

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

微积分 学习辅导与习题选解

华中科技大学数学系 编



高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

微积分 学习辅导与习题选解

华中科技大学数学系 编

 高等教育出版社

内容简介

本书是与《微积分》(上、下册)(修订版)相配套的辅导书,也可作为学习微积分学课程的理工科大学生的参考辅导读本。考虑到学生在学习过程中可能遇到的困难与实际需要,作者将每章设计为基本要求、内容提要、释疑解惑、典型例题、习题选解及自测题等六个部分。全书内容依据现行理工类微积分学课程大纲确定,内容包括一元微积分学、多元微积分学、空间解析几何、无穷级数及常微分方程等共十二章。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习辅导与习题选解/华中科技大学数学系编.
北京:高等教育出版社,2004.7
ISBN 7-04-014402-6

I. 微… II. 华… III. 微积分—高等学校—教学参考资料 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062061 号

策划编辑 徐 可 责任编辑 徐 可 封面设计 王凌波
版式设计 杨 明 责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京市卫顺印刷厂		
开 本	880×1230 1/32	版 次	2004 年 7 月第 1 版
印 张	11.5	印 次	2004 年 7 月第 1 次印刷
字 数	290 000	定 价	14.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

正在学习微积分学(高等数学)课程的大学生往往希望拥有一本与学习过程同步,能够像身边的辅导老师一样随时指点自己的辅助读物.本书就是为满足学生的这一愿望而设计的学习辅导书.

本书是与高等教育出版社出版的《微积分学》(上、下册)(修订版)相配套的辅导书,也可以独立地作为理工科各专业学生学习微积分学课程的同步辅导书.

学生们在寻找微积分课程的辅导书时,往往抱怨好书难找.市面上的辅导书大体上分为三类:考研辅导类、习题解答类与同步辅导类.第一类是为考研的学生准备的,分得较细,如理工类、经管类,它作为应考指导书,自然只注重于知识归纳与解题技巧,不适合初学者.第二类是为解决做题困难而编写的,但我们认为习题解答可能对独立思维训练会产生负面影响.第三类书是为正在学习的大学生(通常是一年级的新生)所设计的,适合于初学者选用.这类书中有不少精品,且近年来新作也愈来愈多,其结构设计、编写方式也在不断改进,质量不断提高.

本书的设计方式是在充分调查了学生在学习环节中的各种反映与意见的基础上,为极大地满足学习的要求而确定的.全书按照教学实际过程中的章节顺序编写.每一章分为六个部分:基本要求、内容提要、释疑解惑、典型例题、习题选解及自测题.

在基本要求中列出了课程教学大纲中的要求,以明确这一章应该达到的学习目标.

在内容提要中,简要回顾一些重点概念与定理,有时利用表格来进行归纳整理,展现相互关系.

释疑解惑栏目中,收集了我们在平时辅导学生时所遇到的一些典型问题并给予详尽的回答与分析,以满足在大学里常常有问题找不到老师时的求知需求.

典型例题的选择一直是很困难的事.我们反对贪大求全、罗列大量例题,而是精心选择有代表性、有启发性的基本例题,并尽可能透彻地分析,展示求解思想,使学生能从中受益.

学习数学的一个根本途径是自己独立地完成习题.作为一本与教材配套的辅导书,我们采用西方大学基础教材的普遍作法,在习题选解中对一部分较难的习题的关键点给出提示,以帮助或促进学生的独立思考.

最后的自测题是想检测读者的学习效果而安排的.自然,简要的答案为提供一个评分参考标准.

《微积分学》及其修订版在华中科技大学已使用多年,本校每年有近万名新生通过这本教材进入微积分这个人类智慧文明的宝库.我们希望这本辅导书也能为读者探索这个宝库起到有效的指导.

参加本书各章写作的有毕志伟(第一章及第二章),王汉蓉(第三章及第四章),魏宏(第五章及第六章),乔维佳(第八章及第九章),林益(第十章及第十一章),王德荣(第七章及第十二章).全部图形及版式由谢鹏负责.统稿工作由毕志伟、谢鹏完成.

