高等院校计算机教材系列

离散数学

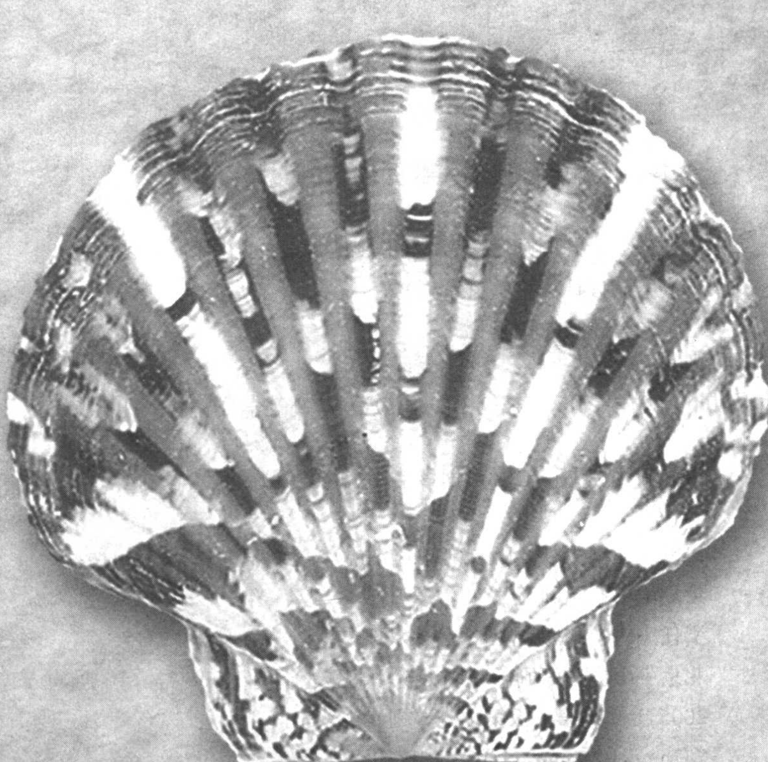
陈国勋　刘书芳　周文俊　等编著

机械工业出版社
China Machine Press

高等院校计算机教材系列

离散数学

陈国勋　刘书芳　周文俊　等编著



机械工业出版社
China Machine Press

本书系作者根据多年的教学经验和教案修改整理而成。全书共分 11 章，第 1、2 章为数理逻辑部分，第 3 至 5 章及第 11 章为集合论部分，第 6 至 8 章为图论部分，第 9 及 10 章为代数系统部分。书中精选了大量实例，力求深入浅出地介绍与计算机科学密切相关的课题，既着重于各部分内容之间的紧密联系，又深入探讨概念、理论、算法和实际应用。各章节配备的习题与书后的提示和答案为读者迅速掌握有关知识提供有效帮助。

本书可作为高等院校计算机和相关专业离散数学课程的教材，也可供有关技术人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 陈国勋等编著. -北京：机械工业出版社，2005. 8
（高等院校计算机教材系列）
ISBN 7-111-16704-X

Ⅰ. 离…　Ⅱ. 陈…　Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材　Ⅳ. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 092422 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
策划编辑：温莉芳
责任编辑：朱起飞
北京牛山世兴印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2005 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm　1/16 · 15.5 印张
印数：0001-5000 册
定价：25.00 元

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支和计算机科学基础理论的核心学科，它充分描述了计算机科学离散性的特点，是随着计算机科学的发展而逐步建立起来的新兴基础学科。

随着学科建设的初步完善和教材改革的深化，教育界对计算机教材的需求和应用都步入了一个新的阶段。为了认真贯彻《中国教育改革和发展纲要》和教育部《面向 21 世纪教育振兴行动计划》的精神，适应社会、经济、科技、文化，特别是教育的发展方向，适应培养新世纪计算机人才的需要，我们在已经著就的《离散数学》、《离散数学问题解析》的基础上经过修改整理，推出了本教材。全书共分 11 章，第 1、2 章为数理逻辑部分，第 3 至 5 章及第 11 章为集合论部分，第 6 至 8 章为图论部分，第 9 及 10 章为代数系统部分。通过精选的大量实例，力求深入浅出地介绍与计算机科学密切相关的课题，既着重于各部分内容之间的紧密联系，又深入探讨各部分内容的概念、理论、算法和实际应用。内容叙述力求严谨、推演力求详尽，使之也适合自学。各章节配备的大量习题与书后的提示和答案为读者迅速掌握有关知识提供了有效帮助。

参加编写的有李伦（第 1、2 章），李保清（第 3、4、5 章），周文俊（第 6、7、8、11 章），徐荣才（第 9、10 章），陈国勋与刘书芳对全书进行了修改和统稿。

由于我们的水平有限，书中错误及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 6 月于郑州

目　录

第1章 命题逻辑

逻辑是英文 logic 的译音，而 logic 一词导源于希腊文 logoc，有“思维”及“表达思考的言辞”之意. 数理逻辑是用数学的方法来研究推理规律的学科——引进一套符号系统来描述和处理思维的形式及其规律性的一门学科，也就是说，数理逻辑是用形式符号语言的方法来研究逻辑问题的一门学科，因此，数理逻辑又叫符号逻辑.

