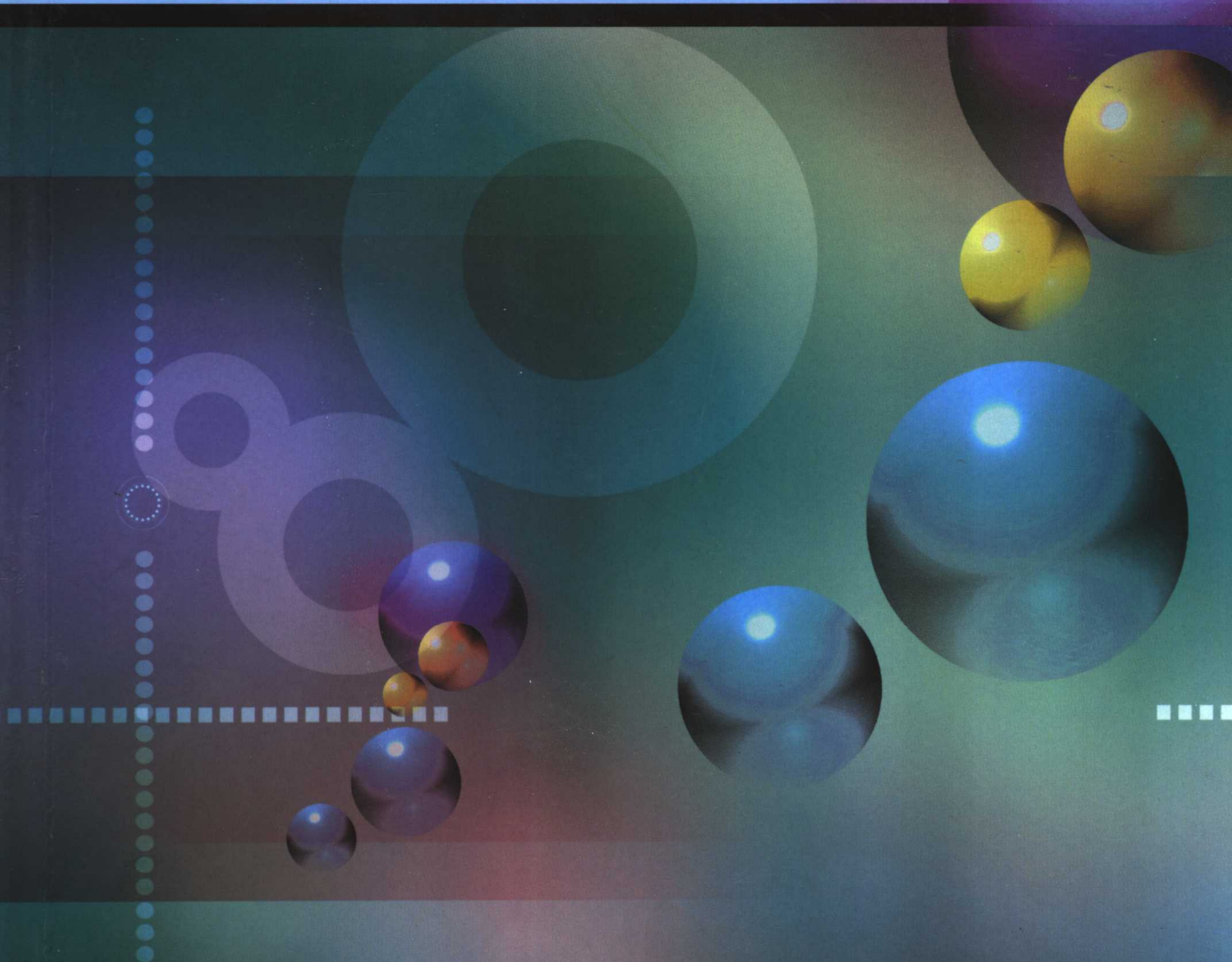


高职高专推荐教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

狄成恩 主编



中国科学技术大学出版社

内 容 提 要

本书以教育部最新颁发的全国成人高等教育《高等数学教学基本要求》为依据,充分考虑高职高专院校“高等数学”教学的特点,由长期从事高职高专“高等数学”教学的教师,结合自己多年在教学实践中的经验编写而成。