编者

2004年5月2日

目 录

前 言	(1)
第一章 函 数	(1)
一、基本要求	(1)
二、内容提要	(1)
三、释疑解惑	(3)
四、典型例题	(9)
五、习题选解	(15)
六、自测题	(17)
第二章 极限与连续性	(20)
一、基本要求	(20)
二、内容提要	(21)
三、释疑解惑	(25)
四、典型例题	(33)
五、习题选解	(45)
六、自测题	(49)
第三章 导数与微分	(52)
一、基本要求	(52)
二、内容提要	(52)
三、释疑解惑	(56)
四、典型例题	(59)
五、习题选解	(66)
六、自测题	(68)

第四章 微分中值定理·应用	(72)
一、基本要求	(72)
二、内容提要	(72)
三、释疑解惑	(77)
四、典型例题	(80)
五、习题选解	(88)
六、自测题	(94)
第五章 不定积分	(98)
一、基本要求	(98)
二、内容提要	(98)
三、释疑解惑	(100)
四、典型例题	(106)
五、习题选解	(120)
六、自测题	(122)
第六章 定积分	(125)
一、基本要求	(125)
二、内容提要	(125)
三、释疑解惑	(130)
四、典型例题	(137)
五、习题选解	(152)
六、自测题	(155)
第七章 常微分方程	(161)
一、基本要求	(161)
二、内容提要	(161)
三、释疑解惑	(164)
四、典型例题	(167)
五、习题选解	(179)
六、自测题	(181)

第八章 矢量代数与空间解析几何	(185)
一、基本要求	(185)
二、内容提要	(185)
三、释疑解惑	(190)
四、典型例题	(202)
五、习题选解	(211)
六、自测题	(214)
第九章 多元函数微分学	(218)
一、基本要求	(218)
二、内容提要	(219)
三、释疑解惑	(224)
四、典型例题	(237)
五、习题选解	(247)
六、自测题	(251)
第十章 重积分	(255)
一、基本要求	(255)
二、内容提要	(255)
三、释疑解惑	(261)
四、典型例题	(269)
五、习题选解	(281)
六、自测题	(286)
第十一章 曲线积分与曲面积分	(289)
一、基本要求	(289)
二、内容提要	(289)
三、释疑解惑	(294)
四、典型例题	(304)
五、习题选解	(318)
六、自测题	(324)

第十二章 无穷级数	(328)
一、基本要求	(328)
二、内容提要	(329)
三、释疑解惑	(334)
四、典型例题	(339)
五、习题选解	(350)
六、自测题	(353)

第一章 函 数

一、基本要求

1. 理解函数的概念.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 了解反函数的概念, 理解复合函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

二、内容提要

1. 函数概念

变量与常量 在一个确定的考察过程中, 保持不变的量称为常量, 而发生改变的量称为变量.

在论及变量时一般应指明相应的考察过程.

函数 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有惟一确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$.

定义域 使函数 $f(x)$ 有定义的自变量 x 的集合 D 称作 f 的定义域.

值域 当自变量 x 在函数 f 的定义域 D 中变动时, 函数值 $f(x)$ 的集合称作 f 的值域.

函数的相等 当两个函数的定义域与对应规则都相同时, 称这两个函数相等.

2. 函数性态

单调性 设 $f(x)$ 的定义区间是 D , 任给 $x_1, x_2 \in D$, 则

$f(x)$ 单调增 $\Leftrightarrow$ 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) \leq f(x_2)$;

$f(x)$ 单调减 $\Leftrightarrow$ 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) \geq f(x_2)$.

当上面不等号换作严格不等号时即为严格单调函数的定义.

奇偶性 设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 则

$f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x), x \in D$;

$f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(-x) = f(x), x \in D$.

周期性 设 $f(x)$ 的定义域是 $D, T > 0$ 是常数, 则

$f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow f(x+T) = f(x), x \in D$.

有界性 设 $f(x)$ 的定义域是 D , 区间 $I \subset D$, 则

$f(x)$ 在区间 I 上有界 $\Leftrightarrow$ 存在常数 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$,
 $x \in I$.

3. 函数的运算

在一定条件下, 由给定函数经过四则运算、复合运算、逆运算可以产生新的函数:

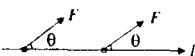
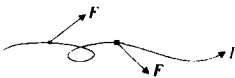
	条 件	新函数定义
给定 f, g	f 与 g 的定义域 D_f, D_g 有非空交集 $D = D_f \cap D_g$.	和 $f+g: (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
	四则运算函数的定义域是 D .	差 $f-g: (f-g)(x) = f(x) - g(x)$
		积 $fg: (fg)(x) = f(x)g(x)$
		商 $f/g: (f/g)(x) = f(x)/g(x) (g(x) \neq 0)$
给定 f	$x \in D_{f \circ g}$ 时, $g(x) \in D_f$	复合 $f \circ g: (f \circ g)(x) = f(g(x))$
	$f(x)$ 在 D 上可逆, 值域是 W	逆 $f^{-1}: f^{-1}(y) = x$ (其中 $y = f(x), y \in W$)

4. 初等函数

由五类基本初等函数: 幂函数 x^a , 三角函数 (如 $\sin x, \cos x$), 反三角函数 (如 $\arctan x, \arcsin x$), 指数函数 a^x , 对数函数 $\log_a x$ 中的函数经有限次四则运算及复合函数构成并且能用一个解析公式表示的函数称为初等函数.

三、释疑解惑

1. 微积分学与初等数学有何不同?