最早提出用数学方法来描述和处理逻辑问题的是莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646—1716，德国数学家），但直到 1847 年布尔（G. Bool，1815—1864，英国数学家）发表“逻辑的数学分析”后这一方法才有所发展. 1879 年弗雷格（G. Frege，1848—1925，德国数学家）在其《表意符号》一书中，建立了第一个比较严格的逻辑演算系统. 怀特海（A. N. Witehead，1861—1947，英国逻辑学家）和罗素（B. Russell，1872—1970，英国逻辑学家）合著的《数学原理》一书，可以说是当时数理逻辑的成果总结，使得数理逻辑形成了专门的学科. 1930 年以前，数理逻辑的发展主要是针对纯数学的需要，以数学证明的分析作为自己的对象. 自 1943 年 Y. C. 麦克卡洛克和 Y. 彼特斯的“有关神经活动的思想的逻辑演算”一文发表后，数理逻辑开始应用于所有开关线路的理论中，以后又在计算机科学和控制论方面获得应用，成为它们的基础理论之一.

数理逻辑的主要分支有公理化集合论、证明论、递归函数论、模型论等. 命题逻辑与谓词逻辑是数理逻辑的基础部分，我们主要讨论这些内容.

1.1 基本概念

1.1.1 命题

在数理逻辑的文献里，命题这个术语是不予定义的一个基本概念，我们这里只对它的内容作描述性的解释.

我们知道，“数学命题”是指用来陈述任何一个数学公理、定理以及任何一个在数学推理过程中所作的判断的语句. 例如：

（1）“三角形的三内角之和为 180°”，（2）“3 可以被 2 整除”均是数学命题.（1）是真命题，（2）是假命题. 而（3）“这是三角形吗？”，（4）“画一个三角形！”均不是数学命题.（1）与（2）的共同特点是：它们都是陈述句，能作出肯定或否定某种性质的判断，而且仅是肯定或否定这两种判断的一种.

一般地，**命题**是指我们语言中的一个陈述句，它或者是真的（正确的），或者是假的（错误的），两者不能共存，但也不能两者都不是.

对于一个具体的命题而言，如果它是真的，我们就说它的**真值**（也叫**逻辑值**）为 T（或者 1）；如它是假的，我们就说它的**真值**（也叫**逻辑值**）为 F（或 0）. 例如：

“北京是中国的首都”真值为 T；“雪是黑的”真值为 F；“10+11=101”的真值取决于所指对象的范围，若谈的是十进制数则真值为 F，若谈的是二进制数则真值为 T.

“公元 3 年 9 月 9 日郑州下雨”和“明天郑州下雨”也都是命题，虽然它们的真值不知道，但其真假值是确定的.

“5<3 且 2>7”是一个命题，不过此命题包括两个内容“5<3”和“2>7”. 我们把只表示一个内容的命题叫**简单命题**（**原子命题**），且用大写字母 A，B，C，…（或带下标）表示，而将包含不只一个内容的命题叫**复合命题**（或**分子命题**）. 简单命题可理解为一个不能细分的可判定的简单陈述句，或认为是没有内部结构的最小整体，而复合命题是由几个简单命题组合而成的一个命题. 自然，复合命题的真假要由组合它的简单命题的真假来决定. 为使复合命题符号化，我们引入连接词的概念.

1.1.2 连接词

为了描述命题与连接词的一般性质，我们用小写字母 $p,q,r,\cdots$（或带下标）表示任意的简单命题，通常称为**命题变元**. 命题变元是一个待定的简单命题，它和初等代数中字母的地位相似. 命题变元可用具体的简单命题代换，也只有将命题变元代以具体的简单命题，如 A，B，C，…时才能确定其真值是 T 或 F.（具体的简单命题也叫**命题常元**）

定义 1.1.1 与命题 p 真值相反的命题称为 p 的**否定命题**，记为 $\neg p$，读作非 p. 否定命题的真值显然依赖于原来命题的真值，它可用表 1-1 给出，此表称为**真值表**. 否定命题也可直接用表 1-1 来定义.

