（本书是根据最新考试大纲编写的权威教材）

最新全国成人高考
实用教材
数学
（理工农医类）

成人高考命题研究组　编审

尚合伦　主编

世界知识出版社

最新全国成人高考实用教材

数　　学

（理工农医类）

成人高考命题研究组　编审
尚合伦　主编

世界知识出版社

责任编辑:张英娥
责任出版:车胜春

图书在版编目(CIP)数据
数学(理科)/尚合伦主编.-北京:世界知识出版社,1998.9
最新全国成人高考实用教材
ISBN 7-5012-1044-6

Ⅰ.数… Ⅱ.尚… Ⅲ.数学课-成人教育:高等教育-教材 Ⅳ.G723.46

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 25599 号

世界知识出版社出版发行
(北京东单外交部街甲 31 号 邮政编码:100005)
北京美通印刷厂印刷 新华书店经销

787×1092 毫米 16 开本 印张:16.25 字数:197 千字
1998 年 9 月第 1 版 1999 年 10 月第 2 次印刷 印数:5000-10000 册
ISBN 7-5012-1044-6/G·256 定价:25.00 元

前　言

《全国各类成人高等学校招生考试实用教材》丛书，是由成人高考命题研究组组织成人教育界对历年成人高考有专门研究的专家、教授，中学特级、高级教师及长期从事成人高考辅导工作、具有多年教学经验的第一线教师，根据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》精心编辑而成。

这套丛书紧扣新大纲，针对性更强，它对中学各科课程进行了精选和提炼，更适合成人在短期内更快更好地掌握各科基本知识、基本技能和提高综合运用知识解决问题的能力，满足成人通过短时间业余学习达到适应全国统考的要求，并取得较好成绩的目的。它是目前成人考生系统复习中学课程的首选好教材。

全套丛书按照新大纲和成人考生的特点，每章内容包括“复习要求”、“重点知识”、“复习重点”和“近几年命题情况”等。同时列举大量“例题”，为基础知识的运用作了示范，并通过解题过程帮助读者掌握解题方法和提高解题的综合能力。每一章后选择了大量习题，供读者复习时选用，以巩固本章所学知识。每章最后均有习题答案或提示，供读者参考。每册书后附综合练习试卷两套，供读者在学完本书后对本科知识的掌握作一自我检查。各类题目均按成人标准化考试的模式和要求编选。选择题和填空题占有较大的比重，解答题亦有充分的综合性和代表性。

全套丛书包括政治、语文、数学（文科）、数学（理科）、物理、化学、历史、地理、英语、人体解剖学和生理学 11 科，共 11 本。供参加各类成人高等学校（包括广播电视大学、职工高等学校、管理干部学院、教育学院、教师进修学院、独立设置的函授学院、普通高校举办的成人高等学历教育等）招生考试的考生和成人高考辅导班作为教材使用。

本册书是《全国各类成人高等学校招生考试实用教材》丛书《数学（理工农医类）》分册。由成人高考命题研究组编审，尚合伦老师主编。

成人高考命题研究组

一九九九年十月

目　　录

第一部分　代　数

第二部分　三　角

第三部分　立体几何

第四部分　解析几何

第一部分　代　数

第一章　数、式、方程和方程组

复习要求

1. 理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、倒数、算术平方根的概念，会进行有关计算。

2. 理解有关整式、分式、二次根式的概念，掌握它们的一些性质和运算法则。

3. 掌握一元一次方程、一元二次方程的解法，能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题。

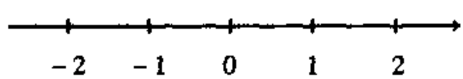
4. 会解有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个一元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组（主要指以下几种类型：用加减消元法可消去某个未知数，可消去二次项的，以及至少有一个方程可分解成一次方程的）。

重点知识

一、数

1. 实数：有理数和无理数统称实数。

2. 数轴：规定了原点、方向和长度单位的直线叫做数轴。如下图，实数集合与数轴上的点是一一对应的。



3. 相反数

只有符号不同的两个数，叫做互为相反数。零的相反数是零。

4. 倒数

1 除以某数的商称这个数的倒数。零没有倒数。

5. 绝对值

实数 a 的绝对值用符号 $|a|$ 表示。一个正数和零的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数。即