本书叙述比较详细,语言力求准确,文字通俗易懂,既突出了数学方法的介绍,又不失数学理论的系统性和科学性。

全书共 11 章,包括一元函数微积分、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分、无穷级数和傅立叶级数等内容,书末附有习题答案。对于书中标有“*”号的内容,可根据不同专业、不同要求进行选用。

本书可作为高等职业技术学院、工科类职工大学、高等学业证书班、函授学院和成人教育学院的“高等数学”教材,也可供有关工程技术人员自学时参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/狄成恩主编. —合肥:中国科学技术大学出版社,2004.8

(高职高专推荐教材)

ISBN 7-312-01688-X

I. 高… II. 狄… III. 高等数学—高等学校:技术学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 068623 号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)

合肥学苑印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本:787×1092/16 印张:27 字数:674 千

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—4000 册

ISBN 7-312-01688-X/O·291 定价:38.00 元

前 言

本书以教育部最新颁发的全国成人高等教育《高等数学教学基本要求》为依据,遵循“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,充分考虑高职高专院校“高等数学”教学的特点,由长期从事高职高专“高等数学”教学的教师,结合自己多年在教学实践中的经验编写而成. 本书具有以下特点:

- (1) 叙述比较详细,语言力求准确,文字通俗易懂.
- (2) 对于重要的概念,尽量从实际问题引出,着重揭示概念的背景,阐述其来龙去脉,力求使读者掌握概念的实质.
- (3) 着重于数学方法的介绍,加强了基本运算方法的训练和能力的培养,对于复杂的运算不作过高的要求.
- (4) 对一些重要的定理和公式的证明,尽量结合几何直观给予说明,不过分追求理论证明的严密性.
- (5) 对读者在学习过程中易于混淆、易于误解、易于出错之处,采用“注”或“注意”的形式予以指出.
- (6) 书中选有较多的例题和习题,对例题的讲解着重思路分析和解题规律的总结;书末附有习题答案.

因此,本书深入浅出,通俗易懂,既突出了数学方法的介绍,又不失数学理论的系统性和科学性.

全书共 11 章,包括函数与极限、导数、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和傅立叶级数等内容. 对于书中标有“*”号的内容,可根据不同专业、不同要求进行选用.

本教材由狄成恩主编,并负责统稿工作. 参加本书编写的有:狄成恩(第 1 章、第 2 章、第 3 章和附录 B)、段玉珍(第 8 章和第 10 章)、臧永翠(第 4 章、第 5 章和附录 A)、朱广斌(第 9 章和第 11 章)、方利宝(第 6 章和第 7 章),徐兵、丛山、高继文等也做了许多有益的工作.

本书可作为高等职业技术学院、工科类职工大学、高等学业证书班、函授学院和成人教育学院的“高等数学”教材,也可供有关工程技术人员自学时参考.

在本书编写过程中,安徽电气工程职业技术学院的领导给予了大力支持,并为本书的出版发行提供了条件. 教育部全国高等学校工科数学课程教学指导委员会委员、《工科数学》主编

苏化明教授和《工科数学》副主编潘杰副教授认真审阅了书稿,并提出了许多宝贵的改进意见,在此我们一并表示衷心的感谢.

限于编者的水平,书中一定存在不妥或错误之处,敬请广大读者批评指正.

