上海普通高校“九五”重点教材

微积分

（第二版）

陆少华　主编

上海市教育委员会组编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书系普通高等院校工科与财经类相关专业使用的数学基础教材。

全书共分10章,分别为函数,极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,积分,微分方程,空间解析几何,多元微分,多元积分,无穷级数。本书全面系统地讲述了微积分的基本概念、基本理论与基本方法。每章编排有配套的习题与自测题,书末附有全部计算题的答案。

本书的特点是概念清晰、推理简明、例题丰富、方法实用、习题配套。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/陆少华主编. 2版 —上海: 上海交通大学出版社, 2002(2005重印)
ISBN 7-313-02446-0

Ⅰ.微... Ⅱ.陆... Ⅲ.微积分–高等学校–教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第24592号

微积分

(第二版)

陆少华 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

常熟市文化印刷有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本:880mm×1230mm 1/32 印张:15.75 字数:446千字

2000年8月第1版 2002年8月第2版 2005年7月第7次印刷

印数:21 501~24 550

ISBN7-313-02446-0/O·120 定价:30.00元

序

目前数学这门学科已经成为一切科学和技术的基础，即使在管理部门也离不开数学。作为工科与经济数学基础的微积分，更是必不可少的。因此，微积分的教学备受各界关注。

为了适应该课程的教学内容和体系改革的步伐，更好地培养具有创新能力的管理人才，上海交通大学与杉达大学的数学教师，结合多年的教学实践，集中各校的成功经验，编写了这本微积分教材。本书非常重视教学法：在处理一元函数和多元函数微积分时，侧重一元函数微积分；在引入概念时，注意到它们的实际背景；在处理基本理论时，证明方法简明，有独到之处；在处理基本方法时，注意到学生的可接受性，不过分拘泥于技巧性；在例题的选取和习题的安排上，注意到相互配置，便于学生学到基本知识；在每章最后附有自测题，以便学生自己检查基本知识的掌握程度，等等。

本书是参照高等学校工科与财经专业核心课程的教学大纲（本科）编写的。

本书取材适当，理论与应用并重。在内容的安排上对传统的微积分教材内容进行了改革，作了调整和增删，富有新意。本书能满足课程的教学要求，尤其适合普通高等院校工科与财经类各专业。

本书的出版，对教学改革、提高教学质量定将起到积极的促进作用。

孙薇荣　王嘉善

2002 年 6 月

再版前言

《微积分》系普通高等院校工科与财经类相关专业使用的数学基础教材。《微积分》(第一版)的出版,得到了社会的肯定,它对教学改革、提高教学质量起到了积极促进作用。为满足课程的新教学要求,我们对《微积分》(第一版)进行了修订,并增加了“多元积分”的内容。《微积分》(第二版)更能适应普通高等院校各专业使用。

本书编写过程中,遵循以下原则:

(1) 内容标准化、规范化;

(2) 陈述“深入浅出”;

(3) 体系、方法上力求创新;

(4) 学以致用(体现在概念的引入,例题、习题的编排)。

孙薇荣、范荣良、陈慧玉等老师参与了本书的编写工作。孙薇荣、王嘉善教授对全书作了仔细的校对、审核,并提出了宝贵的修改意见。在此表示深深的感谢。

编　者

2002 年 6 月

目　　录

第一章　函　数

本章复习与总结“初等数学”中与“微积分”关系密切的函数概念。“微积分”是研究函数关系的一门数学学科，它的研究对象是函数，主要是初等函数。

1.1　实数

1.1.1　数轴

数轴是定义了原点、方向与单位长度的直线。数轴上的每个点表示一个确定的实数：若点 M 与原点的距离为 d，且点 M 在原点的正向，则 M 表示正实数 d；若点 M 在原点的负向，与原点距离为 d，则 M 表示负实数 $-d$；若点 M 与原点重合，则 M 表示数零。这样，就建立了数轴上的点与实数间的一一对应：每个实数可看成数轴上一个确定的点，数轴上每个点代表一个确定的实数。

1.1.2　绝对值

1. 定义

定义 1.1　实数 x 的绝对值 $|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}, \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时}。\end{cases}$

实数作为数轴上的点，它的绝对值等于它到原点的距离。

2. 性质

若 a,x 均为实数，且 $a>0$，则

(1) $|x|=\sqrt{x^2}=|-x|$；

(2) $|x|\geqslant 0$,且 $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$;

