远震分析补充讲义　目录

远震分析补充讲义

前　　言

1982年8月份在大连将举办我国基本地震台测震分析学习班。为了辅助学员的学习与在台上自修，特汇编了这一册补充讲义。

第一部分的主要内容是从比较浅近的数学和物理概念出发，介绍物体的弹性和弹性模量以及振动、波动的基本物理知识和数学表达式。具有中学程度的台站工作人员即可接受。

第二部分的主要内容是从数学分析与偏微分出发，介绍弹性力学的基础知识，以便理解地震波动方程等定量的推导，为台站上具有大专程度的工作人员自学与进修的参考读物。

第三部分用比较通俗易懂的方式和某些图形介绍地震面波和导波的基础知识。

这份材料在1980—81年向来北京进修的地震台站工作人员当中曾介绍过，且收到一定的效果。在准备此稿的过程中曾得到房明山、左兆荣、曲韵笙、张曼丽等同志的帮助，特表示感谢。

郭履灿识

1982年7月11日于北京

第一部分　地震波的基础知识

§1. 物体的弹性和弹性模量

地震波的传播，也就是弹性振动在介质中的传播。地震波传播的速度决定于介质的性质，即介质的密度与弹性模量。地震波的振幅衰减还与介质的流变学特性有关。在液体内部，因液体无切向形变，只能传播纵波。而固体介质既能传播纵波，又能传播横波。为此，需研究地震波传播的各种特性，就必须了解物体处于不同物理状态时，它的弹性与弹性模量。

一）物体的弹性和塑性

物质有三态：即气态、液态和固态。处于不同物态的物体具有不同的特性。比如，气体没有固定形状，不能承受切应力（剪应力），但受到压力后，可以压缩。在压力撤消后可以再膨胀。气体没有切应变，只有压缩和膨胀。液体同样不能承受切应力，受到压力后仅有微小的压缩。体积的膨胀和压缩叫做容积形变。固体在外力作用下，它既能发生切应变又能发生容积形变。液体和气体只能发生容积形变。

物体的弹性表现在：受外力后发生的形变，以及在外力取消后形变的恢复程度。

因固体易于发生形变，弹性和塑性的区别很明显。弹性体系指外力取消后，随即恢复原状的固体。弹性体的形变是暂时的，这种暂时性的形变叫弹性形变。

塑性体系指外力去掉后，物体仍保持形变或残存着部分的形变，这种不能恢复原形的固体称为塑性体。它的永久形变叫做塑性形变。

固体的弹性有一定限度，外力的增大有一个极限值叫做弹性极限。外力超过弹性极限，固体就处于塑性阶段。为研究在外力作用下物体发生弹性和塑性的分界状态，必须研究在平衡状态下，物体内部各部分因形变产生的内力分布的情况。于是，我们提出应力（亦称为胁强 Stress）的概念来表述物体内力分布的关系。

应力系指单位面积上作用的内力。垂直于固体截面的应力叫正应力，平行于截面的应力叫切应力。

应力的定义公式为：

$P=\frac{F}{S}$，式中P表示应力，F表示作用于S面法线方向的力，S表示受作用力的横截面积，单位通常用千克重/厘米^2，在国际单位制中用牛顿/米^2，或用巴与千巴。

应力大小能反映出发生形变的物体内部的紧张程度。例如在外力作用下，一根棒被拉长重新取得平衡后，在棒内任取一截面BC，见图1，1所示，由平衡条件和牛顿第三定律知：

由BC分开的棒两端有张力相互作用，对全棒来说，张力是内力，对其中一段棒来说，张力又是外力，其值与外加拉力F相等。

把同样大的外力作用在横截面积不同的棒上，全棒上的张力处处相等，但引起的纵向形变并不相同。说明仅只用外力（即张力）还不能充分反映出发生长度形变时，棒内各截面间的相互作用力的效果，必须籍助于应力来描述这种作用效果。

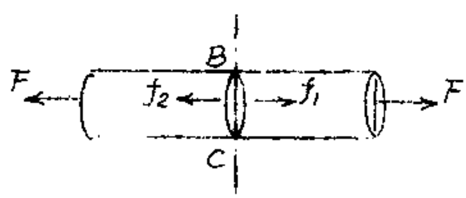

图1，1 物体发生纵向形变图

一般物体，当应力作用达到维持弹性的最大值 p_0 时，叫做弹性限度。超过 p_0 之后，应力与应变就不呈正比关系了。如果应力超过 p_0，即使外力撤除之后，应变也不能完全恢复到零，即还有剩余的形变。称 p_0 为弹性限度。