表 1-1

p	$\neg p$
T	F
F	T

在日常用语中可用“非”、“不”、“没有”、“无”、“并不”等多种方式表示否定.

例 1.1.1 设 A 表示命题“2+2=4”，则 $\neg A$ 表示命题“2+2≠4”. ■

定义 1.1.2 只有 p 与 q 的真值均为 T 时其真值才为 T 的命题，称为命题 p 与命题 q 的**合取命题**，记作 $p\wedge q$，读作 p 与 q. 我们也可用表 1-2 来定义它.

表 1-2

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 1-3

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

该表中给出 p，q 真值的一切可能组合. 这每一种组合：T，T；T，F；F，T；F，F；称为 p，q 的一组**真值指派**.

在日常用语中可用“与”、“并且”、“同时”、“以及”、“既……又……”、“又”、“不但……而且……”等多种方式来表达合取.

例 1.1.2 若 A 表示“5<3”，B 表示“2>7”，则 $A\wedge B$ 表示“5<3 且 2>7”. ■

定义 1.1.3 只有命题 p 与命题 q 的真值同时为 F 时，其真值才为 F 的命题称为命题 p 与命题 q 的**析取命题**，记作 $p\vee q$，读作 p 或 q. 其真值表如表 1-3 所示.

在日常语言中，“或”可用于两种不同的意思. 例如，（1）今天打雷或下雨；（2）这列火车是早上六点钟或早上七点钟开.（1）中的“或”表示今天“要么打雷，要么下雨，或既打雷又下雨”，（2）中的“或”表示“这列火车要么早上六点钟开，要么早上七点钟开，既在六点又在七点开是不可能的”.（1）是“可兼”的“或”，而（2）则是“不可兼”的“或”. 上述析取定义与可兼的“或”一致.

定义 1.1.4 只有 p 的真值为 T 且 q 的真值为 F 时，其真值才为 F 的命题称为命题 p 与命题 q 的**条件命题**，记为 $p \to q$，读作若 p 则 q. p 称为条件命题的**前件**，q 称为条件命题的**后件**. 其真值表如表 1-4.

表 1-4

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表 1-5

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例 1.1.3 甲对乙说："如果今晚我们班上不开会，则我就和你一起去玩."今问：在什么情形下，乙认为甲的这句话是假的（即有理由推翻它）？

如果班上没开会，甲与乙一起去玩，则自然认为甲说的话为真；

如果班上开会了，甲没有与乙一起去玩，则没有理由认为甲的话为假；

如果班上没开会，甲没有与乙一起去玩，则显然认为甲的话为假；

如果班上开会了，但甲未参加而与乙一起去玩了，则也不能认为甲的话为假；

通过以上分析，可以帮助理解表 1-4 的合理性. ■

对于"若……则……"在日常语言中有多种表达方式，诸如"只要……就……"，"当……则……"，"若……那么……"，"必须……以便……"等.

定义 1.1.5 只有 p 与 q 的真值同为 T 或同为 F 时，其真值方为 T 的命题称为 p 与 q 的**双(重)条件命题**，记作 $p \leftrightarrow q$，读作 p 当且仅当 q，它的真值表如表 1-5.

"p 当且仅当 q"与数学上"p 是 q 的充要条件"含义一致.

例 1.1.4 设 A："2<3"，B："3−2>0"，则 $A \leftrightarrow B$ 可说成是"2<3 当且仅当 3−2>0". ■

我们统称 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$ 为（**逻辑**）**连接词**.

1.1.3 公式

定义 1.1.6 命题逻辑中的**公式**是如下递归定义的一个符号串：

（1）命题变元是公式；

（2）若 A 与 B 均是公式，则 $(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \to B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 也是公式；

（3）所有公式都是有限次使用（1）和（2）得到的符号串.

例 1.1.5 $((p \wedge q) \to (\neg(q \vee r)))$是公式，事实上，依（1），$p$，$q$，$r$ 是公式；依（2），$(p \wedge q)$与$(q \vee r)$均是公式；又由（2），$(\neg(q \vee r))$是公式；再由（2），$((p \wedge q) \to (\neg(q \vee r)))$是公式. ■

为减少公式的括号，我们作如下约定：

（1）省去最外层括号，如 $(\neg A)$，$(A \to B)$ 可分别写成 $\neg A$，$A \to B$；

（2）规定优先级顺序为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$.

如 $((P \to ((Q \wedge (\neg R)) \vee S)) \leftrightarrow U)$ 与 $((P \to Q) \wedge (\neg R) \vee S) \leftrightarrow U$ 可分别写成 $P \to Q \wedge \neg R \vee S \leftrightarrow U$ 与 $(P \to Q) \wedge \neg R \vee S \leftrightarrow U$（两公式含义不一样；为简单计，命题变元大小写可混用）.

