考虑高职高专院校“高等数学”教学的特点，由长期从事高职高专“高等数学”教学的教师，结合自己多年在教学实践中的经验编写而成.

本书叙述比较详细，语言力求准确，文字通俗易懂，既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性.

全书共 11 章，包括一元函数微积分、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分、无穷级数和傅立叶级数等内容，书末附有习题答案. 对于书中标有“*”号的内容，可根据不同专业、不同要求进行选用.

本书可作为高等职业技术学院、工科类职工大学、高等学业证书班、函授学院和成人教育学院的“高等数学”教材，也可供有关工程技术人员自学时参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/狄成恩主编. —合肥:中国科学技术大学出版社，2004.8
(高职高专推荐教材)
ISBN 7-312-01688-X

Ⅰ. 高… Ⅱ. 狄… Ⅲ. 高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 068623 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，230026)
合肥学苑印务有限公司印刷
全国新华书店经销

开本：787×1092/16　印张：27　字数：674 千
2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—4000 册
ISBN 7-312-01688-X/O·291　定价：38.00 元

前　　言

本书以教育部最新颁发的全国成人高等教育《高等数学教学基本要求》为依据，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，充分考虑高职高专院校“高等数学”教学的特点，由长期从事高职高专“高等数学”教学的教师，结合自己多年在教学实践中的经验编写而成. 本书具有以下特点：

(1) 叙述比较详细，语言力求准确，文字通俗易懂.

(2) 对于重要的概念，尽量从实际问题引出，着重揭示概念的背景，阐述其来龙去脉，力求使读者掌握概念的实质.

(3) 着重于数学方法的介绍，加强了基本运算方法的训练和能力的培养，对于复杂的运算不作过高的要求.

(4) 对一些重要的定理和公式的证明，尽量结合几何直观给予说明，不过分追求理论证明的严密性.

(5) 对读者在学习过程中易于混淆、易于误解、易于出错之处，采用“注”或“注意”的形式予以指出.

(6) 书中选有较多的例题和习题，对例题的讲解着重思路分析和解题规律的总结；书末附有习题答案.

因此，本书深入浅出，通俗易懂，既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性.

全书共 11 章，包括函数与极限、导数、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和傅立叶级数等内容. 对于书中标有“*”号的内容，可根据不同专业、不同要求进行选用.

本教材由狄成恩主编，并负责统稿工作. 参加本书编写的有：狄成恩(第 1 章、第 2 章、第 3 章和附录 B)、段玉珍(第 8 章和第 10 章)、臧永翠(第 4 章、第 5 章和附录 A)、朱广斌(第 9 章和第 11 章)、方利宝(第 6 章和第 7 章)，徐兵、丛山、高继文等也做了许多有益的工作.

本书可作为高等职业技术学院、工科类职工大学、高等学业证书班、函授学院和成人教育学院的“高等数学”教材，也可供有关工程技术人员自学时参考.

在本书编写过程中，安徽电气工程职业技术学院的领导给予了大力支持，并为本书的出版发行提供了条件. 教育部全国高等学校工科数学课程教学指导委员会委员、《工科数学》主编

苏化明教授和《工科数学》副主编潘杰副教授认真审阅了书稿，并提出了许多宝贵的改进意见，在此我们一并表示衷心的感谢.

限于编者的水平，书中一定存在不妥或错误之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2004 年 6 月

目　　次

第1章 函数与极限

初等数学研究的对象主要是常量，而高等数学则是以变量为其研究的主要对象. 反映变量之间相互依赖关系的各种函数是高等数学中最重要的基本概念之一，研究变量变化趋势的极限方法则是高等数学中的一种基本方法. 本章将在初等数学关于函数概念的基础上进一步讨论函数，介绍极限和函数的连续性等概念以及它们的基本性质，重点讨论计算极限的基本方法.

1.1 集合与区间

1.1.1 集合与集合的运算

1. 集合的概念

集合是数学中一个原始的概念，它像平面几何中的点、线、面概念一样，不能用更简单的概念来定义它，只能给出它的一种描述. 比如，一个班级的全体同学构成的集合，某工厂生产的一批产品构成的集合，全体实数构成的集合，等等.

一般地说，凡具有某种特定性质的对象所组成的总体称为**集合**(简称为**集**)，常用大写字母 $A,B,C,D,\cdots$ 表示集合. 集合中的对象称为该集合的**元素**，常用小写字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示元素. 若对象 a 是集合 A 的一个元素，则记为 $a\in A$(读作 a 属于 A)；若对象 a 不是集合 A 的元素，则记为 $a\overline{\in}A$ 或 $a\notin A$(读作 a 不属于 A)，二者必居其一.

注 二者必居其一是指，给定了一个集合 A，就是给出了一个判别法则，根据这个法则，对任何事物 a 都能判别 $a\in A$ 及 $a\overline{\in}A$ 究竟哪一个成立.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内的解集就是一个空集.

只包含一个元素的集合叫**单元素集**. 例如，方程 $x+1=1$ 的解集 $\{0\}$ 就是单元素集.