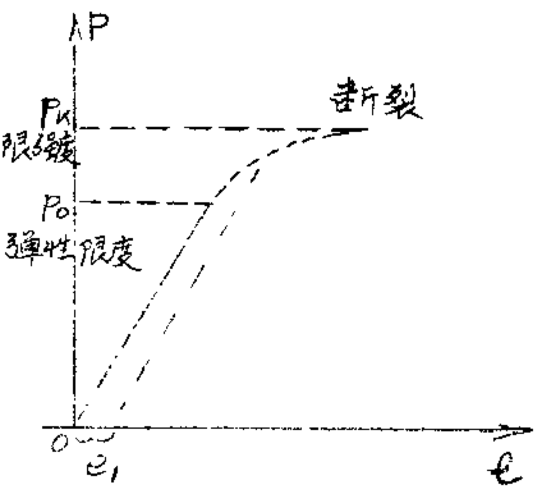

图 1.2　物体的形变与所加应力变化的关系图

当应力超过弹性限度，物体继续发生形变，当外力撤除之后，所发生的形变也不能完全消除，还剩下形变 e_1，如图 1.2 所示，这个形变 e_1 称为剩余形变。

当应力超过弹性限度 p_0 之后继续加大，又达到某个临界值 p_k，应力再超过 p_k，物体即发生断裂，这个临界值 p_k 称为极限强度。

物体在外力作用下是否能产生弹性形变，与外力的大小和作用时间的长短有关。当外力不太大且作用时间短促时，物体往往产生弹性形变。例如远处来的地震波通过地球介质时，可将地球看作是弹性体，这是因为地震波传得很快，其作用力是很短暂的。而地球介质对于地质力的长期缓慢作用就不能当作是弹性体来看待，在长时期地质力的作用下地球介质就具有一定的塑性和可流动性。

二）　胡克定律与弹性模量

英国物理学家胡克（R. Hooke, 1635—1703）经实验得出，在弹性限度以内，弹性物体的应力与应变成正比，其比值称

为弹性模量。例如，横截面为S的棒，见图1．1所示，受到外力F，将它拉长，该棒的原长为L，伸长ΔL，则称相对伸长ΔL/L为物体的线应变。在这种弹性伸长的情况下，胡克定律的表达式为

$$N=\frac{F}{S}=E\,\Delta L/L \tag{1}$$

式中P为拉应力，F为将棒拉长的外力，E为杨氏弹性模量，表示物体的弹性性质。以上称为胡克定律，是1660年发现，于1676年公开发表的。

其中杨氏弹性模量 $E=\frac{F}{S}\Big/\Delta L/L$ 是物体所受应力与纵向应变的比值。

当其物体在纵向拉长时，其横截面积就会缩小，设物体在受力以前的横截面直径为d，经受力缩短Δd，则其相对的直径缩短为$\Delta d/d$。法国物理学家泊松（S．D．Poisson）定义了一个专门的比值

$$\text{泊松比：}\sigma=\frac{\text{横截面直径相对缩短}}{\text{长度相对伸长}}=\frac{\Delta d/d}{\Delta L/L} \tag{2}$$

泊松比σ也是表征物体弹性的重要参量。

当其长棒受到压应力其长度收缩时，棒的横截面直径则相对增长，这时ΔL为负，Δd为正。

当其物体受到切向应力T发生切应变时，如图1．3所示

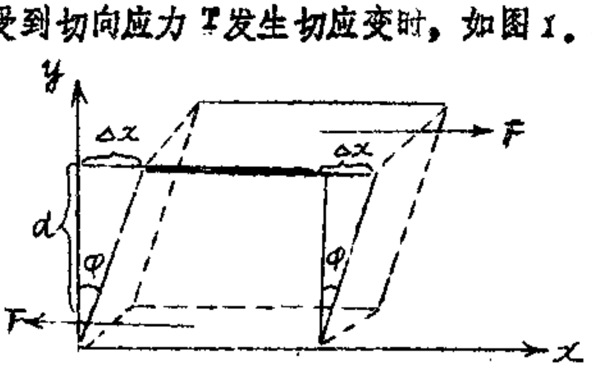

图1、3　物体切变示意图

设长方体上下两面的垂直距离为 d，所受切向应力为 $T = F/S$，S为上下两面的面积。长方形物体上方在 x 方向上的位移为 Δx，这时切应变可用切变角 φ 的弧度值来表示

$$\tan\varphi = \Delta x/d \approx \varphi$$

称为切应变，即表示垂直于底面那条直线所转的角度。这时可定义切变弹性模量 $\mu = T/\varphi = \dfrac{F/S}{\varphi}$，它可以表示物体内的各层间发生相对移动的难易程度。当物体所受切向应力足够大时，物体也会发生断裂。在地震发生的过程中切变模量 μ 起到了重要的作用。