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

注意：$|a| \geq 0$

6. 平方根与算术平方根

(1) 如果 $x^2 = a(a \geq 0)$，那么 x 叫 a 的平方根；

(2) 正数 a 的正的平方根叫做 a 的算术平方根，记作 $\sqrt{a}$；零的算术平方根是零。

注意：$\sqrt{a} \geq 0 \qquad (a \geq 0)$

7. 非负数和非正数

若 $a \geq 0$，则 a 称为非负数。若 $a \leq 0$，则 a 称为非正数。

例如：$|a|$，$\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$，$a^2$ 等均为非负数。

二、式

1. 代数式:用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子。单独一个数字或字母也是代数式。

2. 代数式的值:用数值代替代数式里的字母,计算所得的结果。

3. 整式

(1) 整式的有关概念:由数字、字母相加、减、乘而成的代数式叫整式。数字和字母的积叫单项式。几个单项式的代数和叫多项式。

(2) 整式的运算:整式能够进行加、减、乘法的运算。整式运算符合交换律、结合律和分配律。

(3) 正整指数幂的运算法则:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^{m-n} \qquad (a \neq 0, m > n)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

(4) 常用乘法公式:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

(5) 多次式的因式分解:

常用方法:提取公因式法;公式法;分组分解法;十字相乘法以及求根法。

4. 分式

除式中含有字母的式子。分子和分母没有公因式的分式叫最简分式。

5. 二次根式

(1) 定义:式子 $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$,叫二次根式。

$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad (a \geqslant 0)$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

(2) 最简二次根式:

满足下列两个条件的二次根式叫最简二次根式。

① 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数;

② 被开方数不含分母。

(3) 分母有理化和分子有理化:

如果两个无理式的积是一个有理式,则称其中一个是另一个的有理化因式。

利用有理化因式可以把一个代数式中的分母(或分子)是无理式的情况化为有理式。

注意:二次根式运算的最后结果都要化为最简根式。

三、方程和方程组

1. 方程:含有未知数的等式叫方程。能使方程左右两边相等的未知数的值,叫方程的解。求方

程的解或说明方程无解的过程叫解方程。

(1) 同解原理：

① 方程的两边同时加上(或减去)一个数或同一整式，所得方程与原方程同解；

② 方程两边同时乘以一个不等于零的数，所得方程与原方程是同解方程。

(2) 一元一次方程 $ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$ 的解：

$$x = -\frac{b}{a}$$

注意：当 $a = 0$ 时，$ax + b = 0$ 不是方程。

当 $a = 0, b = 0$ 时，$x \in R$；当 $a = 0, b \neq 0$ 时，x 不存在。

(3) 一元二次方程：$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

① 求根公式：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

② 根的判别式：

$$\triangle = b^2 - 4ac.$$

当 $\triangle > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

当 $\triangle = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $\triangle < 0$ 时，方程无实数根。

③ 根与系数的关系：

设 x_1、x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ 的二根，

$$\text{则有}\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

若 $x_1 + x_2 = p, x_1 \cdot x_2 = q$，则 x_1, x_2 必是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两个根。

④ 一元二次方程的解法有：因式分解法、配方法、公式法等。

(4) 方程组的解法：

代入法或加减消元法。具体解法见例题。

本章复习重点

1. 理解数轴、相反数、绝对值、算术平方根的概念，会进行实数大小的比较，会求一个数的相反数；会求一个数的绝对值，知道算术根一定是非负数。

2. 理解二次根式的定义，在运用时能灵活运用有关的性质。

3. 会熟练运用一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式，求方程的解。会根据判别式 $\triangle = b^2 - 4ac$ 的值判断方程根的个数。会灵活运用根与系数的关系，解决有关问题。

4. 会用代入法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组。

典型例题

例 1. 选择题

(1) 以下四个式子可以表示实数 a、b 一定同时为 0 的是(D)

(A) $a + b = 0$ (B) $ab = 0$ (C) $a - b = 0$ (D) $a^2 + b^2 = 0$

解：$\because a^2 \geqslant 0$，　$b^2 \geqslant 0$　$a^2 + b^2 = 0$　$\therefore a = 0$ 且 $b = 0$

答：D

(2) 若 $\frac{x}{2|x|} = -\frac{1}{2}$ 则(　　)