因为将一个公式的命题变元都代以简单命题时得到一个复合命题，所以对于公式命题变元的一组真值指派就有确定的真值，于是对于一个公式来说有相应的真值表.

例 1.1.6 试构造下列公式的真值表：（1）$\neg P\vee Q$；（2）$P\to Q\vee R$.

解：（1）

表 1-6

P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q$
T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T

可以看出，公式 $\neg P\vee Q$ 与 $P\to Q$ 的真值表相同.

（2）

表 1-7

P	Q	R	$Q\vee R$	$P\to Q\vee R$	P	Q	R	$Q\vee R$	$P\to Q\vee R$
T	T	T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	F	T

■

由此例看出，对于含有两个命题变元的公式，其真值表有四行；对于含有三个命题变元的公式，其真值表有八行．一般地，对于含有 n 个命题变元的公式，其真值表共有 2^n 行．换言之，含有 n 个命题变元的公式，共有 2^n 种真值指派.

有了这些概念，我们就可以将自然语言的命题描述翻译成命题公式了.

例 1.1.7 设 P：明天下雨，Q：明天下雪，R：我去学校，则

（1）“如果明天下雨或下雪则我不去学校”可翻译成

$$P\vee Q\to\neg R$$

（2）“如果明天不下雨且不下雪则我去学校”可翻译成

$$\neg P\wedge\neg Q\to R$$

（3）“如果明天不是雨加雪则我去学校”可翻译成

$$\neg(P\wedge Q)\to R$$

（4）“明天我将雨雪无阻一定去学校”可翻译成

$$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$$

（5）“当且仅当明天不下雨且不下雪时我才去学校”可翻译成

$$\neg P\wedge\neg Q\leftrightarrow R$$

■

翻译时要按照命题在自然语言系统中的逻辑关系意译，而不能简单凭字面意思翻译.

例 1.1.8 设 P：张三可做此事，Q：李四可做此事，则“张三或李四均可做此事”可翻译成

$$P\wedge Q$$

而不是翻译成 $P\vee Q$，因为此命题的含义是为了表示“两个人均可以做此事”，重点在“均”字上.

■

1.1.4 重言式

定义 1.1.7 凡对所有的真值指派均取真值 T 的公式称为**重言式**. 凡对所有的真值指派均取真值 F 的公式，称为**矛盾式**. 不是矛盾式的公式，称为**可满足的公式**.

例 1.1.9 试判断以下公式的类型：

（1）$P\wedge\neg P$;

（2）$P\vee\neg P$;

（3）$P\to(Q\to P)$;

（4）$(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$;

（5）$(\neg P\to\neg Q)\to(Q\to P)$.

解：（1）为矛盾式，（2），（3），（4），（5）均为重言式，这都可以用构造真值表法证明. 不过像（4），（5）这种命题变元较多或较长的公式用上述那种写法就太冗长，我们可采用如下表所示的方法（以（5）为例）给出真值表：

P	Q	$(\neg$	P	$\to$	$\neg$	$Q)$	$\to$	$(Q$	$\to$	$P)$
T	T	F	T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	T	F	T	F	T	F
步骤		2	1	3	2	1	4	1	2	1

它是将整个公式写下来，每个连接词占一列，先将各命题变元所在列的所有可能真值写出，然后按生成此公式的顺序编号，将其**子公式**（它是该公式的一部分并且其本身也是一个公式）的真值写在对应的连接词下面，其结果是编号最大一列所给出的真值. ■

定理 1.1.1 若 A 与 $A\to B$ 均为重言式，则 B 也是重言式.

证：假设 A 与 $A\to B$ 均为重言式但 B 不是，那么对于包含在 A 或 B 中的全体命题变元来说，存在一个真值指派使得 B 取真值 F. 然而对这种指派 A 取真值 T，这是由于 A 为重言式的缘故，从而 $A\to B$ 取值为 F，这与 $A\to B$ 为重言式矛盾. 因此 B 一定是重言式. □

定理 1.1.2 设 A 为含有命题变元 P_1，P_2，…，P_n 的公式，而 A_1，A_2，…，A_n 为任意公式. 若 A 为重言式，则在 A 中出现 P_i 的每一处代以 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$后得的 B 也是重言式.