固体、液体、气体受到外力，发生体积变化（即容变）时，如图1.4所示，设一物体原有体积为 V，放于水中，在活塞下压时，因各方向物体所受静压强相等，其压强为 P，物体缩小体积 ΔV，但其形状则基本上不变，这时胡克定律可以表示为

$$P = -k\frac{\Delta V}{V} \tag{8}$$

式中 k 为容积弹性模量，对一定的物体在其弹性限度内为常数。$\Delta V/V$ 表示物体的体积形变或称为体积膨胀率以 θ 表示

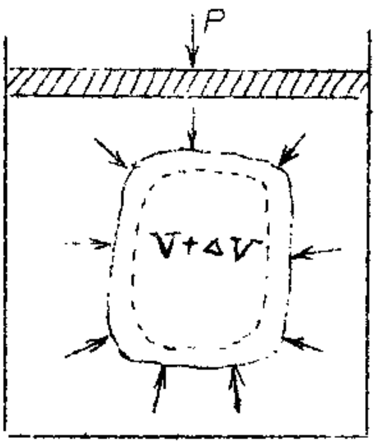

图1.4 容积形变图。在容器中的物体受到压强为 P的作用力，体积缩小 ΔV。

在外力作用下，物体发生的各种形变都可以归结为以上三种基本的形变，在讨论地震学与地震波的传播问题时，这三种弹性模量也是很重要的。

在地震波的研究中，特别是在远震的情况下，通常都假定地球介质是连续的，均匀的和各向同性的，假设物体的变形是很小的，物体是完全弹性的。这些假设与在弹性理论中的基本假设有类似的情况。

在弹性理论中的几个基本假设如下：

(1)假设物体是连续的——物体内部由连续介质组成。物体中没有空隙，因此物体中的应力、应变、位移等量都是连续的，可以用坐标的连续函数表示。虽然实际上所有的物体均由分子构成，但分子的大小及分子间的距离与物体的尺寸相比是很微小的，故可以不考虑物体内的分子构造。根据这个假设所推得的结果与实验结果是符合的。

(2)假设物体是均匀的和各向同性的——物体内部各点与各方向上的介质相同，物体各部分的物理性质是相同的。因此，物体的弹性常数（弹性模量和泊松系数）不随坐标位置和方向而变化。在某一个地层中可以近似地看成是均匀的。特别是对于周期较大的地震波，一个波长达几十公里，岩石的不均匀性就表现不出来。

(3)假设物体是完全弹性的——物体在外加因素（荷载，温度变化等）的作用下引起变形，在外加因素去除后，物体完全恢复其原来形状而没有任何剩余形变。或者说，当任一点上的应变分量是由该点的应力分量所决定时，即叫作完全弹性。同时还假定介质受到

外力变形时，应力与应变成正比。即服从胡克（Hook）定律。地震波速度快，每秒几公里，当地震波通过某一部分介质时，应力不大，时间很短，介质的非完全弹性还来不及表现出来。

(4)假设物体的变形是很小的——在外力作用下，物体变形所产生的位移，与物体的尺寸相比是很微小的。在微小形变的情况下，弹性理论推导中的微分方程将是线性的。

基于上述基本假设的弹性理论，称为"线性弹性理论"。这也就是本册所要阐述的主要内容。

如果物体中应力超过弹性限度，物体将处于塑性状态。此时应力与应变不是线性关系。研究物体处于塑性状态时的应力与应变的学科，称为塑性理论。当物体受力超过它的屈服点产生显著的塑性变形时。其应力和应变一般不成正比关系，且其相互对应关系也不是唯一的。而与受力过程、工作温度、受载时间等因素有关。其情况远比在弹性限度内为复杂。常需应用数学分析并结合各种具体的试验条件以进行研究。