编 者

2004 年 6 月

目 次

前言	(I)
第 1 章 函数与极限	(1)
1.1 集合与区间	(1)
1.1.1 集合与集合的运算	(1)
1.1.2 绝对值	(4)
1.1.3 区间与邻域	(5)
习题 1.1	(6)
1.2 函数	(7)
1.2.1 函数的概念	(7)
1.2.2 函数定义域的求法	(8)
1.2.3 分段函数	(10)
1.2.4 函数的几种特性	(11)
1.2.5 反函数	(14)
1.2.6 复合函数与初等函数	(15)
习题 1.2	(19)
1.3 极限的概念	(21)
1.3.1 数列的极限	(21)
1.3.2 函数的极限	(24)
习题 1.3	(27)
1.4 无穷小量与无穷大量	(28)
1.4.1 无穷小量	(28)
1.4.2 无穷大量	(29)
1.4.3 无穷小的比较	(29)
习题 1.4	(30)
1.5 极限的运算法则	(30)
1.5.1 极限的四则运算法则	(30)
1.5.2 复合函数的极限	(33)
习题 1.5	(34)
1.6 极限存在准则 两个重要极限	(35)
1.6.1 极限存在的两个准则	(35)

1.6.2 两个重要极限	(36)
习题 1.6	(39)
1.7 函数的连续性与间断点	(40)
1.7.1 函数的连续性	(40)
1.7.2 函数的间断点	(42)
1.7.3 初等函数的连续性	(43)
1.7.4 闭区间上连续函数的性质	(45)
习题 1.7	(46)
复习题 1	(47)
第 2 章 导数与微分	(51)
2.1 导数的概念	(51)
2.1.1 函数的变化率问题举例	(51)
2.1.2 导数的定义	(52)
2.1.3 用导数定义求导数举例	(53)
2.1.4 导数的几何意义	(56)
2.1.5 函数的可导性与连续性之间的关系	(57)
习题 2.1	(58)
2.2 求导数的基本法则	(59)
2.2.1 导数的四则运算法则	(59)
2.2.2 反函数的求导法则	(61)
2.2.3 复合函数的求导法则	(63)
习题 2.2	(66)
2.3 隐函数及参数方程所表示的函数的求导法	(68)
2.3.1 隐函数的求导法	(68)
2.3.2 对数求导法	(69)
2.3.3 由参数方程所表示的函数的求导法	(70)
习题 2.3	(72)
2.4 高阶导数	(72)
习题 2.4	(75)
2.5 函数的微分	(76)
2.5.1 微分的概念	(76)
2.5.2 微分的基本公式与运算法则	(79)
2.5.3 微分在近似计算中的应用	(81)
习题 2.5	(82)
复习题 2	(83)
第 3 章 中值定理与导数的应用	(86)
3.1 微分中值定理	(86)
3.1.1 洛尔定理	(86)
3.1.2 拉格朗日中值定理	(87)

3.1.3 柯西中值定理	(88)
习题 3.1	(89)
3.2 罗必塔法则	(89)
3.2.1 “ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型不定式的极限	(89)
3.2.2 其他不定式的极限	(92)
习题 3.2	(94)
3.3 函数的单调性与极值	(94)
3.3.1 函数单调性的判别法	(94)
3.3.2 函数的极值及其判别法	(96)
3.3.3 函数的最值及其应用	(99)
习题 3.3	(101)
3.4 曲线的凹凸与函数作图	(102)
3.4.1 曲线的凹凸与拐点	(102)
3.4.2 水平渐近线与垂直渐近线	(104)
3.4.3 函数图形的描绘	(105)
习题 3.4	(107)
* 3.5 曲率	(107)
3.5.1 曲率的概念	(107)
3.5.2 曲率的计算公式	(109)
3.5.3 曲率半径与曲率圆	(110)
* 习题 3.5	(111)
复习题 3	(112)
第 4 章 不定积分	(115)
4.1 原函数与不定积分	(115)
4.1.1 原函数与不定积分的概念	(115)
4.1.2 基本积分公式	(117)
4.1.3 不定积分的性质	(118)
习题 4.1	(120)
4.2 换元积分法	(121)
4.2.1 第一类换元积分法(凑微分法)	(121)
4.2.2 第二类换元积分法	(125)
4.2.3 基本积分公式的扩充	(128)
习题 4.2	(130)
4.3 分部积分法	(131)
习题 4.3	(134)
4.4 有理函数与三角函数有理式的积分举例	(135)
4.4.1 有理函数的积分举例	(135)
* 4.4.2 三角函数有理式的积分举例	(138)