证：对于包含在 A_1，A_2，…，A_n 中所有命题变元的任何一种指派，A_1，A_2，…，A_n 有确定的真值，这些真值组成了 P_1，P_2，…，P_n 的某一种指派，此时 A 取真值 T，也就是说，对于包含在 A_1，A_2，…，A_n 中命题变元任何一种指派，B 均取真值 T，从而 B 是重言式. □

例 1.1.10 对于任意公式 A,B,C，下列公式均为重言式：

（1）$(A\wedge B)\vee\neg(A\wedge B)$;

（2）$A\to((A\vee B)\to \mathrm{A})$;

（3）$(A\to(T\to C))\to((A\to T)\to(A\to C))$;

（4）$(\neg(A\vee \mathrm{C})\to\neg B)\to(B\to(A\vee \mathrm{C}))$.

这由例 1.1.9 及定理 1.1.2 即明. ■

对于重言式 A,B，下列性质是显然的.

性质 1.1.1 若 A 是重言式，则 $\neg A$ 是矛盾式，且 $\neg\neg A$ 是重言式.

性质 1.1.2 若 A,B 是重言式，则 $A\wedge B, A\vee B, A\to B, A\leftrightarrow B$ 均为重言式.

习题

1. 将下面的复合命题译成符号：
   （1）如果生产任务一定并且生产效率有所提高，那么生产时间必然会减少.
   （2）只要风调雨顺，农业就会获得大丰收.
   （3）如果太阳没有出来，则或者下雨或者阴天而且温度也下降.
   （4）如 X 是有理数而且 Y 是整数，则 Z 不是实数.
   （5）或者你没有给我写信，或者它在路上丢失了.
   （6）如果你给我写了信，那么信在路上丢失了.
   （7）两数之和是偶数当且仅当两数均为偶数或两数均为奇数.
   （8）如 Y 是整数，则 Z 不是实数，只要 X 是有理数.
   （9）说逻辑枯燥无味和毫无价值，这是不对的.
   （10）指南针永指南北，除非它旁边有磁铁.
2. 给定命题“$P\to Q$”，我们称“$\neg Q\to\neg P$”为它的逆否命题. 可以证明一个命题与其逆否命题具有相同的含义. 对下述命题，试给出其逆否命题的含义：
   （1）如果 $a\times b=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$.
   （2）如果张三生病了，那么就由李四去出差.
3. 试构造出下列公式的真值表：
   （1）$(\neg P)\wedge(\neg Q)$；
   （2）$\neg((P\to Q)\to(\neg(Q\to P)))$；
   （3）$(P\to(Q\to R))$；
   （4）$((P\wedge Q)\to R)$；
   （5）$((P\leftrightarrow(\neg Q))\vee Q)$；
   （6）$((P\wedge Q)\vee(R\vee S))$.
4. 下列各对公式具有相同的真值表吗？
   （1）$((\neg P)\vee Q)$，$(P\to Q)$；
   （2）$((\neg P)\to(Q\vee R))$，$((\neg Q)\to((\neg R)\to P))$.
5. 下列公式是否为重言式？
   （1）$(P\to((P\to(Q\to P))\to P))$；
   （2）$((Q\vee R)\to((\neg R)\to Q))$；
   （3）$((P\wedge(\neg Q))\vee((Q\wedge(\neg R))\vee(R\wedge(\neg P))))$；
   （4）$((P\to(Q\to R))\to((P\wedge(\neg Q))\vee R))$；

1.2 公式的等价关系

1.2.1 等价

定义 1.2.1 设 A 与 B 是公式，若 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B **等价**，记为 $A\Leftrightarrow B$.

例 1.2.1 $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$, $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$.

证：事实上，因 $p\wedge q\leftrightarrow q\wedge p$ 是重言式（可用构造真值表法验证），再由 1.1 节定理 1.1.2 即得 $A\wedge B\leftrightarrow B\wedge A$ 是重言式，从而 $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$. 对于 $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$ 可类似证之. ■

应该指出的是，“$\Leftrightarrow$”不是连接词，“$A\Leftrightarrow B$”不是公式，它表示 A 与 B 间的一种关系.

定理 1.2.1 设 A 与 B 是公式，若 $A\Leftrightarrow B$，则对于 A，B 中命题变元的任一真值指派，A 与 B 的取值相同，反之亦然.

