數字計算機數學

馮藻才編著 · 萬里書店出版

MATHEMATICS OF DIGITAL COMPUTORS

計 算 機 數 學

馮深才編著

香 港 萬 里 書 店 出 版

計算機數學

馮蔡才編著

出版者：萬里書店
香港北角英皇道486號三樓
電話：5-632411 & 5-632412

承印者：嶺南印刷公司
香港德輔道西西安里13號

定價：港幣四元

（一九七八年三月版）

序　　言

編寫本書的目的，是欲把目前電子數字計算機上最常用到的數學集中在一起有系統地及較詳盡地敘述。它是以一本數學書的形式出現,因此它的講述方法就與一般的數學書的講述方法一樣，也就是說，着重於理論的講述。但是爲了使讀者對它有更深刻的了解及懂得它怎樣應用於電子數字計算機上，因此也大畧談談二進制數在計算機裏的各種表示形式、各種算術運算，以及邏輯代數在計算機上的應用等等，但對計算機的詳細構造及原理則沒有談及。如讀者有興趣，可參考有關方面的書籍。

本書分三章。第一章是算術，第二章爲邏輯代數，第三章則爲在電子計算機上的應用。在第一章中，主要談及的對像是二進制數及八進制數 。 但爲了幫助讀者更容易地掌握這兩種數的概念，特闢一節對十進制數進行複習性的探討。在閱讀該節時，如能細心思考，把各基本概念弄清楚，那麼，對其後各節的學習會有極大的幫助。具有中學畢業程度的讀者，閱讀本書時應沒甚麼困難。對於那些年紀較長，只具有中學低年級程度的讀者，只要他們有興趣，對困難的問題都能耐心地思考，那麼，對本書大部分或全部也能看懂無遺。本書每章之後都附有習題。讀者應盡多地去試做。這樣，對理論本身的了解就會更深入，掌握更多。如

本書能引起讀者的興趣，那麼，筆者的目的已達。對那些樂於指出本書的缺點和錯誤的讀者、人士，筆者都一一致以萬二分的感謝。

馮藻才

1977年12月

目　錄

第一章 算 術

1·1 概 述

電子數字計算機能夠在幾千分之一秒，甚至幾萬分之一秒內完成一椿非常複雜的邏輯和算術運算。在計算機內，數是由一連串的電脈冲所表達，但所用的數與我們通常用的（十進制數）完全不同。它所用的是二進制數。數的表達可有各種不同的方法，如古代巴比倫人用的六十進制，我們通常用的十進制以及電子數字計算機上用的二進制等。爲了對這個概念有更進一步的了解，我們首先畧爲談談數的發展簡史。

遠在古代的時候，人類是不懂得計數的。隨着進化，藉着自然形象（如手指等）的幫助，人類漸漸學會了計算簡單的數。之後，也開始懂得利用符號來記數了。古代的幾個文明古國，如中國、埃及、巴比倫和印度等都有他們自己的一套記數方法，而且都各有他們自己各自的特點。現在我們準備選出三種較爲有代表性而且目前還使用着或由此而發展成的記數法來談談。這三種記數法就是羅馬記數法（即目前還用着的羅馬數字的表達法），巴比倫記數法(後發展而成爲目前的阿拉伯數字)及中國記數法。

羅馬記數法是用少數的字母或符號來表示所有的數的方法。這種記數法所用的字母或符號是 I、V、X、L、C、D、M。I（顯然是表示一隻手指的意思）表示一，V（伸開的手掌 ）表示五，X（兩個V，即$\genfrac{}{}{0pt}{}{V}{\Lambda}$）表示十，L表示五十，C表示一百，D表示五百及M表示一千。就用這樣的七個字母或符號，用這種記數法可把所有的數表示出來，但進行記數時，要按照這樣的一個規則：那就是在較大的數的左邊的較小的數，要從較大的數中減去，但若在其右邊，這較小的數則要加到較大的數中去。例如IV表示4，因5(V)減1(I)等於4，VI則表示6，因5(V)加1(I)等於6。同理IX表示9，XI表示11。爲了對這種記數法有更清楚的認識，現再舉幾個例子於下：