习题 4.4	(139)
4.5 积分表的使用	(139)
习题 4.5	(141)
复习题 4	(142)
第 5 章 定积分及其应用	(145)
5.1 定积分的概念	(145)
5.1.1 预备知识——求和记号“ $\sum$ ”	(145)
5.1.2 定积分问题举例	(147)
5.1.3 定积分的定义	(148)
5.1.4 定积分的几何意义	(149)
5.1.5 定积分的性质	(151)
习题 5.1	(153)
5.2 微积分基本定理	(154)
5.2.1 积分上限函数	(154)
5.2.2 微积分基本定理	(155)
习题 5.2	(157)
5.3 定积分的积分法	(158)
5.3.1 定积分的换元积分法	(158)
5.3.2 定积分的分部积分法	(160)
习题 5.3	(162)
5.4 广义积分	(163)
5.4.1 无穷区间上的广义积分	(163)
5.4.2 无界函数的广义积分	(165)
习题 5.4	(167)
5.5 定积分的几何应用	(167)
5.5.1 定积分的微元法	(167)
5.5.2 平面图形的面积	(168)
5.5.3 体积	(171)
习题 5.5	(174)
5.6 定积分的物理应用	(175)
5.6.1 变力沿直线所作的功	(175)
5.6.2 液体的压力	(176)
5.6.3 平均值	(178)
习题 5.6	(180)
复习题 5	(181)
第 6 章 常微分方程	(184)
6.1 常微分方程的基本概念	(184)
习题 6.1	(186)
6.2 一阶微分方程	(187)

6.2.1	可分离变量的微分方程	(187)
6.2.2	一阶线性微分方程	(190)
6.2.3	一阶微分方程应用举例	(193)
习题 6.2		(196)
6.3	二阶常系数线性微分方程	(197)
6.3.1	二阶常系数齐次线性微分方程	(198)
6.3.2	二阶常系数非齐次线性微分方程	(201)
6.3.3	二阶常系数线性微分方程应用举例	(207)
习题 6.3		(210)
* 6.4	可降阶的高阶微分方程	(211)
6.4.1	$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	(211)
6.4.2	$y''=f(x, y')$ 型的微分方程	(212)
6.4.3	$y''=f(y, y')$ 型的微分方程	(213)
* 习题 6.4		(214)
复习题 6		(214)
第 7 章	向量代数与空间解析几何	(216)
7.1	空间直角坐标系	(216)
7.1.1	空间直角坐标系	(216)
7.1.2	空间点的坐标	(217)
7.1.3	空间两点间的距离公式	(217)
习题 7.1		(218)
7.2	向量的概念及几何运算	(218)
7.2.1	向量的概念	(218)
7.2.2	向量的加减运算	(219)
7.2.3	数与向量的乘法	(220)
习题 7.2		(220)
7.3	向量代数	(220)
7.3.1	向量的坐标表示式	(220)
7.3.2	向量线性运算的坐标表示式	(221)
7.3.3	向量的模与方向余弦的坐标表示式	(222)
7.3.4	两向量的数量积	(224)
7.3.5	两向量的向量积	(227)
* 7.3.6	三向量的混合积	(230)
习题 7.3		(231)
7.4	平面与空间直线	(232)
7.4.1	平面方程	(233)
7.4.2	空间直线方程	(235)
* 7.4.3	位置关系	(237)
习题 7.4		(240)

