

大學用書選譯

何 幾 析 解

C. O. Oakley 著

葉 勇 譯

教 育 部 出 版
世 界 書 局 發 行

中華民國六十八年二月再版

大學用書選譯
解析幾何 (全一冊)

平裝本 基本定價 壹圓捌角叁分整

著者：C. O. Oakley

譯者：葉

出版者：教

發行所：世

發行所：蕭

地址：臺北市衡陽路二十號三樓

電話：三一〇一八三

本局登記證字號：行政院新聞局局版臺業字第〇九三一號

印刷者：世
界書局

版權所有
禁止翻印

希臘字母表

字	母	讀	法	字	母	讀	法	字	母	讀	法
A	α	Alpha		I	ι	Iota		P	ρ	Rho	
B	β	Beta		K	κ	Kappa		Σ	σ	Sigma	
γ	γ	Gamma		Λ	λ	Lambda		T	τ	Tau	
Δ	δ	Delta		M	μ	Mu		Υ	υ	Upsilon	
E	ϵ	Epsilon		N		Nu		Φ	ϕ	Phi	
Z	ζ	Zeta		Ξ	ξ	Xi		X	χ	Chi	
H	η	Eta		O	o	Omicron		Ψ	ψ	Psi	
θ	θ	Theta		Π	π	Pi		Ω	ω	Omega	

作者簡介

本書作者奧克萊氏爲美國德薩斯大學工程學士；布朗大學數學碩士；伊利諾大學數學博士。他曾在以上諸校，及拜墨爾學院 (Bryn Mawr College) 和德拉維爾大學 (University of Delaware) 執教。奧氏現爲哈維佛學院 (Haverford college) 數學系主任，亦爲美國數學協會主持人以及柯理爾斯百科全書數學部的編輯。其著作散見於國內外二十幾種有關數學方面的雜誌和報章上，所出版之專書有“數學原理” (與艾倫達佛爾 C. B. Allendoerfer 合著) 及“微積分” (亦列入本叢書 [College Outline Series] 中)。

前 言

本書之主要目的乃在以簡約的方式對解析幾何予以介紹，俾便學者自修及溫習之用。爲達到這一目的，吾人曾在本書中，對平面及立體方面的許多問題加以討論，雖然不敢說是完整無遺，但很少課程是包羅本書全部資料的。書中所列之書目表有助於標準教科書之查閱，也可便利互相參證工作的進行。

解析幾何對於微積分的研習甚爲重要，同樣的，代數，平面和立體幾何以及三角法對解析幾何的研習也不可或缺。本書第一章即全部用來對和解析幾何有關的其他學科的參考公式作基本的復習。

本書中列有許多定理的證明，俾使學者瞭解公式的來源。這些推演和精細作出來的例題，以及二百多個精確的繪圖，相信對於研習本書的人會有實質上的幫助。作者在每一專題之後並附有習題式的標準問題和答案，而附錄一中的總復習亦應有助於測驗之用，至於附錄二，則爲一些常用的數表。

奧 克 萊

哈維佛，賓夕維尼亞

解析幾何標準教科書書目表

下列名單，將本書表解中所列的廿二種標準教科書的作者，名稱，出版者，及出版日期一一臚列，以供參證。以下爲書目：

Ayre and Stephens, *A First Course in Analytic Geometry*, 1956, Van Nostrand.

Cell, *Analytic Geometry*, 2nd ed., 1951, Wiley.

Curtiss and Moulton, *Essentials of Analytic Geometry*, 1947, Heath.

Douglass and Zeldin, *Analytic Geometry*, 1950, McGraw-Hill.

Fuller, *Analytic Geometry*, 1954, Addison-Wesley.

Hill and Linker, *Brief Course in Analytics*, rev. ed., 1951, Holt.

Kells and Stotz, *Analytic Geometry*, 1949, Prentice-Hall.

Lehmann, *Analytic Geometry*, 1942, Wiley.

Love, *Analytic Geometry*, 4th ed., 1950, Macmillan.

Love, *Elements of Analytic Geometry*, 3rd ed., 1950, Macmillan.