(A) $x > 0$　　(B) $x < 0$　　(C) $x \leqslant 0$　　(D) $x \geqslant 0$

解：$\because \frac{x}{|x|} = -1$　　$\therefore x < 0$

答：B

(3) 若一个一元二次方程的两根分别是 2 和 -3，则这个方程是(　　)

(A) $x^2 + x - 6 = 0$　　(B) $x^2 - x - 6 = 0$

(C) $x^2 - x + 6 = 0$　　(D) $x^2 + x + 6 = 0$

解：$\because 2 + (-3) = -1$，　$2 \cdot (-3) = -6$

$\therefore$ 以 $2, -3$ 为根的方程是 $x^2 + x - 6 = 0$

答：A

(4) 二次方程 $2x^2 + 5x - 3 = 0$ 的两实根的倒数和是(　　)

(A) $-\frac{5}{3}$　　(B) $\frac{5}{3}$　　(C) $\frac{3}{5}$　　(D) $-\frac{3}{5}$

解：设方程 $2x^2 + 5x - 3 = 0$ 二根为 x_1, x_2

则 $x_2 + x_2 = -\frac{5}{2}$，　$x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{3}$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$$

答：B

(5) 已知方程 $3x^2 - 10x + m = 0$ 有二同号实根，则 m 的取值范围是(　　)

(A) $m \geqslant 0$　　(B) $m > 0$　　(C) $0 < m < \frac{26}{3}$　　(D) $0 < m \leqslant \frac{25}{3}$

解：$\triangle = 10^2 - 12m \geqslant 0$，且 $m > 0$，$\therefore 0 < m \leqslant \frac{25}{3}$

答：D

(6) 若关于 x 的实系数方程 $ax^2 - 2(a-3)x + a + 3 = 0$ 有两个不同的实数根，则 a 的取值范围是(　　)

(A) $a < 1$　　(B) $a > 1$

(C) $a < 1$ 且 $a \neq 0$　　(D) $a > 1$ 且 $a \neq e$

解：$\begin{cases} a \neq 0 \\ 4(a-3)^2 - 4a(a+3) > 0 \end{cases} \Rightarrow a < 1$ 且 $a \neq 0$

答：C

(7) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (p-1)x + p = 0$ 的两实根的平方和等于 6，则实数 p 值为(　　)

(A) -1　　(B) 5　　(C) -1 或 5　　(D) 以上都不对

解：$\because x_1 + x_2 = -(p-1)$　　$x_1 \cdot x_2 = p$

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (p-1)^2 - 2p = 6$

即：$p^2 - 4p - 5 = 0$.　　$\therefore p = 5$ 或 $p = -1$

又 $\because \triangle = (p-1)^2 - 4p \geqslant 0$

$\therefore p \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$ 或 $p \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$

$\therefore P = -1$

答:A

(8) 要使方程 $x^2 - (a-2)x - (a+3) = 0$ 的两根平方和最小,则 a 的值为(　　)

(A) -1　　(B)0　　(C)1　　(D)2

解:$x_1 + x_2 = a - 2$.　　$x_1 \cdot x_2 = -(a+3)$

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-2)^2 + 2(a+3) = a^2 - 2a + 10 = (a-1)^2 + 9$,

当 $a = 1$ 时 $x_1^2 + x_2^2$ 最小

答:C

(9) 若方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 的两根是 x_1, x_2,则不等式 $x^2 - x + 1 > 0$ 的解是(　　)

(A)$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$　　(B)$\{x \mid x > x_2$ 或 $x < x_1\}$

(C)$x \in \phi$　　(D)R

解:$\because \triangle = 1 - 4 < 0$

$\therefore$ 不论 x 为何值 $x^2 - x + 1 > 0$ 恒成立

答:D

(10) 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - bx + 4 = 0$ 的两实根之和与这两实根之积相等,若它的一个根是 $\frac{1}{4}$,则 a、b 的值为(　　)

(A) $-48, 4$　　(B)24,4　　(C)48, -4　　(D) $-24, -4$

解:设方程另一根为 x_1

由题意:$x_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x_1$　　$\therefore \frac{3}{4}x_1 = -\frac{1}{4}$　　$x_1 = -\frac{1}{3}$

又 $\frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{a}$　　$\therefore a = -48$