初等数学可解决的典型问题	微积分学可解决的典型问题
简单图形的面积, 体积. 如矩形, 圆, 椭圆, 梯形的面积; 长方体, 球体, 锥体, 柱体的体积.	复杂图形的面积, 体积   曲顶梯形 曲顶柱体
平均速度 $v = \frac{s}{t}$	瞬时速度 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$
常力 F 沿直线作功 $W = FL \cos \theta$ 	变力 F 沿曲线 L 作功 $W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ 
规则图形或均匀物体的质心  	不规则图形或非均匀物体的质心  
利用定义判别函数单调性	利用导数符号判别函数的单调性
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最大值或最小值	连续函数 $y = f(x)$ 的最大值或最小值
求有限和 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}$	求无限和 $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$
求解未知量是常量的方程 如: $x^2 + 1 = 0$ $\sin x = 1$ 其解是一个或几个常数 $x_0, x_1, \cdots$.	求解未知量是变量的方程 如: $y - x^2 = 1$ $y' - y = 0$ 其解是一个或几个函数 $y = y(x)$.

从上表可以得出初步印象: 尽管初等数学内容丰富、奇趣无

穷.然而微积分学的功能更加强大,能解决更复杂、更广泛的问题.如同自行车,汽车,飞机发展了人的移动能力,杠杆,千斤顶发展了人的作功能力,微积分方法则发展了人类在应对复杂的变化现象问题方面的分析与计算能力,掌握这一方法无疑有助于增强我们分析与解决问题的能力.

事实上,17世纪的天文学家们曾利用微积分方法准确预报了行星的出现.物理学家 Newton 更是运用它解决了当时几乎全部的重大理论与应用问题.而在当代,微积分学已经成为自然科学和一些社会科学的一个最基本的数学工具.

2. 如何提高自己的理解能力?

答 在学习关于函数的各种性态,运算等过程中,我们面临的往往是经过抽象,归纳之后的严密而准确的代数描述.文字固然不多,但深入理解其本质却不易.逐字逐句记忆可能容易做到,但用自己的语言进行解释便不太容易做好,其原因在于你的理解尚未到位.而要使自己的理解不浮于表面,可考虑以下已经被证实非常有效的措施:

(1) **具体化** 结合一些简单而各具特色的具体的函数例子来认识关于一般的函数的性质与规则.例如在学习函数的周期性时,仔细观察函数 $y = \sin x$ (有最小正周期 2π), 函数 $y = D(x)$ (无最小正周期的周期函数) 以及函数 $y = x$ (非周期函数). 在学习函数的有界性时,可以比较函数 $y = \sin x$ (于 $(-\infty, +\infty)$ 上有界), 函数 $y = x$ (于 $(-\infty, +\infty)$ 上无界但于有限区间 (a, b) 上有界) 以及函数 $y = \frac{1}{x}$ (于 $(0, 1)$ 上无界,但于 $(1, +\infty)$ 上有界). 这些具体的例子不仅有助于对抽象概念的理解,也常被用来说明函数的一些重要结论.

(2) **直观化** 几何上的直观描述十分重要,一方面是能借助视觉记忆来加深印象;另一方面是可以从整体上把握函数的特

征,如单调范围,波动情况等等.在学习过程中,只要有可能,便画出函数的图形,即便是不太准确的草图也可以.在以后的学习中你会发现,画一个几何草图会给问题的求解和概念的理解带来极大方便.

(3) **多方位** 即从不同角度理解问题.多方位理解包括两层含义,一是相互联系地理解,如单调函数是否一定有界?圆是否也是椭圆?另一方面是从“反面”即否命题的角度去理解概念,如 $f(x)$ 不单调的涵义是什么?以下写出几个常见概念的否命题,请读者体会其涵义及构造形式.

$f(x)$ 于 $[a, b]$ 上无界:任给 $M > 0$,存在 $x_M \in [a, b]$ 使得 $|f(x_M)| > M$.

$f(x)$ 于 $(0, +\infty)$ 上不单调增:存在 $x_1, x_2 > 0, x_1 < x_2$ 使得 $f(x_1) > f(x_2)$.

$f(x)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 上不是周期函数:任给 $T > 0$,存在 x 使得 $f(x+T) \neq f(x)$.

3. 如何理解函数的三种表现形式?

答 函数 $y = f(x)$ 由定义域和定义规则组成,其中定义规则的表示方法主要有三种:解析式,几何式,表格式.它们各有所长.

解析式 它是指使用基本初等函数以及函数运算所表示的对应规则.例如

$$y = xe^{\sin x} + 1, \quad y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad y = \begin{cases} x, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

主要特点 通过计算可得到函数值,便于理论研究及代数演算,能准确地表达函数规则.