McCoy and Johnson, *Analytic Geometry*, 1955, Rinehart.

Middlemiss, *Analytic Geometry*, 2nd ed., 1955, McGraw-Hill.

Nelson, Folley, and Borgman, *Analytic Geometry*, 1949, Ronald.

Rees, *Analytic Geometry*, 1956, Prentice-Hall.

Rider, *Analytic Geometry*, 1947, Macmillan.

Robinson, *Analytic Geometry*, 1949, McGraw-Hill.

Sisam and Atchison, *Analytic Geometry*, 3rd ed., 1955, Holt.

2 解析幾何

Smith, Gale, and Neelley, *New Analytic Geometry*, 1928, Ginn.

Smith, Salkover, and Justice, *Analytic Geometry*, 2nd ed., 1954, Wiley.

Steen and Ballou, *Analytic Geometry*, 3rd ed., 1955, Ginn.

Underwood and Sparks, *Analytic Geometry*, 1948, Houghton Mifflin.

Wisson and Tracey, *Analytic Geometry*, 3rd ed., 1949, Heath.

Woods, *Analytic Geometry*, rev. ed., 1948, Macmillan.

目 次

解 析 幾 何 學

第一章 參考公式	1
第一節 基本公式	1
第二節 代數	1
第三節 幾何	3
第四節 三角	5

平面解析幾何學

第二章 基本概念	10
第五節 緒論	10
第六節 直角坐標	10
第七節 二點間之距離	11
第八節 有向線段	12
第九節 射影	12
第十節 分點	13
第十一節 傾角, 斜率, 方向餘弦	15
第十二節 平行線與垂直線	17
第十三節 二直線的交角	18
第十四節 三角形面積	21
第十五節 解析幾何在初等幾何方面的應用	23
第十六節 精確繪圖	26
第三章 方程式及圓形	28
第十七節 基本定義	28
第十八節 方程式	29
第十九節 方程式及其圖形的討論	30
第二十節 曲線之交點	38

2 解析幾何

第二十一節 軌跡	40
第四章 直線	43
第二十二節 多項式	43
第二十三節 一次方程式	43
第二十四節 直線方程式的特別形式	45
第二十五節 自直線至一點之距離	49
第二十六節 直線系	52
第二十七節 過兩直線交點的直線系	52
第二十八節 三直線共點之條件	55
第二十九節 三點共直線的條件	56
第三十節 直線方程式摘要	57
第五章 圓	59
第三十一節 概說	59
第三十二節 圓之標準方程式	59
第三十三節 化圓之普通式爲標準式	60
第三十四節 三條件定一圓	61
第三十五節 圓之切線方程式	64
第三十六節 切線之長	66
第三十七節 圓系	66
第三十八節 根軸	67
第三十九節 直交圓	69
第六章 拋物線	72
第四十節 定義	72
第四十一節 拋物線的普通方程式	72
第四十二節 拋物線的標準方程式	73
第四十三節 標準方程式化法	75
第四十四節 切線方程式	76
第四十五節 拋物線的性質	77
第七章 橢圓	79

第四十六節	定義	79
第四十七節	橢圓的普通方程式	80
第四十八節	橢圓的標準方程式	80
第四十九節	標準方程式化法	83
第五十節	切線方程式	84
第五十一節	橢圓的性質	85
第八章	雙曲線	88
第五十二節	定義	88
第五十三節	雙曲線的普通方程式	89
第五十四節	雙曲線的標準方程式	89
第五十五節	共軛雙曲線及等邊雙曲線	91
第五十六節	標準方程式化法	94
第五十七節	涉及漸近線的雙曲線方程式	95
第五十八節	切線方程式	95
第五十九節	雙曲線的性質	97
第九章	錐線	101
第六十節	以平面截一圓錐	101
第六十一節	變態曲線	102
第十章	坐標軸之變換	104
第六十二節	變換	104
第六十三節	平移	104
第六十四節	旋轉	106
第十一章	普通二次方程式	109
第六十五節	錐線的分類	109
第六十六節	xy 項的移去	110
第六十七節	化普通式爲標準式	110
第六十八節	有心錐線	112
第六十九節	拋物線	114
第七十節	不變式	115