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(4) $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$;

(5) $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$。

3. 运算

若 x,y 均为实数,则

(1) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$;

(2) $|x-y|\geqslant \big||x|-|y|\big|$;

(3) $|xy|=|x|\cdot|y|$;

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$, $y\neq 0$。

1.1.3 区间

若 $\mathbf{R}$ 表示实数集,当 $a,b\in \mathrm{R}$,且 $a<b$,定义各类区间如下:

$(a,b)=\{x\in \mathbf{R}|a<x<b\}$,称以 a,b 为端点的开区间;

$[a,b]=\{x\in \mathbf{R}|a\leqslant x\leqslant b\}$,称以 a,b 为端点的闭区间;

$(a,b]=\{x\in \mathbf{R}|a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x\in \mathbf{R}|a\leqslant x<b\}$,称以 a,b 为端点的半开区间。

以上三类区间为有限区间,其右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 称为区间的长度。

无限区间有以下五类:

$(a,+\infty)=\{x\in \mathbf{R}|x>a\}$;

$[a,+\infty)=\{x\in \mathbf{R}|x\geqslant a\}$;

$(-\infty,b)=\{x\in \mathbf{R}|x<b\}$;

$(-\infty,b]=\{x\in \mathbf{R}|x\leqslant b\}$;

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$。

1.1.4 邻域

实数集合 $\{x\in \mathbf{R}\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 在数轴上是一个以 x_0 为中

心，长度为 2δ 的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为 x_0 的 δ 邻域，x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。该邻域是数轴上与 x_0 的距离小于 δ 的点的全体所构成的集合。见图 1.1。

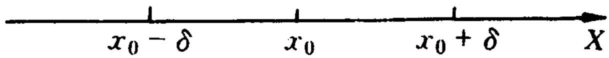

图 1.1

若在 x_0 的 δ 邻域中去掉中心 x_0，其余点所成的集合，即$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为以 x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域。

例如，以 5 为中心，1 为半径的邻域是开区间(4,6)；以 2 为中心，1 为半径的空心邻域为$(1,2)\cup(2,3)$。

1.2 平面直角坐标系

1.2.1 点关于数轴的坐标

对给出的数轴 T，平面（或空间）一个点 M 在 T 上有个投影点，即过点 M 的 T 的垂线（或垂面）与 T 的交点，投影点所代表的实数 t 称为点 M 关于数轴 T 的坐标，简称点 M 的 T 坐标。

1.2.2 平面直角坐标系

平面Ⅱ上两条有公共原点（常记成 O），相同长度单位，相互垂直且成右手系的有序数轴，即第一条数轴绕原点逆时针旋转 90°成第二条数轴，按序分别将第一条数轴称为 X 轴，第二条数轴称为 Y 轴。这样就建立了平面直角坐标系，简记成 XOY。

平面直角坐标系 XOY 把平面分成四个象限：X 轴正向与 Y 轴正向间区域称为第Ⅰ象限，X 轴负向与 Y 轴正向间区域称为第Ⅱ象限，X 轴负向与 Y 轴负向间的区域称为第Ⅲ象限，X 轴正向与 Y 轴负向间的区域称为第Ⅳ象限。见图 1.2。

X 轴常称横轴，Y 轴常称纵轴。点的 X 坐标常称横坐标，点的 Y

坐标常称纵坐标。

1.2.3 点的平面坐标

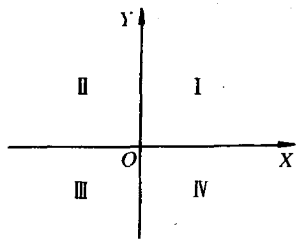

图 1.2

在平面Ⅱ上建立了直角坐标系 XOY，平面Ⅱ上点 M 的横坐标与纵坐标分别为 x 与 y，称有序数对 (x,y) 为点 M 的直角坐标，简称坐标。

点与其直角坐标的对应是平面Ⅱ上的点集与实数有序对 $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$ 间的一一对应。在这个意义上，我们常把平面Ⅱ上的点与其直角坐标等同。称点 $(2,3)$ 是指直角坐标为 $(2,3)$ 的点。