有以下两点请读者注意：

(1) 空集 $\varnothing$ 与集合 $\{0\}$ 是两个完全不同的集合. 空集 $\varnothing$ 中没有任何元素，集合 $\{0\}$ 中只含有元素 0.

(2) 单元素集$\{a\}$与单个元素 a 是两个不同的概念．前者是指由一个元素 a 组成的集合，而后者则是指某个集合中含有元素 a.

由有限多个元素组成的集合称为**有限集**，可用列举法写出它的全体元素．例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

由 0,1,2,3 这 4 个数组成的集合 S，可记作

$$S=\{0,1,2,3\}.$$

由无穷多个元素组成的集合称为**无限集**，常用符号

$$A=\{元素符号|元素所具有的性质\}$$

即

$$A=\{x|x\ 所具有的性质\}$$

来表示，这种表示法称为描述法．例如：

(1) $R=\{x|x\ 为实数\}$表示实数集；

(2) $Z=\{x|x\ 为整数\}$表示整数集；

(3) $Q=\{x|x=\dfrac{q}{p};p\neq 0,q,p\ 为实数\}$表示有理数集；

(4) $N=\{x|x\ 为正整数\}$表示自然数集；

(5) $M=\{(x,y)|x,y\ 为实数，且\ x^2+y^2=1\}$表示 Oxy 平面上以原点为圆心、以 1 为半径的圆周上的点的全体所组成的集合．

2. 集合之间的关系

若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素，即对于 $x\in A$ 必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，或者说 B **包含** A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

在前面的例子中，显然有 $Z\subset R,Q\subset R,N\subset R$；但 $N\subset Z,Z\subset Q$.

我们**规定**：空集$\varnothing$是任何集合的子集；任何集合 A 包含它自身，即 $A\subset A$.

设有两个集合 A 与 B，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$.

例如，设 $A=\{x|x\ 为大于\ 1\ 小于\ 4\ 的整数\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，则 $A=B$.

3. 集合的运算

设有集合 A 与 B，则由 A 与 B 的全体元素所构成的新集合称为 A 与 B 的**并集(或和集)**，记作 $A\cup B$，如图 1.1 所示．即

$$A\cup B=\{x|x\in A\ 或\ x\in B\}.$$

设有集合 A 与 B，则由 A 与 B 的所有公共元素所构成的新集合称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$(或 AB)，如图 1.2 所示．即

$$A\cap B=\{x|x\in A\ 且\ x\in B\}.$$

例 1 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\},$$
$$A\cap B=\{3,4\}.$$

例 2 设 $A=\{x|(x-1)(x+2)=0\}$，$B=\{x|x^2-4=0\}$，求 $A\cup B$ 及 $A\cap B$.

解 因为

$$A=\{x\mid(x-1)(x+2)=0\}=\{1,-2\},$$
$$B=\{x\mid x^2-4=0\}=\{-2,2\},$$

所以

$$A\cup B=\{-2,1,2\},$$
$$A\cap B=\{-2\}.$$

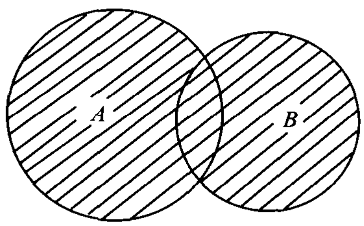


图 1.1　$A\cup B$

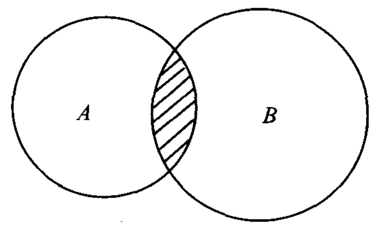


图 1.2　$A\cap B$

例 3 设 $A=\{x\mid x$ 为 10 的正约数$\}$,$B=\{x\mid x$ 为 18 的正约数$\}$,$C=\{x\mid x$ 为不大于 6 的自然数$\}$,求 $A\cup B\cup C$ 及 $A\cap B\cap C$.

解 由题设可知

$$A=\{1,2,5,10\},$$
$$B=\{1,2,3,6,9,18\},$$
$$C=\{1,2,3,4,5,6\},$$

因此

$$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,9,10,18\},$$
$$A\cap B\cap C=\{1,2\}.$$

如果集合 A 与 B 没有公共元素,即 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B **互不相交**. 比如,A 为奇数集,B 为偶数集,显然有 $A\cap B=\varnothing$,因此集合 A 与 B 互不相交.

设有集合 A 与 B,则属于 A 但不属于 B 的全体元素所构成的新集合称为 A 与 B 的**差集**,记作 $A-B$,如图 1.3 所示. 即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\overline{\in} B\}.$$

例如,设 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{2,4,6,8\}$,则 $A-B=\{1,3,5\}$.

如果在所讨论的问题中,所考察的集合都是一个“大”集合 U 的子集,则称 U 为**全集**(或**基本集**). 全集 U 与它的某个子集 A 的差称为集合 A 的**补集**,记作 $\overline{A}$,如图 1.4 所示.