7.5 曲面与空间曲线	(241)
7.5.1 曲面方程和空间曲线方程的概念	(241)
7.5.2 几种常见的曲面及其方程	(242)
7.5.3 二次曲面	(245)
习题 7.5	(247)
复习题 7	(248)
第 8 章 多元函数的微分法及其应用	(250)
8.1 多元函数	(250)
8.1.1 多元函数的概念	(250)
8.1.2 二元函数的极限与连续性	(253)
习题 8.1	(254)
8.2 偏导数	(255)
8.2.1 偏导数的概念	(255)
8.2.2 高阶偏导数	(259)
习题 8.2	(261)
8.3 全微分	(261)
习题 8.3	(264)
8.4 多元复合函数的导数	(264)
8.4.1 多元复合函数的求导法则	(264)
8.4.2 隐函数的求导法则	(268)
习题 8.4	(270)
8.5 偏导数的几何应用	(271)
8.5.1 空间曲线的切线与法平面	(271)
8.5.2 曲面的切平面与法线	(273)
习题 8.5	(275)
8.6 多元函数的极值及其求法	(276)
8.6.1 多元函数的极值与最大值、最小值	(276)
* 8.6.2 条件极值	(278)
习题 8.6	(280)
复习题 8	(280)
第 9 章 多元函数的积分	(282)
9.1 二重积分	(282)
9.1.1 二重积分的概念	(282)
9.1.2 二重积分的性质	(284)
9.1.3 二重积分的计算方法	(285)
9.1.4 二重积分的应用举例	(293)
习题 9.1	(298)
* 9.2 三重积分	(300)
9.2.1 三重积分的概念	(300)

9.2.2	三重积分的计算方法	(301)
*	习题 9.2	(305)
9.3	曲线积分	(306)
9.3.1	对坐标的曲线积分的概念	(306)
9.3.2	对坐标的曲线积分的性质	(307)
9.3.3	对坐标的曲线积分的计算方法	(308)
9.3.4	格林公式	(311)
9.3.5	平面上曲线积分与路径无关的条件	(314)
	习题 9.3	(318)
* 9.4	曲面积分	(319)
9.4.1	对坐标的曲面积分的概念	(319)
9.4.2	对坐标的曲面积分的性质	(322)
9.4.3	对坐标的曲面积分的计算方法	(322)
9.4.4	高斯公式	(324)
*	习题 9.4	(325)
	复习题 9	(326)
第 10 章	无穷级数	(330)
10.1	数项级数的概念	(330)
10.1.1	数项级数的基本概念	(330)
10.1.2	数项级数的性质	(332)
10.1.3	级数收敛的必要条件	(332)
	习题 10.1	(334)
10.2	数项级数的审敛法	(334)
10.2.1	正项级数及其审敛法	(334)
10.2.2	任意项级数	(337)
	习题 10.2	(339)
10.3	幂级数	(340)
10.3.1	幂级数及其收敛性	(340)
10.3.2	幂级数的性质	(343)
	习题 10.3	(345)
10.4	函数展开成幂级数	(345)
10.4.1	泰勒公式	(345)
10.4.2	泰勒级数	(346)
10.4.3	函数展开成幂级数	(347)
	习题 10.4	(350)
	复习题 10	(350)
第 11 章	傅立叶级数	(353)
11.1	傅立叶级数	(353)
11.1.1	三角函数系及其正交性	(353)

11.1.2 以 2π 为周期的函数展开成傅立叶级数	(353)
习题 11.1	(356)
11.2 正弦级数和余弦级数	(357)
11.2.1 奇、偶函数的傅立叶级数	(357)
11.2.2 定义在 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, \pi]$ 上的函数展开成傅立叶级数	(359)
习题 11.2	(361)
11.3 以 $2l$ 为周期的函数展开成傅立叶级数	(362)
习题 11.3	(363)
* 11.4 傅立叶级数的复数形式	(363)
* 习题 11.4	(365)
复习题 11	(365)
附录 A 初等数学的重要数学公式	(367)
A.1 代数中的有关公式	(367)
A.2 几何学中的常用公式	(368)
A.3 平面三角公式	(369)
附录 B 关于极限的精确定义	(371)
B.1 数列极限的“ $\epsilon-N$ ”定义	(371)
B.2 函数极限的“ $\epsilon-X$ ”定义	(373)
B.3 函数极限的“ $\epsilon-\delta$ ”定义	(373)
复习题 B	(375)
附录 C 积分表	(376)
附录 D 习题参考答案	(385)

第 1 章 函数与极限

初等数学研究的对象主要是常量,而高等数学则是以变量为其研究的主要对象.反映变量之间相互依赖关系的各种函数是高等数学中最重要的基本概念之一,研究变量变化趋势的极限方法则是高等数学中的一种基本方法.本章将在初等数学关于函数概念的基础上进一步讨论函数,介绍极限和函数的连续性等概念以及它们的基本性质,重点讨论计算极限的基本方法.