又 $\frac{1}{4} + (-\frac{1}{3}) = \frac{b}{a}$　　$\therefore b = 4$

答:A

例 2. 填空题

(1) 已知 $1 < x < 3$,则 $\frac{|x-3|}{x-3} - \frac{\sqrt{(1-x)^2}}{1-x} =$ ___0___。

解:$\frac{|x-3|}{x-3} - \frac{\sqrt{(1-x)^2}}{1-x} = \frac{3-x}{x-3} - \frac{x-1}{1-x} = -1 + 1 = 0$

(2) 若 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$　　则 $\frac{x+y}{x-2y+3z} =$ ________。

解:设 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$.　$\therefore x = 3k, y = 4k, z = 5k$

$\therefore$ 原式 $= \frac{3k+4k}{3k-8k+15k} = \frac{7k}{10k} = \frac{7}{10}$

(3) 已知 $|3-a| + \sqrt{\lg(b+2)} = 0$　则 $a =$ ________, $b =$ ________。

解:$|3-a| = 0$　　$\lg(b+2) = 0$

$\therefore a = 3$,　　$b + 2 = 1$　　$b = -1$

(4) 已知方程 $2x^2-3x-5=0$ 的两根为 α、β,则 $\alpha+\beta=$ ______,$\alpha\cdot\beta=$ __-5__,$\alpha^2+\beta^2=$ ______,$(\alpha-\beta)^2=$ ______。

解:$\alpha+\beta=\frac{3}{2}\qquad\alpha\cdot\beta=-\frac{5}{2}$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\frac{3}{2})^2-2\cdot(-\frac{5}{2})=\frac{29}{4}$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\frac{3}{2})^2-4(-\frac{5}{2})=\frac{49}{4}$$

(5) 若方程 $x^2+2mx+m^2=4(x-1)$ 的两实数根的平方和比两根的积大 21,则 $m=$ ______。

解:方程整理得 $\quad x^2+(2m-4)x+m^2+4=0$

$x_1+x_2=-(2m-4)\qquad x_1\cdot x_2=m^2+4$

由题意 $x_1^2+x_2^2-x_1\cdot x_2=(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=(2m-4)^2-3(m^2+4)$

$\therefore m^2-16m+4=21\qquad m^2-16m-17=0\qquad\therefore m=17.\quad m=-1.$

又 $\because\quad\triangle=(2m-4)^2-4(m^2+4)\geqslant0\qquad$ 知 $m\leqslant0$

$$\therefore m=-1$$

(6) 若方程 $2x^2-(a+1)x+(a+3)=0$ 的两根之差的绝对值等于 1,则 a 的值为______。

解:$x_1+x_2=\frac{a+1}{2}\qquad x_1\cdot x_2=\frac{a+3}{2}$

$\therefore(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(\frac{a+1}{2})^2-2(a+3)=1$

解得 $\qquad a=9$ 或 $a=-3$

(7) 方程 $x^2+px+q=0$ 的两根是 3 和 -5,则 $p=$ __2__ $q=$ __-15__。

解:$3+(-5)=-p\qquad3\cdot(-5)=q\qquad\therefore p=2\qquad q=-15.$

(8) 已知方程 $x^2+\sqrt{3}x+c=0$ 的一个根是 $1-\sqrt{3}$,则另一根是______,$c=$ ______。

解:设另一根为 $x_0\qquad\therefore x_0+1-\sqrt{3}=-\sqrt{3},\qquad x_0=-1$

$c=(1-\sqrt{3})\cdot(-1)=\sqrt{3}-1$

$$\therefore\text{另一根是}-1,c=\sqrt{3}-1$$

(9) 当方程组 $\begin{cases}kx-y=5\\2x+3ky=7\end{cases}$ 的解满足 $x>0,y<0$ 时 k 的取值范围是______。

解:由方程组解得:

$$\begin{cases}x=\frac{15k+7}{3k^2+2}\\y=\frac{7k-10}{3k^2+2}\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}\frac{15k+7}{3k^2+2}>0\\\frac{7k-10}{3k^2+2}<0\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}15k+7>0\\7k-10<0\end{cases}$$

$$\therefore-\frac{7}{15}<k<\frac{10}{7}$$

(10) 实数 k 满足______时,方程组 $\begin{cases}x=k+y\\x^2-3y^2+y=\frac{1}{4}\end{cases}$ 有实数解?