4 解析幾何

第七十一節 錐線系	116
第七十二節 通過五點的錐線	117
第七十三節 切線方程式	118
第十二章 極及極線	119
第七十四節 定義及定理	119
第十三章 直徑	121
第七十五節 定義及定理	121
第十四章 極坐標	124
第七十六節 定義	124
第七十七節 極坐標與直角坐標之關係	124
第七十八節 極坐標兩點間的距離	126
第七十九節 直線之極方程式	126
第八十節 圓之極方程式	127
第八十一節 錐線之極方程式	127
第八十二節 含數個方程式之圓形	129
第八十三節 極坐標之曲線追跡	131
第八十四節 極坐標之曲線交點	138
第八十五節 極坐標之軌跡	139
第十五章 高等平面曲線	143
第八十六節 定義	143
第八十七節 代數曲線	143
第八十八節 三角曲線	147
第八十九節 對數曲線和指數曲線	150
第十六章 參數方程式	153
第九十節 參數方程式	153
第十七章 經驗方程式	160
第九十一節 曲線的適合	160
第九十二節 直線定律	160
第九十三節 拋物線定律	163

第九十四節 指數定律	164
第九十五節 冪定律	167

立體解析幾何學

第十八章 基本概念	170
第九十六節 坐標系	170
第九十七節 兩點間之距離	172
第九十八節 射影	172
第九十九節 分點	173
第一百節 方向餘弦	174
第一百零一節 二直線間夾角	175
第一百零二節 平行線與垂直線	176
第十九章 平面	178
第一百零三節 含三變數之方程式	178
第一百零四節 一次方程式	178
第一百零五節 特殊形式之平面方程式	179
第一百零六節 平面至一點之距離	185
第一百零七節 二平面間夾角	185
第一百零八節 平行平面與垂直平面	187
第一百零九節 平面系	187
第一百一十節 四平面共點之條件	188
第一百一十一節 四點共一平面之條件	189
第一百一十二節 平面公式摘要	190
第二十章 直線	192
第一百一十三節 直線方程式	192
第一百一十四節 特殊形式之直線方程式	192
第一百一十五節 化普通式爲對稱式	193
第一百一十六節 直線與平面間之夾角	197
第一百一十七節 二平面交線之方向數	197

6 解析幾何

第一百一十八節 空間二直線之法線方向數	197
第二十一章 空間軌跡	200
第一百一十九節 曲面與曲線	200
第一百二十節 柱	200
第一百二十一節 錐	202
第一百二十二節 迴轉曲面	204
第一百二十三節 曲面之描繪	206
第一百二十四節 曲線之描繪	210
第二十二章 二次曲面	215
第一百二十五節 一般二次方程式	215
第一百二十六節 橢圓	215
第一百二十七節 單葉雙曲面	216
第一百二十八節 雙葉雙曲面	217
第一百二十九節 錐	217
第一百三十節 橢圓拋物面	218
第一百三十一節 雙曲拋物面	218
第一百三十二節 柱	219
第一百三十三節 摘要	220
第一百三十四節 線織面	221
第一百三十五節 平移與旋轉	223

附 錄 A

總複習例題	226
答案	229

附 錄 B

表1 平方,平方根,立方,立方根	231
表2 常用對數	232
表3 自然對數	234
表4 三角函數	237
表5 e^x 及 e^{-x} 之值	238

第一章

參考公式

1. 基本公式 本書先從代數，幾何及三角中選出一些較為重要的公式供學生們隨時參考，並在研習本書之前，對這些作一番溫習。

2. 代數

(1) 二次方程式 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根爲：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

以 Δ 表示 $b^2 - 4ac$ ，則 $\Delta = b^2 - 4ac$ 稱爲判別式。

(a) 當 $\Delta > 0$ ，二根爲不相等之實數。

(b) 當 $\Delta = 0$ ，二根爲相等之實數。

(c) 當 $\Delta < 0$ ，二根爲共軛虛數。

(2) 階乘表示法 $n!$ 稱爲“ n 階乘”。

(a) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$;