几何式 将自变量 x 及其对应的因变量 y 在 Oxy 坐标系上,用点 (x, y) 描绘出来.例如:

主要特点 借助于坐标系的参照作用,可从整体上直观表现

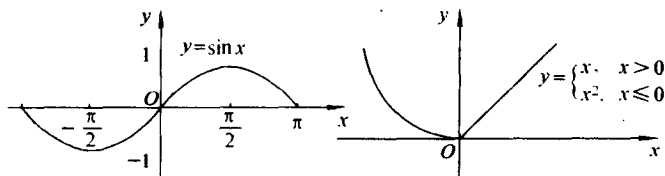


图 1-1

函数 $y = y(x)$ 的取值特征与动态属性. 例如单调、奇偶、周期、有界等性态, 借助几何表示便一目了然.

表格式 直接将 x 的值及其对应的 y 的值填在一个二维表单上. 由于表单的格子是有限的, 故 x 与 y 只能取有限个数值. 例如:

平方表

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

联系表

Name	Tel	职 称
A	7218	教 授
B	7035	教 授
C	5205	副教授
D	1797	讲 师
E	1898	助 教
F	1494	工程师

主要特点 直接显示 x 与 y 的对应关系, 查询方便, 便于实际应用. 上面的平方表表现的是实数到实数的对应关系 ($y = x^2$), 而联系表则表现的是姓名、电话号码、职称等变量的对应关系.

4. 为什么要研究变量?

答 自然界处在永恒的运动和变化之中, 描写其中事物的量自然是变量. 为了简化起见, 我们常在一定的时空范围内将某些变量看作常量来研究. 而从更一般的角度看, 常量也可以看作是变量的一种特殊状态, 是一种极端化的变量.

研究变量的目的是要获得变量的各种特征,尤其是它所遵循的不变的规律.

例如,人们发现:圆周长 L 与圆的直径 D 这两个变量的比 π 是常量;地球围绕太阳的运行过程中,其间的连线在单位时间内所扫描过的扇形面积也是常量.在完全竞争的市场上,企业为获得最大利润,要确定自己的最合适产量 Q 是多大,经济学家发现的定律是:最合适的产量应满足:边际收入 = 边际成本.

5. 哪些函数性态在进行函数运算时保持不变?

答 如果两个函数 f, g 都具有性质 p , 则对 f, g 所进行的四则运算或复合运算, 性质 p 是否仍然保持? 这一思考方式十分重要. 我们通过以下例子说明.

(1) 若 $f(x), g(x)$ 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, 则

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x), \\ f(x)/g(x), \text{ 其中 } g(x) \neq 0, f(g(x))$$

都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增函数, 则

$$f(x) + g(x), f(g(x))$$

也是 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增函数;

$f(x)g(x)$ 在 $f, g \geq 0$ 时亦是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增函数.

(3) 若 $f(x), g(x)$ 是区间 I 上的有界函数, 则

$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$$

也是区间 I 上的有界函数.

还可以写出一些, 它们的正确性可以直接通过定义来验证. 这里以(3)为例, 给一个示范.

证 由条件得, 存在常数 $M_1, M_2 > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M_1, |g(x)| \leq M_2,$$

于是

$$|f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2, x \in I$$

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| |g(x)| \leq M_1 M_2, x \in I.$$

由于 $M_1 + M_2, M_1 M_2$ 仍是正常数, 故由定义知, 结论成立.

6. 如何判断函数的有界性或无界性?

答 (1) 判断函数 $f(x)$ 的有界性可以直接由定义出发(如问题 5(3)); 也可以由运算性质来判断(用问题 5(3) 的结果).

例 证明 $f(x) = e^{-x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

证 因为 e^x 是单调增函数, 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值是 $e^0 = 1$, 故有 $e^x \geq 1$, 从而 $0 \leq f(x) = 1/e^x \leq 1/1 = 1$. 结果得证.

(2) 证明函数在区间 I 上无界相当于要说明: 对任给 $M > 0$, 存在 $x \in I$, 使 $|f(x)| \geq M$.

例 证明 $f(x) = x \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

证 任取 $M > 0$, 可找到正整数 m 使 $2m\pi \geq M$, 取 $x_m = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, 则

$$f(x_m) = \left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2m\pi > M.$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

7. 如何正确地写出否命题?

答 在理解一些概念和进行逻辑推理时, 有时要求写出否命题. 先看下表:

命题 P	否命题 FP
A. 我认识张三.	FA: 我不认识张三. 错: 我认识李四.
B. 我认识全村人.	FB: 村中至少有一人我不认识. 错: 我不认识全村人.
C. 今天班上有一位同学没听数学课.	FC: 今天班上每位同学都听了数学课. 错: 今天班上有一位同学听了数学课.

判定所写否命题是否正确的方法是, 在任何情况下, 命题与