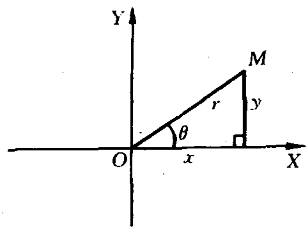

图 1.3

若平面Ⅱ上点 M 的直角坐标为 (x,y)，M 到原点的距离为 r，则 $r=\sqrt{x^2+y^2}$；记 θ 为以 X 轴正向为始边，OM 为终边的角，称有序数对 (r,θ) 为点 M 的极坐标。

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, & r\geqslant 0, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}, & 0\leqslant\theta<2\pi。\end{cases}$$

点与其极坐标的对应是平面Ⅱ上原点外的点集与有序实数对 $\{(r,\theta)\mid r>0,0\leqslant\theta<2\pi\}$ 间的一一对应。

若给了平面Ⅱ上点 M 的极坐标 (r,θ)，则 M 的直角坐标 (x,y) 为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta。\end{cases}$$

1.3 函数及其表示

1.3.1 函数概念

正方形的面积 S 依赖于边长 a，把 a 与 S 联系起来的规则是用公

式$S=a^2$给出的。对应于每个正数a给出S的一个值。这时，我们就说正方形的面积S是其边长a的一个函数。

某商品单价为P元，卖出Q件商品所得收益为$R=PQ$。这时，我们说销售收益R是销售量Q的一个函数。

上述两个例子有一些共同特征：它们都描述了两个变量间的依赖关系，在适当的范围内，每给出一个量a,Q时，则另一个量S,R就根据各自的规则被确定了。这时，我们把第一个变量a,Q称为自变量，把第二个变量S,R称为因变量或第一个变量的函数。

下面，给出函数的确切定义：

定义 1.2 设A为一个非空的实数集合。如果存在一个对应规则f，使得对集合A中的每个元素x，根据规则f，都能确定唯一一个实数y，则称这个对应规则f为函数，记成

$$y=f(x)。$$

集合A为函数f的定义域，记成$D(f)$。

数值$f(x)$称为函数f在x处的值，即函数值。当x在定义域$D(f)$中变化时，函数$f(x)$的全体值的集合称为函数f的值域，记成$Z(f)$或Z_f，即

$$Z(f)=\{f(x)\mid x\in D(f)\}。$$

在函数的定义中，自变量与因变量采用什么符号不是关键的，确定一个函数的两个要素是对应规则和定义域。例如函数$y=f(x)$与$S=f(t)$虽然它们的自变量与因变量采用了不同的符号，只要对应规则f是同一个，定义域相同，它们就是相同的函数。

实际问题中，函数的定义域由问题的具体含义确定，例如正方形的面积作为边长的函数，其定义域为正实数。如果一个函数是用公式来表示的，并没有明确给出定义域，那么，就按习惯把用此公式可以获得对应函数值的全体实数（即使公式有意义的全体实数）组成的集合为函数的定义域，常称它为函数的自然定义域。

例 1.1 求由下列公式确定的函数的自然定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3-2x}}{x+1}$；

(2) $y=\lg(4-x^2)+\arcsin(2x-1)$;

(3) $y=\sqrt{6-x-x^2}$。

解 (1) 表达式中分母不能为零，于是 $x+1\neq 0$，$x\neq -1$；又负数不能开平方，故 $3-2x\geqslant 0$，即 $x\leqslant \frac{3}{2}$。这样，我们得到函数的自然定义域为

$$x\neq -1 \text{ 且 } x\leqslant \frac{3}{2}。$$

写成区间形式为

$$D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,\frac{3}{2}]。$$

(2) 要使表达式中 $\lg(4-x^2)$ 有意义，必须 $4-x^2>0$，即 $x^2<4$，$x\in(-2,+2)$。

要使表达式中 $\arcsin(2x-1)$ 有意义，必须 $|2x-1|\leqslant 1$，即 $x\in[0,1]$。

从而函数的自然定义域为

$$D(f)=(-2,+2)\cap[0,1]=[0,1]。$$

(3) 因为负数不能在实数范围开平方，故函数的自然定义域由下列不等式确定：

$$6-x-x^2\geqslant 0$$

或

$$(3+x)(2-x)\geqslant 0。$$

上述不等式的解集为 $[-3,2]$，这也是函数的自然定义域。

1.3.2 函数的图形

用图形表示函数关系是最直观的，随着计算机的普及，也是最常用的。

定义 1.3 函数 $y=f(x)$ 的图形是有序对 (x,y) 的集合，或直角坐标平面中的点 (x,y) 的集合：

$$G(f)=\{(x,f(x))\mid x\in D(f)\}。$$

函数 f 的图形 $G(f)$ 通常是一条平面曲线，我们常称函数 $y=f(x)$ 的图形 $G(f)$ 为平面曲线 $y=f(x)$，简称曲线 $y=f(x)$。