VIII	XIV	XVI	XIX	XX	XXV	XXIX	XXX	XL
8	14	16	19	20	25	29	30	40
IL	XC	IC	CD	DC	CM	MC	MD	MCMLXXVII
49	90	99	400	600	900	1100	1500	1977

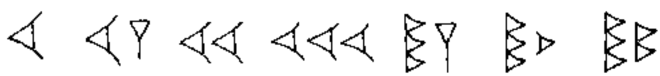
對於比一千大的數也可用這些字母或符號表示出來，如123849可寫成CXXIIImDCCCXLIX，即一百二十三千八百四十九。

誠然，用羅馬數字記數是很方便的，但在進行計算時則幾乎並不可能，這是羅馬記數法的唯一缺點。

另一種記數法就是巴比倫記數法。目前我們所用的阿拉伯數字及其記數方法都是由此種方法發展而成。大約四千年前，在美索不達米亞(Mesopotamia)——就是在近東的底格里斯河(Tigris)和幼發拉底河(Euphrates)流域，即現在的伊拉克國境——來了兩個在當時是很文明的遊牧民族：蘇美爾人和亞克得人。經過大概兩個世紀，這兩個民族合併爲一個強大的國家——巴比倫。在

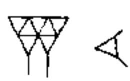
合併前，蘇美爾人和亞克得人都有他們自己一向使用着的貨幣及重量單位。蘇美爾人所用的這種單位叫“明那”——一“明那”重（相當於我們的一斤重）及一“明那”銀等。而亞克得人所用的重量、貨幣單位是“舍克爾”，等於六十分之一“明那”，那就是說，一“明那”等於六十“舍克爾”。合併以後，這兩種單位都一同使用。隨着商業經濟的發展，貨幣流通量就增加，於是要求有更大的使用單位。因此就有了“塔朗特”這個單位。由於巴比倫人已習慣於六十進位制的使用，如1“明那”＝60“舍克爾”，很自然，他們的新單位，“塔朗特”就等於60“明那”了。由此可見，只需用五十九個符號，就可把他們所用到的所有的數目表達出來。他們所用的符號是：

1　2　3　4　5　6　7　8　9



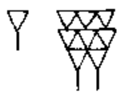
10　11　20　30　31　40　50

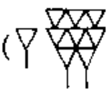
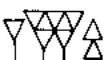
由於他們所用的符號所表達的數目是重量和錢銀的數目，因此，這些符號所代表的數目究竟是“塔朗特”或“明那”或“舍克爾”是要分清楚的。最初，“明那”是用比“舍克爾”較大的符號表示出來，但這樣，常常由於書寫上的不小心，以致發生混亂不清。於是後來就逐漸改爲用符號的位置來表示。如五“明那”＋“舍克爾”寫成



三十一“塔朗特”四十五“明那”十八“舍克爾”則寫爲

隨着巴比倫民族的發展，曆法和航海也跟着發展，於是發展了天文學。這樣一來，對記數的技巧及對數的興趣就愈來愈大。因此，由記載某一特別東西（錢銀和物件的重量）的數一變而爲抽象的數(不名數)。這種不名數的記法與上述的數的記法相同。我們把這種記數法稱爲**進位制記數法**。

最初，巴比倫人是不懂得用某種符號去代表零數，遇到零數的地方就把它空下。例如：108 就寫成 

這樣就很容易與 18（）這個數相混亂。爲此，後來就創造出一個新符號 （相等於我們目前所用的 0）來代表零數。於是 108 就可以寫成  了。雖然如此，他們仍不懂得把這個新符號（）用於數尾。如 150，他們仍然寫成  而不是 ，因此很容易與 15 發生混亂。所以巴比倫的記數法仍叫人感到有混淆不清之感。其後，這種記數法傳到印度去。印度人把它發展了並改進了它，並由此而發展成爲目前的阿拉伯數字

及其記法。印度記數法所用的符號共十個——一至九及一個代表零數的符號。其進位制是十進制而不是六十進制。所用的符號如下：

1	ᚠ	ᚠ	ε	ᒧ	7	∨	∧	9	·
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

就用上面所說的符號，按照這種記數法，就很方便把所有的數記出。現在我們用這種記數法來舉幾個例子。例如：15則記作1ᒧ，804記作∧·ε，1977記作19∨∨，如此類推。這種記數法最後終發展成爲現在的阿拉伯數字及其記法。其記數方法仍然與印度的記數法相同，但所用的符號或數字，除了九之外，已完全不同了。