§2. 振动和简谐振动

振动是自然界中非常普遍的一种运动形式。通常把一个物体在一定位置附近做往复运动称为振动。例如钟摆在振动，活塞在汽缸中的运动，弦乐器的琴弦在振动，地震波就是振动的传播。在这些振动现象中我们观测到物体位移或角位移在随时间往复变化。它属于机械振动。而电磁场的相互作用引起的电磁振荡同样是振动，本

书着重讨论与地震有关的机械振动规律。

振动　在物理学中定义为：一个物理量的值在观测时间内依次经过极大值和极小值而变化，这种变化状态称为振动。作振动的物理量简称为振动量，如果振动量是一个电学量，如电流强度或电压，此振动即为电振动；如果振动量是一个力学量，如位移或角位移，此振动即是机械振动。

振动过程可用数学函数形式来表示，任意瞬间 t 都对应一个振动量 y 值，则 y 值为时间的函数：$y=\varnothing(t)$
函数 $\varnothing$ 应满足振动定义中的规定，即在观测时间内依次经过极大值和极小值而变化。

简谐振动（亦称“谐振动”）　是最重要、最基本的一种振动。任何非稳态振动都可看成是由几个或多个简谐振动的叠加（或称合成）。从天然地震观测到的地球振动一般是非稳态的振动，但可以将其看做是简谐振动的叠加，因此，研究简谐振动的机理和规律以及叠加原理是非常重要的。

简谐振动的理想化模型是弹簧振子。即把振动的物体简化为一质点，把具有弹性力能传播振动的介质简化为质量可以忽略的弹簧，这种系统在振动时，其规律就是简谐振动。

弹簧振子在振动过程中，按照胡克定律，其所受弹性力 F 和弹簧伸长 x 的关系是：

$$F=-kx \tag{4}$$

式中 k 为弹簧倔强系数，伸长 x 即是振子的平衡位置为起点的位移（平衡位置即振动的中心位置，此位置时弹性力为零）；负号表示弹性力和位移方向相反，此弹性力即是回复力。

根据牛顿第二定律，振子的运动加速度 a

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x \tag{5}$$

因为m、k都是正数，令 $\frac{k}{m}=\omega^2$ 来表示，代入上式得 $a=-\omega^2x$

或 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ (8)只要在弹性限度内，上式总是成立的。

因此，概括出弹簧振子的振动特征是：加速度和位移时刻反向而成正比。此即为简谐振动的运动学规律。物体要做简谐振动必须是它受到的作用力与位移反向而成正比。此即为简谐振动的动力学条件。

微分方程式(8)的解是：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{6}$$

因为 $\cos(\omega t+\varphi)=\sin(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$ 如令

$$\varphi'=\varphi+\frac{\pi}{2}$$

则 可改写为

$$x=A\sin(\omega t+\varphi') \tag{7}$$

(6)、(7) 式为简谐振动的运动方程，它表示出位移和时间的关系，从而，简谐振动的运动学特征是：位移是时间的余弦或正弦函数。

以上可概括出简谐振动的定义是：某物理量随时间按照正弦函数或余弦函数变化的振动称为简谐振动。一般可用(6)式表达。

简谐振动的速度和加速度分别是时间的正弦或余弦函数，即将

式(6)对时间求导数：

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\ \sin(\omega t+\varphi\ )$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi\ )=-\omega^2 x$$