函数 f 的图形 $G(f)$ 给出了直观的函数形态：

(1) $G(f)$ 上点 (x,y) 在 X 轴上方，意味着 $y=f(x)>0$；在 X 轴下方，意味着 $y=f(x)<0$。点 (x,y) 到 X 轴的距离为 $|y|=|f(x)|$（见图 1.4）。

(2) $G(f)$ 在 X 轴上垂直投影点集为 f 的定义域，$G(f)$ 在 Y 轴上垂直投影点集为 f 的值域（见图 1.5）。

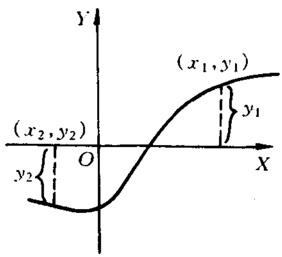

图 1.4

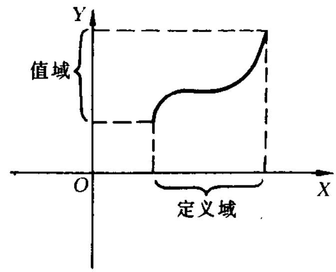

图 1.5

已知函数的定义公式，可以用描点等方法来作出函数的草图。

例 1.2 用描点法作出下列函数的草图：

(1) $y=3x+6$；

(2) $y=x^3$；

(3) $y=\sqrt{x+1}$。

解 (1) $y=3x+6$ 为一条直线，不难看出，点 $(0,6)$，$(-2,0)$ 在直线上，故所求图形为过两点 $(0,6)$ 与 $(2,0)$ 的一条直线（见图 1.6）。

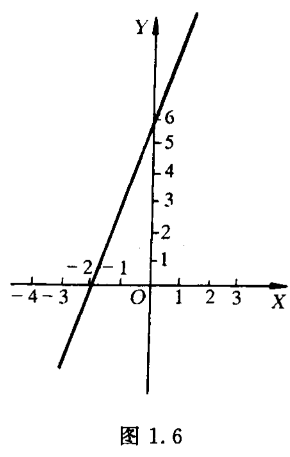

图 1.6

(2) 计算函数 f 的定义域中一些 x 处的函数值 $f(x)$，并列表于下。

描出这些点，并用光滑曲线逐段连接它们，即得函数 $y=x^3$ 的草图（见图 1.7）。

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
x^3	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8
(x,x^3)	$(-2,-8)$	$(-1,-1)$	$\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{2}\right)$	0	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$	$(1,1)$	$(2,8)$

(3) $y=\sqrt{x+1}$的定义域为$[-1,+\infty)$，通过下列表中的数据描点画出草图(见图1.8)。

x	-1	0	1	3
$\sqrt{x+1}$	0	1	$\sqrt{2}$	2

实际上，函数 $y=\sqrt{x+1}$的图形是抛物线 $x=y^2-1$ 的上半部分(见图 1.9)。

函数的图形是 XOY 平面上的一条曲线。但在 XOY 平面上的怎样的曲线才可能是某个函数的图形呢？这要用下面这个称为“垂直线检测法”的方法来决定。

垂直线检测法：XOY 平面上曲线 G 是函数 $y=f(x)$ 的图形的充要条件是任何与 X 轴相垂直的直线与曲线 G 的交点不能多于一个。这是因为：若垂直线 $x=a$ 仅与 G 交于