最後要談談的，就是中國古代的記數法。在這種記數法中用來記數的符號都是象形符號，如一至五是由一、二、三、亖、𝍤等五個符號來表示，六則用一直畫及一橫畫合成，即⊥，顯然這一直劃畫在這裏是表示五。於是七、八、九便寫成⊥̄ ⊥̿ ⊥≡。最初，我們的祖先也是不懂得用"0"這個符號，因此，在當時表示所有數的符號共九個。所用的記數法是十進制記法。有時這些符號亦寫成丨、‖、‖|、‖‖、‖‖|、丅、𝍫、𝍬、𝍭等。現在舉幾個例子來說明怎樣用這些符號來表達一個數。我們若要表達15這個數，則可寫成丨亖，36則可寫成‖|⊥，1977則寫爲丨⊥≡⊥̄⊥̄，如此類推。隨着社會生產力及文化的發展，這些符號或數字也跟着發展和改進，而且也懂得用"0"這個符號來表示零數。現把改進了的符號或數字列舉於下：

	一	二	三	ㄨ	𝍤	⊥	⊥̄	⊥̿	文	0
或	丨	‖	‖|	ㄨ	𝍤	⊥	⊥̄	⊥̿	㐅	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

於是，1977 就寫成〡〩〧〧，一千零六十便寫成〡〇〦〇，四十八寫成〤〨等等。中國古代的記數法對記數及運算皆很方便，因此，目前一般中國商人仍使用着這種數字及記數法。

1·2 十進制數的探討

我們在第一節中曾談過，電子計算機能夠在幾千分之一秒，甚至幾萬分之一秒內完成一椿非常複雜的邏輯和算術運算。它之所以能做出了這樣驚人的奇蹟，是因爲它用上了它自己獨一無二的數制（二進數制）。爲了對這種數制有更明確的了解及它怎樣被用在電子計算機裏，使電子計算機創造出這樣驚人的奇蹟，我們準備在這一節裏比較深入地談談和研究一下我們已經知道的、在日常生活中使用着的數制。

我們熟悉的數制所用的符號或數目字共十個，即 1 、2、3、4、5、6、7、8、9、0，它們統稱爲數碼 。由於這種數制所用的數碼共十個，因此，稱它爲十進數制。我們在學校裏所學的算術，就是十進制算術。由於我們在日常生活中，經常都是用着十進制數及十進制算術，因此，很自然地以爲這是一種“自然”的數制。但是，正如我們前面已經談過，它只不過是許許多多的數制中之一種。

現在，我們來看看，十進數制是怎樣利用那十個數字來表達一個數。爲此，我們先複習一下乘冪的概念。

1·2·1 乘　冪

我們知道，將幾個數相乘， 得出的結果， 就稱爲此乘數的

積。例如在 $2\times3=6$ 中，6就是此乘數的積。在乘數中，我們常常碰到很多問題，其因數（如上例中的2或3）都是相同的，這時我們叫這乘數所得的結果爲乘冪，求出這些因數的乘積的運算叫做乘方。如 $2\times2=4$ 中的"4"就是乘冪。我們通常把 2×2 記作 2^2，稱之爲二的二次冪或二的平方。同理 $2^3\ (2\times2\times2)$ 稱爲二的三次冪或二的立方。總的來說，如果 m 是一個算術整數，則 $\overbrace{a\times a\times a\times\cdots\cdots\times a}^{m個a}$ 可表爲 a^m，稱爲 a 的 m 次冪。其中 a 稱爲此乘冪，a^m 的底，m稱爲其指數。因此，在上例中，2^3 的2稱爲 2^3 的底，3則稱爲其指數。

1·2·2 乘冪的算術運算

我們旣然已懂得了乘冪的概念，那麼，對於乘冪的相乘和相除自然就沒有什麼困難了，輕易地就可把它們的結果求出。例如

$$(1)\quad 2^3\times3^2=(2\times2\times2)\times(3\times3)=8\times9=72$$

$$(2)\quad 2^2\times2^3=(2\times2)\times(2\times2\times2)=4\times8=32$$

$$(3)\quad 3^4\div3^2=\frac{3^4}{3^2}=\frac{3\times3\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}}=3\times3=9$$