解 $(k+y)^2-3y^2+y=\frac{1}{4}$ 整理得:$2y^2-(2k+1)y+\frac{1}{4}-k^2=0$ 要使方程组有实数解需

$\triangle = (2k+1)^2 - 8(\frac{1}{4} - k^2) \geqslant 0$

$a^2 > a \quad c^2 > c$

$4k^2+4k+1 \quad 24$

$2a^2+2c^2-4ac$

解之得 $k \geqslant \frac{1}{6}$ 或 $k \leqslant -\frac{1}{2}$

$\therefore 2b^2-4ac$

例 3. 在方程 $ax^2 - \sqrt{2}bx + c = 0$ 中, a,b,c 为一钝角三角形三边长, b 是最长边。

(1) 证明方程组有两个不相等的实数根; $b^2-a^2+c^2 \quad \therefore \quad 2(a^2+c^2)-4ac$

(2) 判断这两个实根的正负;

(3) 设方程两根为 x_1, x_2, 当 $|x_1 - x_2| = \sqrt[4]{12}$ 且 $a = c$ 时, 求这个三角形的三内角。

解: (1) $\triangle = (\sqrt{2}b)^2 - 4ac = 2b^2 - 4ac$

$\because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$\therefore \triangle = 2b^2 - 4ac = 2a^2 + 2c^2 - 4ac\cos B - 4ac$

$\quad = 2(a-c)^2 - 4ac\cos B$

$\because b$ 为钝角三角形最长边, $\therefore B$ 为钝角 $\quad \therefore \cos B < 0$

又 $a > 0, b > 0, c > 0, \therefore -4ac\cos B > 0$

$\therefore \triangle > 0, \therefore$ 方程有两个不相等的实根。

(2) 设方程的两根为 x_1, x_2

$\because x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2}b}{a} > 0, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$

$\therefore$ 方程两个实数根都是正数。

(3) $\because |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{2b^2 - 4ac}{a^2}}$

由题意: $\frac{2b^2 - 4ac}{a^2} = 2\sqrt{3} \qquad$ 又 $a = c$

$\therefore b^2 = (2+\sqrt{3})a^2, \qquad$ 又 $\because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$\therefore (2+\sqrt{3})a^2 = 2a^2 - 2a^2\cos B \quad$ 解出 $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\angle B = 150^\circ, \qquad \angle A = \angle C = 15^\circ$$

例 4. 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 6x + 5 = 0$ 的两个根, 求 x_1 和 x_2 的等比中项。

解: $\because x_1 \cdot x_2 = 5. \qquad \therefore x_1x_2$ 的等比中项为 $\pm\sqrt{5}$.

例 5. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b 为 $\angle A, \angle B$ 的对边, 方程 $a(1-x^2) + 2bx + 10(1+x^2) = 0$ 有两个相等实数根, 且 $\lg 2 + \lg b - \lg a = \lg(1 + \frac{10}{a})$, 求 $\sin A : \sin B$

解: 整理方程得: $(10-a)x^2 + 2bx + (10+a) = 0$

$\triangle = 4b^2 - 4(10^2 - a^2) = 0$

$\therefore a^2 + b^2 = 10^2 \qquad$ ① 又 $\frac{2b}{a} = 1 + \frac{10}{a} \qquad$ 得 $a = 2b - 10 \qquad$ ②

由 ①② 得: $b = 8, \qquad \therefore a = 6$

$$\therefore \sin A : \sin B = 3 : 4$$

精选习题

(一) 选择题

B 1. 实数 a 是非负数,则 a 可表示为(　　)

(A) $a > 0$　　(B) $a \geqslant 0$　　(C) $a < 0$　　(D) $a \leqslant 0$

C (2) 如果 $|x|+|y|=0$,则 x 和 y 的值分别是(　　)

(A) 互为相反数　　(B) 互为倒数

(C) $x=0, y=0$　　(D) $x>0, y<0$

B (3) 如果 $|-a|>-a$　　那么(　　)

(A) $a>0$　　(B) $a<0$　　(C) $a<-1$　　(D) $-1<a<0$

$2-a=a^2-2a+4$　　$a^2-a+2=0$

D (4) 若 $\sqrt{(2-a)^2}=a-2$　　则 a 的范围是(　　)