1.1 集合与区间

1.1.1 集合与集合的运算

1. 集合的概念

集合是数学中一个原始的概念,它像平面几何中的点、线、面概念一样,不能用更简单的概念来定义它,只能给出它的一种描述.比如,一个班级的全体同学构成的集合,某工厂生产的一批产品构成的集合,全体实数构成的集合,等等.

一般地说,凡具有某种特定性质的对象所组成的总体称为集合(简称为集),常用大写字母 $A, B, C, D, \dots$ 表示集合.集合中的对象称为该集合的元素,常用小写字母 $a, b, c, d, \dots$ 表示元素.若对象 a 是集合 A 的一个元素,则记为 $a \in A$ (读作 a 属于 A);若对象 a 不是集合 A 的元素,则记为 $a \notin A$ 或 $a \notin A$ (读作 a 不属于 A),二者必居其一.

注 二者必居其一是指,给定了一个集合 A ,就是给出了一个判别法则,根据这个法则,对任何事物 a 都能判别 $a \in A$ 及 $a \notin A$ 究竟哪一个成立.

不包含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.例如,方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内的解集就是一个空集.

只包含一个元素的集合叫单元素集.例如,方程 $x + 1 = 1$ 的解集 $\{0\}$ 就是单元素集.

有以下两点请读者注意:

(1) 空集 $\emptyset$ 与集合 $\{0\}$ 是两个完全不同的集合.空集 $\emptyset$ 中没有任何元素,集合 $\{0\}$ 中只含有元素 0.

(2) 单元素集 $\{a\}$ 与单个元素 a 是两个不同的概念. 前者是指由一个元素 a 组成的集合, 而后者则是指某个集合中含有元素 a .

由有限多个元素组成的集合称为**有限集**, 可用列举法写出它的全体元素. 例如, 由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A , 可记作

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

由 $0, 1, 2, 3$ 这4个数组成的集合 S , 可记作

$$S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

由无穷多个元素组成的集合称为**无限集**, 常用符号

$$A = \{\text{元素符号} \mid \text{元素所具有的性质}\}$$

即

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的性质}\}$$

来表示, 这种表示法称为描述法. 例如:

(1) $R = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$ 表示实数集;

(2) $Z = \{x \mid x \text{ 为整数}\}$ 表示整数集;

(3) $Q = \{x \mid x = \frac{q}{p}; p \neq 0, q, p \text{ 为实数}\}$ 表示有理数集;

(4) $N = \{x \mid x \text{ 为正整数}\}$ 表示自然数集;

(5) $M = \{(x, y) \mid x, y \text{ 为实数, 且 } x^2 + y^2 = 1\}$ 表示 Oxy 平面上以原点为圆心、以1为半径的圆周上的点的全体所组成的集合.

2. 集合之间的关系

若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素, 即对于 $x \in A$ 必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的**子集**, 或者说 B 包含 A , 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

在前面的例子中, 显然有 $Z \subset R, Q \subset R, N \subset R$; 但 $N \subset Z, Z \subset Q$.

我们规定: 空集 $\emptyset$ 是任何集合的子集; 任何集合 A 包含它自身, 即 $A \subset A$.

设有两个集合 A 与 B , 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B **相等**, 记作 $A = B$.

例如, 设 $A = \{x \mid x \text{ 为大于1小于4的整数}\}, B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, 则 $A = B$.