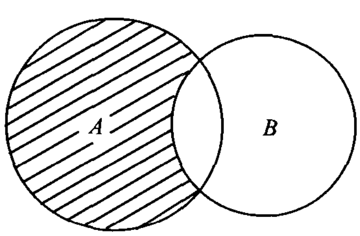


图 1.3　$A-B$

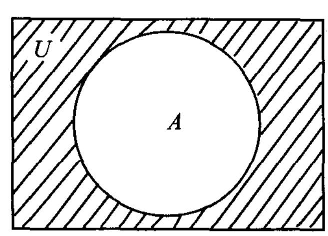


图 1.4　$\overline{A}=U-A$

以下结论是显然成立的:

1° $A\cup U=U$, $A\cap U=A$;

2° $A\cup\overline{A}=U$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$;

3° $\overline{U}=\varnothing$, $\overline{\varnothing}=U$, $\overline{\overline{A}}=A$;

4° $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (De Morgen 律).

最后需要指出的是，在高等数学中所遇到的集合主要是实数集. 如果没有特别声明，以后所提到的数都是实数.

1.1.2 绝对值

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0;\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

在数轴上，$|a|$ 表示点 a(不论点 a 在原点的左边还是右边)与原点 O 的距离，如图 1.5 所示.

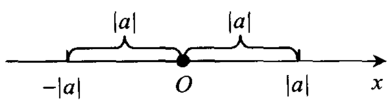


图 1.5

由绝对值的定义，可得绝对值的下列性质：

(1) $|a|=\sqrt{a^2}$;

(2) $|a|=|-a|\geqslant 0$;

(3) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$;

(4) $|a|\leqslant b$ 的充分必要条件是 $-b\leqslant a\leqslant b$;

(5) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$ (三角不等式);

(6) $|a-b|\geqslant |a|-|b|$;

(7) $|ab|=|a||b|$;

(8) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

带有绝对值的不等式常简称为**绝对值不等式**. 性质(4)表明，绝对值不等式 $|a|<r$ 与 $-r<a<r$ 是等价的. 在求函数的定义域时，经常需要去除绝对值符号，称为**解绝对值不等式**.

例 4 解绝对值不等式 $|x-2|<6$.

解 由性质(4)可知，绝对值不等式

$$|x-2|<6$$

与

$$-6<x-2<6$$

等价，故得到

$$2-6<x<2+6,$$

即

$$-4<x<8.$$

例 5 解绝对值不等式 $|2x-3|\geqslant 7$.

解 因为绝对值不等式

$$|2x-3|\geqslant 7$$

与

$$2x-3\geqslant 7 \text{ 或 } 2x-3\leqslant -7$$

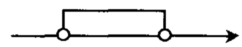
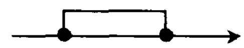
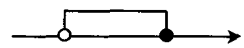
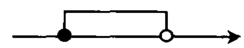
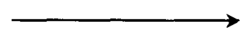
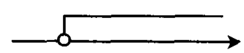
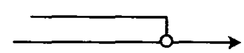
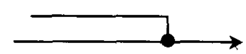
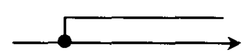
等价，所以有

$$x\geqslant 5 \text{ 或 } x\leqslant -2.$$

1.1.3 区间与邻域

在实数集中，今后用得最多的是各种区间，我们将各种区间的类型、记号、集合表示及数轴表示列示出来，见表 1.1.

表 1.1

类型	名　　称	记　　号	集合表示	数　轴　表　示
有限区间	开区间	(a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$	
	闭区间	$[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
	左开右闭区间	$(a,b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	
	左闭右开区间	$[a,b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	
无穷区间	开区间	$(-\infty,+\infty)$	$\{x\mid x\in R\}$	
	开区间	$(a,+\infty)$	$\{x\mid x>a\}$	
	开区间	$(-\infty,b)$	$\{x\mid x<b\}$	
	左开右闭区间	$(-\infty,b]$	$\{x\mid x\leqslant b\}$	
	左闭右开区间	$[a,+\infty)$	$\{x\mid x\geqslant a\}$	

在表 1.1 中，实数 a 与 b 叫做区间的**端点**，数 $b-a$ 叫做有限区间的**长度**. 从数轴上可以看出，有限区间的长度为有限的，无穷区间的长度为无限的. 数轴上的实点记号“•”表示该区间包含端点，空点记号“∘”表示该区间不包含端点.

符号“$+\infty$”(读作“正无穷大”)和“$-\infty$”(读作“负无穷大”)不是数，仅是一个记号.

以后还会经常遇到一种以点 x_0 为中心的特殊开区间，称为 x_0 的邻域. 确切地说，设 x_0 与 $\delta>0$ 是两个实数，则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $O(x_0,\delta)$. 即

$$O(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

点 x_0 叫做 $O(x_0,\delta)$ 的**中心**，δ 叫做 $O(x_0,\delta)$ 的**半径**，如图 1.6 所示.

在极限中用到的邻域还需要把邻域的中心去掉，称为 **x_0 的去心 δ 邻域**(如图 1.7 所示)，