(A) $a>0$　　(B) $0 \leqslant a \leqslant 2$　　(C) $a<0$　　(D) $a \geqslant 2$

$(a-2)(a+1)=0$　　$a=2$　$a=-1$

D (5) 如果 $-a|a|=a^2$　　那么 a 是(　　)

(A) $a \geqslant 0$　　(B) $a>1$

(C) $0<a<1$　　(D) $a \leqslant 0$

C (6) 已知 $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 在实数范围内有意义,化简后得(　　)

(A) $\sqrt{1-a}$　　(B) $\sqrt{a-1}$　　(C) $-\sqrt{1-a}$　　(D) $-\sqrt{a-1}$

B (7) 设 x_1, x_2 为方程 $2x^2-x-5=0$ 的二根,则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值是(　　)

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{5}$　　(C) $-\frac{5}{2}$　　(D) $-\frac{2}{5}$

(8) 关于 x 的方程 $x^2-(2\sin\theta)x-\cos^2\theta=0$,那么它的根的情况是(　　)

(A) 有两个相等的实数根　　(B) 没有实数根

(C) 有两个不相等的实数根　　(D) 有无实根无法判定

A (9) 关于 x 的方程 $x^2-(2n+3m)x+5m=0$ 的两根之和为 2,两根之积为 -10,则(　　)

(A) $\begin{cases} m=-2 \\ n=4 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} m=2 \\ n=-4 \end{cases}$　　(C) $\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} m=-2 \\ n=-4 \end{cases}$

B (10) 若两数和为 6,其差的绝对值为 8,则以此二数为根的方程是(　　)

(A) $x^2-6x+7=0$　　(B) $x^2-6x-7=0$

(C) $x^2+6x-8=0$　　(D) $x^2+6x+8=0$

A (11) 方程 $x^2+2kx-3=0$ 的两根平方和是 10,则 k 的绝对值是(　　)

(A) 1　$-2k$　-3　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{3}{2}$　　(D) 2

(12) 方程 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+(b^2+c^2)=0$　　$(ac \geqslant 0)$ (　　)
有两个相等的实数根,则 a, b, c 应满足的条件是

(A) $a^2+b^2=c^2$　　(B) $a+c=b$

(C) $b=\pm\sqrt{ac}$　　(D) $a^2=bc$

C (13) 方程 $x^2+(2m+1)x+m^2+m=0$,根的情况是(　　)

(A) 无实数根　　(B) 有两个相等实根

(C) 有两个不等实根　　(D) 无法判定

D (14) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有零根的条件是(　　)

(A) $b^2-4ac=0$　　(B) $b=0,\ a\neq 0$

(C) $bc=0$　　(D) $c=0, a\neq 0$

(15) 两数的积是 54,它们的差是 3,则这两个数是(　　)

C (A) 6,9　　(B) $-6,-9$

(C) 6,9 或 $-6,-9$　　(D) 以上都不对

(二) 填空题

1. $-a+1$ 的相反数是 $\underline{a-1}$,$2-\sqrt{3}$ 的倒数是 $\underline{2+\sqrt{3}}$

2. 当 $x<0$ 时,$|x|-x=$ $\underline{-2x}$

3. 当 $a\geqslant 4$ 时,$\sqrt{a^2-8a+16}=$ $\underline{a-4}$

4. $\sqrt{x^2+1}-x$ 的倒数是 $\underline{\sqrt{x^2+1}+x}$,$(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=$ $\underline{1}$

5. 若 x,y 为实数,且 $(5x+6)^2+|y-3|=0$,则 $\frac{x}{y}=$ $\underline{-\frac{2}{5}}$

6. 当 $1\leqslant a<5$ 时,$\sqrt{(a-1)^2}+|5-a|=$ $\underline{4}$

7. 已知 $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{5}$,　　则 $x-\frac{1}{x}=$ $\underline{\pm 4}$

8. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$ $\underline{0}$

9. 如果 $x<0$,则 $|\sqrt{x^2}-x|=$ $\underline{-2x}$

10. 方程 $ax^2+x-1=0(a\neq 0)$ 无实数解,则 a $a<-\frac{1}{4}$

11. 方程 $2x^2-6x+3=0$ 的二根为 x_1,x_2,不解方程,则 $|x_1-x_2|=$ $\underline{\sqrt{3}}$

12. 关于 x 的二次方程 $x^2\lg a-2x+1=0$ 有两个不相等的实根,则 a 的范围是 $\underline{0<a<10}$

13. 若 $\operatorname{tg}\alpha,\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $x^2-px+q=0$ 的二根,$\operatorname{ctg}\alpha,\operatorname{ctg}\beta$ 是方程 $x^2-rx+s=0(r\neq 0)$ 的二根,那么 $ps=$ ______