证：若 $A\Leftrightarrow B$，则 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，于是对于 A，B 中命题变元的任一真值指派，A 与 B 的取值相同．反之，若对于 A，B 中命题变元的任一真值指派，A 与 B 的取值相同，则 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，从而 $A\Leftrightarrow B$． □

例 1.2.2 为方便计，我们约定以 T，F 分别记重言式与矛盾式，则有

（1）$A\wedge T\Leftrightarrow A$， $A\vee F\Leftrightarrow A$；

（2）$A\wedge\neg A\Leftrightarrow F$，$A\vee\neg A\Leftrightarrow T$；

（3）$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$， $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$．

证：（1）由 $T\wedge T$ 为 T，$F\wedge T$ 为 F，$T\vee F$ 为 T，$F\vee F$ 为 F 即明．

（2）由例 1.1.9（1），（2）及定理 1.1.2 直接得到．

（3）由定理 1.1.2，只须证 $A\wedge(B\vee C)\leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$是重言式，即 $A\wedge(B\vee C)$与$(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$真值相同．列真值表很容易证明，此处略去．另一部分类似可证． ■

例 1.2.3 证明：

（1）$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$；

（2）$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)$．

其证明类似于例 1.2.2，留作练习． ■

1.2.2 等价代换

定理 1.2.2 设 X 为公式 A 的一个子公式，$Y\Leftrightarrow X$．若 B 是在 A 中一处或多处出现的 X 代以 Y 所得的公式，则 $B\Leftrightarrow A$．

证：我们欲证 $B\leftrightarrow A$ 是重言式，对包含于其中的一切命题变元给予一种真值指派，B 与 A 的差别仅在于 X 的某些位置上是 Y，而 X 与 Y 所取真值相同，故 B 与 A 的取值必相同，因而 $B\leftrightarrow A$ 取值 T．又由于真值指派的任意性，所以 $B\leftrightarrow A$ 恒取值 T，即 $B\leftrightarrow A$ 是重言式，从而 $B\Leftrightarrow A$． □

例 1.2.4 试证：

（1）$A\vee T\Leftrightarrow T$；

（2）$A\Leftrightarrow A\vee A$；

（3）$A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$， $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$；

（4）$\neg\neg A\Leftrightarrow A$．

证：（1）$A\vee T\Leftrightarrow (A\vee T)\wedge T$ （例 1.2.2（1））

$\Leftrightarrow (A\vee T)\wedge(A\vee\neg A)$ （例 1.2.2（2））

$\Leftrightarrow A\vee(T\wedge\neg A)$ （例 1.2.2（3））

$\Leftrightarrow A\vee\neg A$ （例 1.2.2（1））

$\Leftrightarrow T$． （例 1.2.2（2））

（2）$A\Leftrightarrow A\vee F$ （例 1.2.2（1））

$\Leftrightarrow A\vee(A\wedge\neg A)$ （例 1.2.2（2））

$\Leftrightarrow (A\vee A)\wedge(A\vee\neg A)$ （例 1.2.2（3））

$\Leftrightarrow (A\vee A)\wedge T$ （例 1.2.2（2））

$\Leftrightarrow A\vee A$． （例 1.2.2（1））

（3）$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow (A\wedge T)\vee(A\wedge B)$ （例 1.2.2（1））

$\Leftrightarrow A\wedge(T\vee B)$ （例 1.2.2（3））

$\Leftrightarrow A\wedge T$ （例 1.2.2（1））

$\Leftrightarrow A.$ （例 1.2.2（1））

另一部分类似证之.

（4）与上面证法类似. ■

性质 1.2.1 若 $A\wedge B\Leftrightarrow C\wedge B$，$A\vee B\Leftrightarrow C\vee B$，则 $A\Leftrightarrow C$.

证：$A\Leftrightarrow A\vee(A\wedge B)$ （例 1.2.4（3））

$\Leftrightarrow A\vee(C\wedge B)$ （题设及定理 1.2.2）

$\Leftrightarrow (A\vee C)\wedge(A\vee B)$ （例 1.2.2（3））

$\Leftrightarrow (A\vee C)\wedge(C\vee B)$ （题设及定理 1.2.2）

$\Leftrightarrow (C\vee A)\wedge(C\vee B)$ （例 1.2.1）

$\Leftrightarrow C\vee(A\wedge B)$ （例 1.2.2（3））

$\Leftrightarrow C\vee(C\wedge B)$ （题设及定理 1.2.2）

$\Leftrightarrow C.$ （例 1.2.4（3）） □

性质 1.2.2 （1）若 $A\wedge B\Leftrightarrow C\wedge B$，$A\wedge\neg B\Leftrightarrow C\wedge\neg B$，则 $A\Leftrightarrow C$.

（2）若 $A\vee B\Leftrightarrow C\vee B$，$A\vee\neg B\Leftrightarrow C\vee\neg B$，则 $A\Leftrightarrow C$.

证：类似于性质 1.2.1 的证明（从略）. □

例 1.2.5 证明：

（1）$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$；

（2）$\neg A\wedge\neg B\Leftrightarrow\neg(A\vee B)$，$\neg A\vee\neg B\Leftrightarrow\neg(A\wedge B)$.