3. 集合的运算

设有集合 A 与 B , 则由 A 与 B 的全体元素所构成的新集合称为 A 与 B 的**并集**(或**和集**), 记作 $A \cup B$, 如图1.1所示. 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

设有集合 A 与 B , 则由 A 与 B 的所有公共元素所构成的新集合称为 A 与 B 的**交集**, 记作 $A \cap B$ (或 AB), 如图1.2所示. 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

例1 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \cap B = \{3, 4\}.$$

例2 设 $A = \{x \mid (x-1)(x+2) = 0\}, B = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$, 求 $A \cup B$ 及 $A \cap B$.

解 因为

$$A = \{x | (x-1)(x+2) = 0\} = \{1, -2\},$$

$$B = \{x | x^2 - 4 = 0\} = \{-2, 2\},$$

所以

$$A \cup B = \{-2, 1, 2\},$$

$$A \cap B = \{-2\}.$$

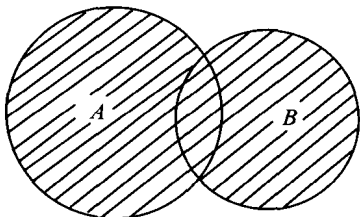


图 1.1 $A \cup B$

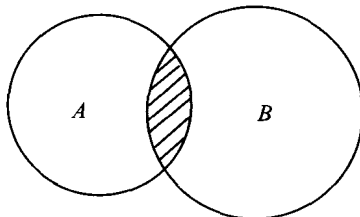


图 1.2 $A \cap B$

例 3 设 $A = \{x | x \text{ 为 } 10 \text{ 的正约数}\}$, $B = \{x | x \text{ 为 } 18 \text{ 的正约数}\}$, $C = \{x | x \text{ 为不大于 } 6 \text{ 的自然数}\}$, 求 $A \cup B \cup C$ 及 $A \cap B \cap C$.

解 由题设可知

$$A = \{1, 2, 5, 10\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\},$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

因此

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 18\},$$

$$A \cap B \cap C = \{1, 2\}.$$

如果集合 A 与 B 没有公共元素, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 互不相交. 比如, A 为奇数集, B 为偶数集, 显然有 $A \cap B = \emptyset$, 因此集合 A 与 B 互不相交.

设有集合 A 与 B , 则属于 A 但不属于 B 的全体元素所构成的新集合称为 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$, 如图 1.3 所示. 即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

例如, 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, 则 $A - B = \{1, 3, 5\}$.

如果在所讨论的问题中, 所考察的集合都是一个“大”集合 U 的子集, 则称 U 为全集(或基本集). 全集 U 与它的某个子集 A 的差称为集合 A 的补集, 记作 $\bar{A}$, 如图 1.4 所示.

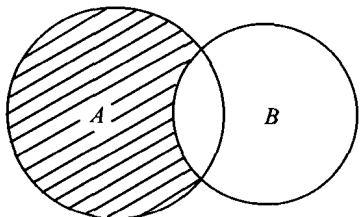


图 1.3 $A - B$

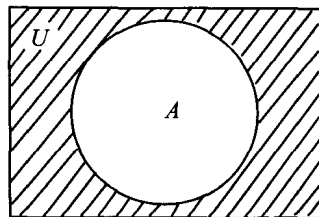


图 1.4 $\bar{A} = U - A$

以下结论是显然成立的:

- $1^\circ A \cup U = U, A \cap U = A;$
 $2^\circ A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \emptyset;$
 $3^\circ \bar{\bar{U}} = \emptyset, \bar{\emptyset} = U, \bar{\bar{A}} = A;$
 $4^\circ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (De Morgen 律).

最后需要指出的是,在高等数学中所遇到的集合主要是实数集. 如果没有特别声明,以后所提到的数都是实数.

1.1.2 绝对值

实数 a 的绝对值定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

在数轴上, $|a|$ 表示点 a (不论点 a 在原点的左边还是右边) 与原点 O 的距离, 如图 1.5 所示.