(b) 依照定義 $0! = 1$ 。

(3) 二項定理 當 n 爲正整數時， $(a+b)^n$ 的展開式爲：

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1} \\ &\quad + \cdots + b^n; \end{aligned}$$

(b) 在此展開式中，第 r 項應爲：

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}。$$

2 解析幾何

(4) 對數

(a) 若 $a^b = x$, 則根據對數的定義 $\log_a x = b$,

$$(b) \log_a a = \frac{1}{\log_a b},$$

$$(c) \log MN = \log M + \log N,$$

$$(d) \log M^A = A \log M,$$

$$(e) \log \frac{M}{N} = \log MN^{-1} = \log M - \log N,$$

$$(f) \log \sqrt[n]{M} = \log M^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log M.$$

(5) 行列式 下列恒等式的左邊稱為二次行列式,

$$(a) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

又下列恒等式的左邊稱為三次行列式,

$$(b) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

行列式(a)及(b)已展開為相等的代數式。

(6) 聯立方程式

(a) 含有二未知數的兩個一次方程式:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

上兩式用行列式解之得:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(b) 含有三未知數的三個一次方程式。

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

(c) 含二未知數的一次方程式和二次方程式各一：

$$ax + by + c = 0$$

$$Ax^2 + Bxy + cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

解一次方程式中的變數 x ，並以所得 x 之值代入於二次方程式中，即得 y 文字的二次方程式，此方程式以二次方程式公式解之，得兩個 y 值，以 y 之值代回一次方程式中即可求得兩個 x 值。

(7) 三種特殊關係 有三種特殊關係學生們必須徹底瞭解，這些關係為 $0/A$, $A/0$ ($A \neq 0$) 及 $0/0$ 。

設 $0/A = x$ ，即 $0 = Ax$ ， x 只有一個值，即 0 ，可使它在被 A 乘時得 0 ，因此

$$(a) \frac{0}{A} = 0$$

設 $A/0 = x$ ，即 $A = 0x$ ， x 沒有一個值可使它在被 0 乘時得 A ，以 0 除任何數均不可能，或產生無窮大，因此，

$$(b) \frac{A}{0} = \infty$$

設 $0/0 = x$ ，即 $0 = 0x$ ， x 的任何數值均可適合此一方程式，因此

$$(c) \frac{0}{0} \text{ 是不定數。}$$

3. 幾何：

(1) 弧度法：

(a) 等於圓之半徑之長的弧所對之圓心角，稱為一弧度，(圖 1)。

4 解 析 幾 何

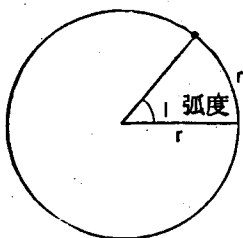


圖1

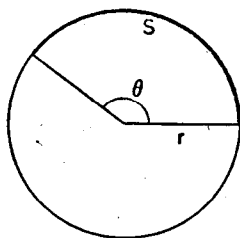


圖2

(b) 如 r 為一圓之半徑, θ 為用弧度所測之 S 弧所對之圓心角, 則(圖 2):

$$S = r\theta$$

(c) 度與弧度間的關係:

$$360^\circ = 2\pi \text{ 弧度} = 1 \text{ 周 (或圓周)}.$$

(2) 度量公式 設 r 為半徑, θ 為圓心角之弧度, S 為弧長, h 為高, b 為底, s 為斜高, A 為底之面積, 則:

	圓周	面積	體積
(a) 圓	$2\pi r$,	πr^2	
(b) 扇形	$S = r\theta$	$\frac{1}{2}r^2\theta$	
(c) 三角形		$\frac{1}{2}bh$	
(d) 梯形		$\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$	
(e) 角柱			Ah
(f) 直圓柱		$2\pi rh$	$Ah = \pi r^2 h$
(g) 角錐			$\frac{1}{3}Ah$
(h) 直圓錐		$\pi r s = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
(i) 球		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$