利用性质 1.2.1 即可证得. ■

1.2.3 对偶性

定理 1.2.3 设 A 为仅含连接词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 的公式，将 A 中的 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换，命题变元以其否定代之得 A^*，则 $A^*\Leftrightarrow\neg A$.

证：对出现在 A 中的连接词个数进行归纳证明.

基始：$n=0$（不含连接词），此时 A 仅由一个命题变元比如 p 组成，于是这里的 A^* 是 $\neg p$，使得平凡地有 $A^*\Leftrightarrow\neg A$.

归纳：假设 $n>0$，A 有 n 个连接词，并且对含有少于 n 个连接词的每个仅含 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 的公式结论均成立. 今分三种情况考虑.

情况 1：A 为公式 $\neg B$，其中 B 有 $n-1$ 个连接词，依归纳假设，$B^*\Leftrightarrow\neg B$，故

$$A^*\Leftrightarrow\neg B^*\Leftrightarrow\neg(\neg B)\Leftrightarrow\neg A.$$

情况 2：A 为公式 $B\wedge C$，其中 B 与 C 均为连接词个数少于 n 的公式，于是

$$A^*\Leftrightarrow B^*\vee C^*\Leftrightarrow\neg B\vee\neg C\Leftrightarrow\neg(B\wedge C)\Leftrightarrow\neg A.$$

情况 3：A 为公式 $B\vee C$，类似于情况 2，其区别在于它要用到例 1.2.5（2）第一部分，而情况 2 是用到例 1.2.5（2）的第二部分. □

系 1.2.1 若 A 仅含 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 及 T，F，而将 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换，T 与 F 互换，命题变元与它本身的否定互换得 A^*，则有 $A^*\Leftrightarrow\neg A$.

这由定理 1.2.3 立得.

定义 1.2.2 设 A 为仅含连接词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 的公式，将 A 中的 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换，T 与 F 互换，

所得的公式记为 A^d，称为公式 A 的**对偶**.

系 1.2.2 若 $A\Leftrightarrow B$，则 $A^d\Leftrightarrow B^d$.

事实上，$A^*\Leftrightarrow\neg A\Leftrightarrow\neg B\Leftrightarrow B^*$，再由定理 1.1.2 即得 $A^d\Leftrightarrow B^d$.

由系 1.2.2 与前面诸例立即有以下**等价关系表**：

$E_1: A\wedge A\Leftrightarrow A,\ A\vee A\Leftrightarrow A$	幂等律
$E_2: (A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C),\ (A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$	结合律
$E_3: A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A,\ A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$	交换律
$E_4: A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$	分配律
$E_5: A\wedge T\Leftrightarrow A,\ A\vee F\Leftrightarrow A$	同一律
$E_6: A\wedge F\Leftrightarrow F,\ A\vee T\Leftrightarrow T$	囿　律
$E_7: A\wedge\neg A\Leftrightarrow F,\ A\vee\neg A\Leftrightarrow T$	互补律
$E_8: A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A,\ A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$	吸收律
$E_9: \neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B,\ \neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$	德·摩根律
$E_{10}: \neg\neg A\Leftrightarrow A$	双重否定律
$E_{11}: A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$	
$E_{12}: A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)$	

值得指出的是，我们上面是从 E_3，E_4，E_5，E_7 出发去推出 E_1，E_2，E_6，E_8，E_9，E_{10} 的，这是后面布尔代数独立条件问题的基础.

系 1.2.3 如以 $\bigwedge_{i=1}^{n}A_i$，$\bigvee_{i=1}^{n}A_i$ 分别记 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n$，$A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n$，则

（1）$\bigwedge_{i=1}^{n}(\neg A_i)\Leftrightarrow\neg(\bigvee_{i=1}^{n}A_i)$；

（2）$\bigvee_{i=1}^{n}(\neg A_i)\Leftrightarrow\neg(\bigwedge_{i=1}^{n}A_i)$.

这是德·摩根律的推广，利用定理 1.2.3 与定理 1.2.2 即可得到它.

例 1.2.6 试化简公式$(\neg A\wedge(\neg B\wedge C))\vee(B\wedge C)\vee(A\wedge C)$.