14. 已知方程 $2x^2-5x+k=0$ 的两根之比为 $2:3$,那么 k 的值是 $\underline{3}$

15. 设 x_1,x_2 是方程 $2x^2-3x-4=0$ 的两个实数根,不解方程,$(x_1+1)(x_2+1)$ 的值是 $\underline{\frac{1}{2}}$

(三) 解答题

1. 已知方程 $x^2-2x+q=0$ 的两根差的绝对值为 8,求 q.

2. 一元二次方程 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ 有相等二实数根,求证:a,b,c 成等差数列。

3. 已知方程 $x^2+(k^2-4)x+k+1=0$

(1) k 为何值时,方程的二实根互为相反数?

(2) k 为何值时,方程有一根为 0?

4. 设 $x^2+px+q=0$ 的二根为 α,β,且 α,β 满足 $\lg\alpha+\lg\beta=2$,$\lg(\alpha+\beta)=2-\lg 5$,求 α,β,p,q.

5. 已知 m 为实数,$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$,如果 $\operatorname{tg}\alpha,\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $x^2-mx+1=m$ 的二实数根,求 $\alpha+\beta$

6. 解关于 x 的方程 $\frac{x^2+1}{1-x}=a$,问 a 在什么范围内方程有两个相异的负数解?

7. 已知方程 $x^2-px+q=0$ 的两实根的倒数是方程 $x^2-rx+s=0$ 的两实数根，且 $r\neq0$，求 $\frac{sp}{r}$ 的值。

8. 实数 m 取何值时，关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ 的两根平方和最小？并求出该最小值。

9. 设实数 a 使方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 有两个实数根 x_1,x_2.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 当 a 取何值时，$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ 取得最小值？并求出该最小值。

10. a,b,c 为三角形的三边，设方程 $a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$ 有等根，判定三角形的形状。

11. 证明方程 $4ax^2+2(a+b)x+b=0\quad(a\neq0)$ 必有实根。

12. 已知 $\operatorname{tg}\alpha,\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $x^2-3x-3=0$ 的二根，求：$\sin^2(\alpha+\beta)-3\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-3\cos^2(\alpha+\beta)$ 的值。

13. 三角形两边之和为 10，其夹角余弦是方程 $2x^2-3x-2=0$ 的根，求三角形周长的最小值。

14. 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的两个实数根，求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值。

15. p 是什么实数时，关于 x 的二次方程 $7x^2-(p+13)x+p^2-p-2=0$ 的两根 α 和 β 满足：$0<\alpha<1,\quad 1<\beta<2$？

16. 设 a,b 为正整数，其和为 14，若方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根为 2 和 α，方程 $bx^2+cx+a=0$ 的二根为 3 和 β，试求：

(1) a,b,c 的值；

(2) 以 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ 为两根的二次方程。

习题答案与提示

(一) 选择题

(1)B	(2)C	(3)A	(4)D	(5)D
(6)C	(7)B	(8)C	(9)A	(10)B
(11)A	(12)C	(13)C	(14)D	(15)C

(二) 填空题

1. $a-1, 2+\sqrt{3}$,	2. $-2x$	3. $a-4$	4. $\sqrt{x^2+1}+x, 1$
5. $-\frac{2}{5}$	6. 4	7. ±4	8. 0
9. $-2x$	10. $a<-\frac{1}{4}$	11. $\sqrt{3}$	12. $0<a<10$
13. r	14. $k=3$	15. $\frac{1}{2}$	

(三) 解答题

1. $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1\cdot x_2=q \\ |x_1-x_2|=8 \end{cases} \Rightarrow (x_1+x_2)^2-(x_1-x_1)^2=4x_1x_2$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = -15$$

$$即\ q = -15$$

2. $(c-a)^2 - 4(b-c)(a-b) = 0 \therefore a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab + 2ac - 4bc = 0$

$(a - 2b + c)^2 = 0 \quad \therefore a + c = 2b$

3. (1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = k^2 - 4 = 0 \\ x_1 \cdot x_2 = k + 1 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow k = -2$