现在来说明谐振动方程 $x=A\cos(\omega t+\varphi\ )$ 的各项物理意义。

为研究方便，通常将一质点M沿园周做匀速运动在某一轴上的投影表示出简谐振动的图解，如图示：

点M在 x 轴上投影M′即按 $x=A\cos\omega t$ 规律变化。

点M在 y 轴上投影M″即按 $y=A\sin\omega t$ 规律变化。

式中A是作简谐振动的物体离开平衡位置的最大位移，它即为园O的半径，O点又是振动的平衡位置。A又称为简谐振动的振幅矢量。

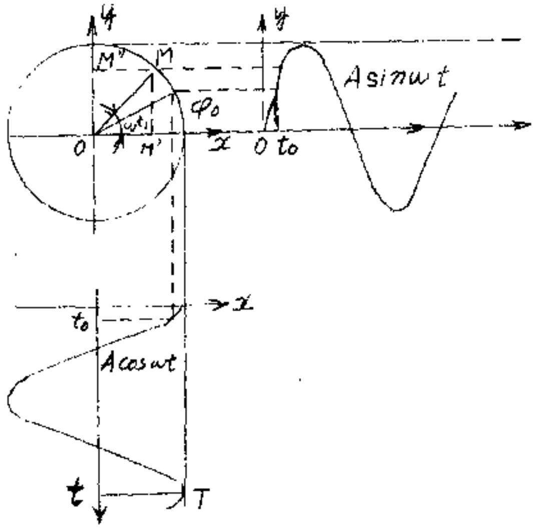

图1.5 简谐振动的示意图

振幅 A是简谐振动的最大位移，单位用米、厘米或微米。振幅大小反映了振动强弱，它与振动的能量密切相关。

位相（或称周相）角 φ 即是点M在时间 t 内通过的角位移（弧度）。若旋转的角度为 ω，则 $\varphi=\omega t$，t 是从M点通过 x 轴时算起。若从某一时刻 t_0 算起，则 $\varphi_0=\omega t_0$ 是距 x 轴的初始角位移。

称为初位相角（初周相角），则振动的位相角$\varphi = \omega t + \varphi_0$ 振动方程由

$$x = A\cos\omega t \qquad \text{改写做} \qquad x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$y = A\sin\omega t \qquad \qquad \qquad y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

从振动方程可看出：位相角φ确定振动位移x在时刻t的数值。

初位相角φ_0是简谐振动的初始条件，是$t = 0$时的相角。对于频率相同的两个谐振动来说，若它们有不同的初相角φ_1和φ_2，就有恒定相位差$\dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi}$，表现出两振动的步调先后不一；若位相差$\varphi_1 - \varphi_2$为零或$2\pi$的整数倍（$2k\pi$）时，两谐振动步调一致，称为同相，在叠加时，振动会加强；若相位角差$\varphi_1 - \varphi = \pi$或（$2k-1$）$\pi$时，两谐振动步调正相反，此大彼小，称为反相，在叠加时，振动会减弱。对于不同频率的两个谐振动来说，它们的位相差为：

$$\frac{(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)}{2\pi}$$

这个位相差不是恒定的而是随时间改变的，表现为两个谐振动的步调时而同相，时而反相。

周期　点M在时间T内沿园运动一周（$\varphi = 2\pi$）即其投影在x轴（或y轴上）往复一次，完成一次全振动，这段时间T即称为振动的周期，单位用秒。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega\text{称为角频率（或园频率）}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{或}\ \omega = 2\pi\nu$$

把周期的倒数ν称为频率

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$ 表示在单位时间内的振动次数。

单位用秒$^{-1}$即赫兹。

周期和频率都反映出振动的快慢。周期长，振动次数少，振动较慢；反之，振动周期短，振动次数多，振动较快。

简谐振动的圆频率由系统本身的性质（即惯性和弹性）决定。

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，m是振子的质量反映了系统的惯性大小，k是系统的倔强系数反映了系统的弹性大小。由此推出：

$$\text{周期 } T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{频率 } \nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

并且，在系统不受外力时即系统在内部弹性力作用下自由振动，可推知，系统的自由振动周期和频率完全由系统本身的固有特性决定。自由振动的周期称固有周期，自由振动的频率称为固有频率。

在不同的简谐振动系统中，因其系统特性不同，固有周期表达式不同，例如在摆角小于$5°$时，单摆的振动是简谐振动，它的圆频率$\omega^2=\frac{g}{L}$ 是由 $F=-\frac{mg}{L}\cdot x$

$$a=\frac{F}{m}x=-\frac{g}{L}x=-\omega^2 x$$ 导出

$$\text{固有周期 } T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

固有频率 $\nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$

可见单摆做谐振的固有周期和固有频率决定于摆长和当地的重力加速度。

简谐振动的能量　　以弹簧振子为简谐振动的模型。可知该系统在弹性力作用下具有弹性势能 E_p，取质点的平衡位置为势能零点，则弹性势能表达式为

$E_p=\frac{1}{2}kx^2$　　即为外力克服弹性力做功转化为系统的弹性势能。对于简谐振动的谐振子来说　$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

所以　$E_p=\frac{1}{2}kx^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$

E_p 的最大值为 $\frac{1}{2}kA^2$，最小值为零。

在任何时刻，振子的动能是

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

将　$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$　代入

所以 $E_k=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$　　(3)

再将　$\omega^2=\frac{k}{m}$　代入

所以 $E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$　　(9)