解：

原式 $\Leftrightarrow(\neg A\wedge(\neg B\wedge C))\vee((B\vee A)\wedge C)$	分配律
$\Leftrightarrow((\neg A\wedge\neg B)\wedge C)\vee((B\vee A)\wedge C)$	结合律
$\Leftrightarrow((\neg A\wedge\neg B)\vee(B\vee A))\wedge C$	分配律
$\Leftrightarrow(\neg(A\vee B)\vee(B\vee A))\wedge C$	德·摩根律
$\Leftrightarrow T\wedge C$	互补律
$\Leftrightarrow C.$	同一律

■

习题

1．证明下列公式对是等价的：

（1）$(P\to Q), ((\neg Q)\to(\neg P))$；（2）$((P\vee Q)\wedge R), ((P\wedge R)\vee(Q\wedge R))$；

（3）$(((\neg P)\wedge(\neg Q))\to(\neg R)), (R\to(Q\vee P))$；（4）$(((\neg P)\vee Q)\to R), ((P\wedge(\neg Q))\vee R)$.

2．设 A，B，C 是任意公式，试证下列每对公式是等价的：

（1）$(A\to B)\wedge(C\to B), A\vee C\to B$；（2）$\neg(A\leftrightarrow B), (A\vee B)\wedge\neg(A\wedge B)$.

3．用定理 1.2.2 证明公式$((\neg(\neg P\vee Q))\vee R)$与$((P\to Q)\to R)$等价.

4. 使用定理 1.2.2 及系 1.2.3 证明公式$((\neg(P\vee(\neg Q)))\to(Q\to R))$与下列每一个公式等价，并写出其对偶式.

(1) $((\neg(Q\to P))\to((\neg Q)\vee R))$;　(2) $(((\neg P)\wedge Q)\to(\neg(Q\wedge(\neg R))))$;

(3) $((\neg((\neg Q)\vee R))\to(Q\to P))$;　(4) $(Q\to(P\vee R))$.

5. 试化简下列公式:

(1) $((P\to Q)\leftrightarrow((\neg Q\to\neg P))\wedge R$;　(2) $P\vee(\neg P\vee(Q\wedge\neg Q))$;

(3) $(P\wedge(Q\wedge S))\vee(\neg P\wedge(Q\wedge S))$.

1.3 范式

1.3.1 范式

定义 1.3.1 命题变元或命题变元的否定称为**文字**，有限个文字的析取式称为**子句**，有限个文字的合取式称为**短语**.

显然一个文字既是子句也是短语.

定义 1.3.2 有限个短语的析取式称为**析取范式**，有限个子句的合取式称为**合取范式**.

特别地，一个文字，一个子句，一个短语既是析取范式，又是合取范式.

例 1.3.1 $(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$是合取范式，$(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg R)\vee(\neg Q\wedge R)$是析取范式. ■

定理 1.3.1 对于任意公式 A，都存在等价于它的析取范式与合取范式.

证：对于公式 A 通过如下算法即可得出等价于它的范式：

步 1 使用等价关系表中的 E_{11}，E_{12}，可将 A 中的连接词→，↔去掉.

步 2 对于仅含 ¬，∧，∨ 的公式，重复运用德·摩根律及双重否定律将 ¬ 直接移到各命题变元前面.

步 3 反复使用分配律即可得到 A 的等价范式. □

例 1.3.2 设 A 为$(P\wedge(Q\to R))\to S$，则

$$
\begin{aligned}
A&\Leftrightarrow\neg(P\wedge(\neg Q\vee R))\vee S\\
&\Leftrightarrow\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee S &&（析取范式）\\
&\Leftrightarrow(\neg P\vee S)\vee(Q\wedge\neg R)\\
&\Leftrightarrow(\neg P\vee S\vee Q)\wedge(\neg P\vee S\vee\neg R). &&（合取范式）
\end{aligned}
$$
■

例 1.3.3 因 $P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge P)\vee(P\wedge R)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R)$，故 $P\vee(Q\wedge R)$与$(P\wedge P)\vee(P\wedge R)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R)$均为 $P\vee(Q\wedge R)$的析取范式，这表明一个公式的析取范式不是惟一的，同样地可找到合取范式不惟一的例子. ■

1.3.2 主析取范式

定义 1.3.3 设 P_1，…，P_n 是 n 个命题变元，一个短语若恰好包含所有这 n 个命题变元或其否定，二者不能同时出现，且仅有一个出现，并要求排列顺序与 P_1，…，P_n 的顺序一致，那么称此短语为关于 P_1，…，P_n 的一个**极小项**.

例 1.3.4 对命题变元 P，Q，R 来说，$P\wedge\neg Q\wedge R$，$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$，$P\wedge Q\wedge R$ 都是极小项，但 P，$\neg P\wedge Q$ 不是极小项，而 $\neg P\wedge Q$ 对 P，Q 来说是极小项. ■

性质 1.3.1 对于 n 个命题变元来说，其可能不同的极小项共有 2^n 个.

这是显然的.

性质 1.3.2 对于 n 个命题变元的 2^n 个极小项的某一个来说，有且仅有一组真值指派，