(2) $k + 1 = 0 \quad \Rightarrow k = -1$

4. $\because \begin{cases} \lg\alpha + \lg\beta = 2 \\ \lg(\alpha + \beta) = 2 - \lg 5 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha\beta = 100 \\ \alpha + \beta = 20 \end{cases}$

又 $\alpha > 0, \beta > 0 \quad \therefore \alpha = \beta = 10$. 由韦达定理：$\begin{cases} \alpha + \beta = -p \\ \alpha \cdot \beta = q \end{cases}$

$$\therefore p = -20 \qquad q = 100$$

5. 由韦达定理：

$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = m \\ \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1 - m \end{cases} \therefore \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{m}{1 - (1 - m)} = 1$

又 $\because -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \alpha + \beta = -\frac{3\pi}{4}$$

6. $\because x \neq 1 \quad \therefore x^2 + 1 = a - ax \quad x^2 + ax + (1 - a) = 0$

设方程二根为 x_1, x_2

$$\therefore \begin{cases} \triangle = a^2 - 4(1 - a) > 0 \\ x_1 + x_2 = -a < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - a > 0 \end{cases} \Rightarrow -2 + 2\sqrt{2} < a < 1$$

7. 设方程 $x^2 - px + q = 0$ 的二根为 x_1, x_2 则方程

$x^2 - rx + s = 0$ 的二根为$\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}$，由韦达定理得：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = p \\ x_1 \cdot x_2 = q \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = r \\ \dfrac{1}{x_1} \cdot \dfrac{1}{x_2} = s \end{cases} \Rightarrow \frac{sp}{r} = 1$$

8. $\because \triangle = (m - 2)^2 + 4(m + 3) = m^2 + 16 > 0$

$\therefore$ 方程有二实根，x_1, x_2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m - 2) \\ x_1 \cdot x_2 = -(m + 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m - 2)^2 + 2(m + 3) \\ &= m^2 - 2m + 10 \\ &= (m - 1)^2 + 9 \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $m=1$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 有最小值 9

9.(1) $\Delta=(a-1)^2-4\geqslant 0$

$\therefore a\geqslant 3$ 或 $a\leqslant -1$

(2) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=(a-1)^2-2$

$\therefore$ 当 $a=3$ 或 $a=-1$ 时，$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ 有最小值 2。

10. $(c-a)x^2+2bx+(a+c)=0$

$\because$ 有等根，$\therefore \Delta=4b^2-4(a+c)(c-a)=0$

$\therefore b^2+a^2=c^2$　　$\because$ 三角形为直角三角形。

11. 证明：$\Delta=4(a+b)^2-16ab=4(a-b)^2\geqslant 0$.

$\therefore$ 方程必有实数根。

12. $\because \begin{cases}\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=3\\ \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=-3\end{cases}$　　$\therefore \mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$，　　$\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{16}{25}$

而　$\sin^2(\alpha+\beta)-3\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-3\cos^2(\alpha+\beta)$

$=\cos^2(\alpha+\beta)[\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)-3\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-3]$

$=\frac{16}{25}(\frac{9}{16}-\frac{9}{4}-3)=-3$

13. 方程 $2x^2-3x-2=0$ 的二根为 $x=2$ 或 $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore \cos A=-\frac{1}{2}$

设三边长为 a,b,c　　$b+c=10$

由余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$\therefore a^2=b^2+(10-b)^2-2b(10-b)\cdot(-\frac{1}{2})=(b-5)^2+75$

即当 $b=5$ 时 $a_{\min}=5\sqrt{3}$

$\therefore$ 三角形周长最小值为 $10+5\sqrt{3}$

14. 解：$\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)=-3k^2-16k-16\geqslant 0$

$\therefore -4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)$

$=-(k+5)^2+19$

$\because$ 函数 $f(k)=-(k+5)^2+19$ 在 $-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$ 上是减函数，$\therefore k=-4$ 时

$x_1^2+x_2^2$ 有最大值 $-(-4+5)^2+19=18$

15. 解：$\begin{cases}f(0)>0\\ f(1)<0\\ f(2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p^2-p-2>0\\ p^2-2p-8<0\\ p^2-3p>0\end{cases}$

$\therefore -2<p<-1$ 或 $3<p<4$

16. 解：(1) 由题意得：