动能的最大值为 $\frac{1}{2}kA^2$ 或 $\frac{1}{2}m(\omega A)^2$ 这与速度的最大值 ωA 完全一致。在弹簧振子运动过程中，其动能在零与 $\frac{1}{2}kA^2$ 之间变化。

总之，弹簧振子在任何时刻的机械能为系统的动能与势能之和

$$E=E_k+E_p$$

$$E=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \qquad (10)$$

即 $E=\frac{1}{2}kA^2$ 或 $E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

可见弹簧振子体系的机械能在任何时刻都等于 $\frac{1}{2}kA^2$ 保持不变。在平衡位置时，E_p 为零动能 $E_k=\frac{1}{2}kA^2$；在最大位移处，E_k 为零，$E_p=\frac{1}{2}kA^2$；在其他位置，动能和势能都不为零，但其和等于 $\frac{1}{2}kA^2$。

现将在不同位移处的能量图示于右。

从关系式 $E=E_k+E_p$ 得

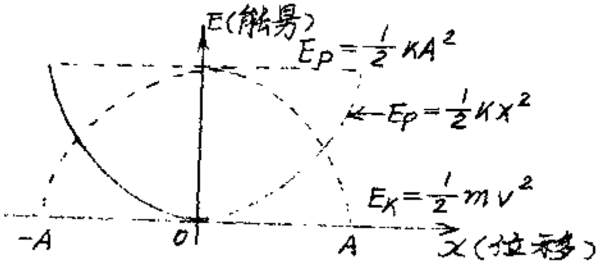

图1.6 质点振动位移与能量的关系图

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$$

可推知：$v^2=\frac{k}{m}(A^2-x^2)$

$v=\pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2-x^2)}$ 用此关系式能够更简便地求出质点在某一位移处速度的大小，但要根据具体情况来定速度方向，因为在同一位移处，质点可以向两个方向运动，所以速度可以是沿规定的正方向，也可以是沿负方向。

从 $E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ 关系式中可见：简谐振动总能量与振幅平方成正比，并不随时间变化。如图示

以上讨论，是在仅考虑系统只在弹性力作用下的运动，没有考虑耗散力对振子运动的影响。所以机械能在系统内相互转化而守恒。

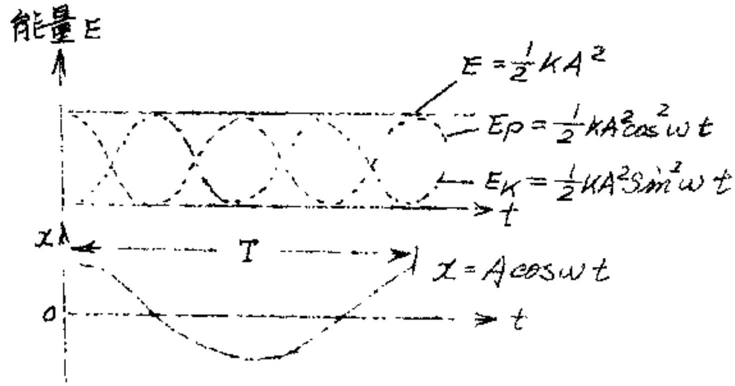

图1.7　弹簧振子的动能、势能和总能量随时间变化曲线

由于简谐振动中动能和势能随时间在迅速地变化着，因而引入平均动能和平均势能的概念很有用。平均动能和平均势能是指动能和势能对时间的平均值。因为动能和势能都随时间周期性地变化，故只要对一个周期求出平均值即可。用“$\langle\rangle$”代表对时间的平均值，则

$$\langle E_k\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)dt$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\langle\sin^2(\omega t+\varphi)\rangle=\frac{1}{4}m\omega^2A^2 \qquad (1)$$

$$\langle E_p\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)dt$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\langle\cos^2(\omega t+\varphi)\rangle=\frac{1}{4}kA^2 \qquad (2)$$

可利用$\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}[1-\cos2(\omega t+\varphi)]$得：

$$\langle\sin^2(\omega t+\varphi)\rangle=\frac{1}{2}\langle1-\cos2(\omega t+\varphi)\rangle$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\langle\cos2(\omega t+\varphi)\rangle=\frac{1}{2}$$

因为$\langle\cos2(\omega t+\varphi)$显然为零。同理

$$\langle\cos^2(\omega t+\varphi)\rangle=\frac{1}{2}$$