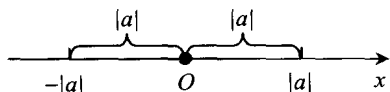


图 1.5

由绝对值的定义, 可得绝对值的下列性质:

- (1) $|a| = \sqrt{a^2};$
- (2) $|a| = |-a| \geq 0;$
- (3) $-|a| \leq a \leq |a|;$
- (4) $|a| \leq b$ 的充分必要条件是一 $b \leq a \leq b;$
- (5) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (三角不等式);
- (6) $|a-b| \geq |a| - |b|;$
- (7) $|ab| = |a| |b|;$
- (8) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$

带有绝对值的不等式常简称为**绝对值不等式**. 性质(4)表明, 绝对值不等式 $|a| < r$ 与 $-r < a < r$ 是等价的. 在求函数的定义域时, 经常需要去除绝对值符号, 称为**解绝对值不等式**.

例 4 解绝对值不等式 $|x-2| < 6$.

解 由性质(4)可知, 绝对值不等式

$$|x-2| < 6$$

与

$$-6 < x-2 < 6$$

等价, 故得到

$$2-6 < x < 2+6,$$

即

$$-4 < x < 8.$$

例 5 解绝对值不等式 $|2x-3| \geq 7$.

解 因为绝对值不等式

$$|2x-3| \geq 7$$

与

$$2x-3 \geq 7 \text{ 或 } 2x-3 \leq -7$$

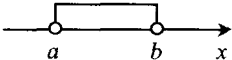
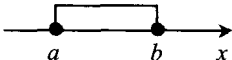
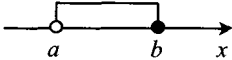
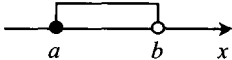
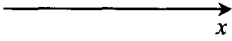
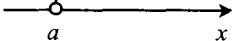
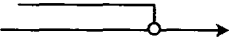
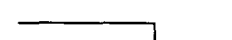
等价, 所以有

$$x \geq 5 \text{ 或 } x \leq -2.$$

1.1.3 区间与邻域

在实数集中, 今后用得最多的是各种区间, 我们将各种区间的类型、记号、集合表示及数轴表示列示出来, 见表 1.1.

表 1.1

类型	名称	记号	集合表示	数轴表示
有限区间	开区间	(a, b)	$\{x a < x < b\}$	
	闭区间	$[a, b]$	$\{x a \leq x \leq b\}$	
	左开右闭区间	$(a, b]$	$\{x a < x \leq b\}$	
	左闭右开区间	$[a, b)$	$\{x a \leq x < b\}$	
无穷区间	开区间	$(-\infty, +\infty)$	$\{x x \in \mathbb{R}\}$	
	开区间	$(a, +\infty)$	$\{x x > a\}$	
	开区间	$(-\infty, b)$	$\{x x < b\}$	
	左开右闭区间	$(-\infty, b]$	$\{x x \leq b\}$	
	左闭右开区间	$[a, +\infty)$	$\{x x \geq a\}$	

在表 1.1 中, 实数 a 与 b 叫做区间的端点, 数 $b-a$ 叫做有限区间的长度. 从数轴上可以看出, 有限区间的长度为有限的, 无穷区间的长度为无限的. 数轴上的实点记号“ $\cdot$ ”表示该区间包含端点, 空点记号“ $\circ$ ”表示该区间不包含端点.

符号“ $+\infty$ ”(读作“正无穷大”)和“ $-\infty$ ”(读作“负无穷大”)不是数, 仅是一个记号.

以后还会经常遇到一种以点 x_0 为中心的特殊开区间, 称为 x_0 的邻域. 确切地说, 设 x_0 与 $\delta > 0$ 是两个实数, 则开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $O(x_0, \delta)$. 即

$$O(x_0, \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta\}.$$

点 x_0 叫做 $O(x_0, \delta)$ 的中心, δ 叫做 $O(x_0, \delta)$ 的半径, 如图 1.6 所示.

在极限中用到的邻域还需要把邻域的中心去掉, 称为 x_0 的去心 δ 邻域 (如图 1.7 所示),