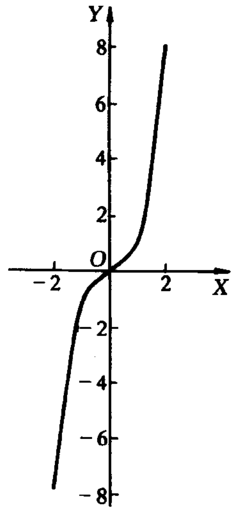

图 1.7

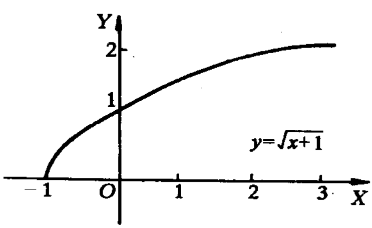

图 1.8

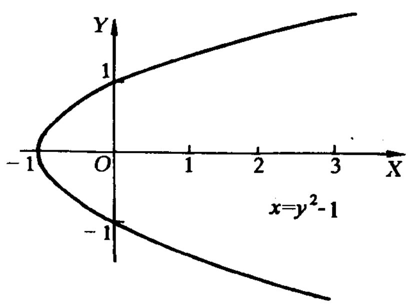

图 1.9

一点(a,b)，则就定义了函数值$b=f(a)$。若垂直线 $x=a$ 与G有多于一个的交点(a,b)，(a,c)，…，则 $f(a)=b$，$f(a)=c$，…，与函数的定义相矛盾。(对应于定义域中自变量的一个值，函数只有一个确定的值。)

图 1.9 中的抛物线 $x=y^2-1$ 就不表示一个函数 $y=f(x)$，因为当$a>-1$时，垂直线 $x=a$ 与抛物线有两个交点。不难看出，抛物线的上半部分与下半部分分别为函数 $f(x)=\sqrt{x+1}$与$g(x)=-\sqrt{x+1}$的图形。

1.3.3 函数的表示法

表示函数关系的常用方法有公式法、列表法与图示法。

1. 公式法

公式法也称解析法，就是用解析表达式来表示函数关系的一种方法，常有显式与隐式两种。

显式的标准形式为 $y=f(x)$，这里 $f(x)$是一个含自变量 x 的解析式，例如 $y=x^2$，$y=\sin x$ 等。

隐式的标准形式为 $f(x,y)=0$，这里 $f(x,y)$是含自变量 x 与因变量 y 的一个解析式，由 x 的值和 $f(x,y)=0$ 可确定相应 y 的值，例如$x^2+y^2-1=0\ (y\geqslant 0)$等。

但现实生活中的许多函数关系难于用单个的公式来表示，例如一天的气温作为时间的函数，出租车的车费作为行驶距离的函数等。表示这些函数就要用到表格法与图示法。

2. 表格法

例如，邮件的邮费 C 是质量 M 的函数，可以用表格来表示。下面的邮件邮资费表就描述了这个函数的对应法则：

邮件质量(g)	[20,100]	(100,250]	(250,500]	(500,1000]	(1000,2000]
邮费(元)	7.80	15.70	28.30	46.90	87.80

通过这个表格，可对质量在 20g 到 2000g 间的每个邮件算出要付的邮费。例如，质量为 350g 的邮件可从表中第 3 列(因为 $350\in(250,$

500]找到要付的邮费为28.30元。

3. 图示法

图示法是用函数图形来表示函数关系的方法,直观性强。由于计算机作图的方便,图示法愈来愈得到广泛的使用。

1.3.4 分段函数

有的函数在定义域的不同部分上用不同的公式来表达,这种函数被称为分段函数。

分段函数的典型例子为绝对值函数:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时}。\end{cases}$$

其图形如图1.10。

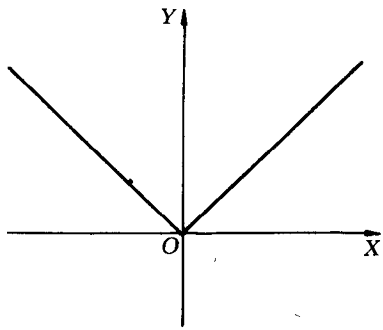

图1.10

其他常见例子有符号函数 $\operatorname{sgn}x$ 与取整函数 $[x]$:

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}。\end{cases}$$

$[x]$ = 不大于 x 的最大整数;

$=n$,当 $x\in[n,n+1)$,$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$。

例如:$\left[\frac{5}{6}\right]=0$, $[\sqrt{3}]=1$, $[-2.5]=-3$ 等。