現在我們有這樣的一個問題，那就是，如果乘數或除數中的乘冪其底都是相等，那麼，所得的積或商是否仍可用一乘冪來表示？而且還有甚麼規律？要解答這個問題，我們再回頭看看上面第二及第三兩個問題。

在第二題中我們有

$$2^2\times2^3=(2\times2)\times(2\times2\times2)$$

$$=2\times2\times2\times2\times2=2^5$$
$$=2^{2+3}$$

由此，我們可以得出結論：同底乘冪相乘所得的積仍爲一乘冪，而且其底與乘數中乘冪的底相同，其指數則等於乘數中乘冪的指數的和。我們可以證明，這個規律適用於任何個數的同底乘冪的積。因此我們有下面的結果：

$$\left.\begin{array}{l}a^m\times a^n=a^{m+n}\\ a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p\cdots\cdots}\end{array}\right\}(1\cdot2\cdot1)$$

再來看看兩個同底乘冪的商的規律。爲此，我們再回頭研究一下上面的第三個問題。在那題中，我們有

$$3^4\div3^2=\frac{3^4}{3^2}=\frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times3\times3}{\cancel{3}\times\cancel{3}}$$
$$=3\times3=3^2$$
$$=3^{4-2}$$

因此，我們得到了下面的規律：兩同底乘冪相除，其商仍爲一乘冪，該乘冪的底與那兩乘冪的底相同，其指數則等於那兩乘冪的指數的差。這是一條普通的規律，那就是說如果a^m和a^n依次地表示任意兩乘冪，則有

$$a^m\div a^n=a^{m-n}\qquad(1\cdot2\cdot2)$$

很自然我們一定會提出這樣的問題：a^0和a^{-m}有沒有意義？它們究竟表示什麼？要回答這個問題，我們來研究一下$a^m\div a^m$這個問題。由公式(1·2·2)我們得

$$a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0$$

但 $a^m\div a^m=1$

因此得 $a^0=1$ (1·2·3)

也可以說，我們定義 a^0 等於 1，或任何數的零次冪等於 1。

現在再來看看 a^{-m} 這個乘冪的意義。為此，我們研究一下 $^1/a^m$ 這個分數。由公式 (1·2·3) 及 (1·2·2) 得

$$\frac{1}{a^m}=\frac{a^0}{a^m}=a^{0-m}=a^{-m}$$

因此，我們有 $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$ (1·2·4)

最後我們要提一提，任何數的一次冪等於該數，即 $a^1=a$。一般來說，如果該指數是 1，我們都把它省掉。

1·2·3 用乘冪表示數

我們既已懂得了乘冪的概念和它的一些運算規則，那麼，我們就可以利用它來表達通常的數。如：

(1) $17=4^2+4^0=1\times4^2+1\times4^0$

記着！由公式 (1·2·3)，我們知道，任何數的零次冪等於一。

(2) $54=3\times4^2+1\times4^1+2\times4^0$

在上式中，乘冪前面的數，如 3、1、2 等，統稱為係數。現在，再多看幾個例子。首先，我們來研究一下16這個數，它不僅可表成以 4 為底的乘冪，而且也可表成以10為底的乘冪。例如：

(3) $16=4^2=1\times4^2$

或 $16=1\times10^1+6\times10^0$

同樣 (4) $354=3\times10^2+5\times10^1+4\times10^0$

我們已經知道，怎樣把一個數表成乘冪的和。這個乘冪的底既可以是十，亦可以為其他數。在最後一個例題〔例題(4)〕及其前一個例題中，我們看到，若要把我們日常生活中用着的數表成以十為底的乘冪和，這些數的數字就是該乘冪的係數。這是不

足爲奇的，只要我們考察一下十進制記數法是用怎樣的法則或原理來表達一個數，那就不難理解了。

在前面曾經談過，在十進制記數法中，有十個不同的數碼，那就是0、1、2、3、4、5、6、7、8、9。根據“逢十進一”及在第一節中所講過的位置法則，就可把事物的數量或一個數用數字表達出來。這就是“十進制”中表達一個數的基本法則。

那個“十”稱爲十進制記數法的“基數”。現在，我們舉一個具體例子來說明這個法則。

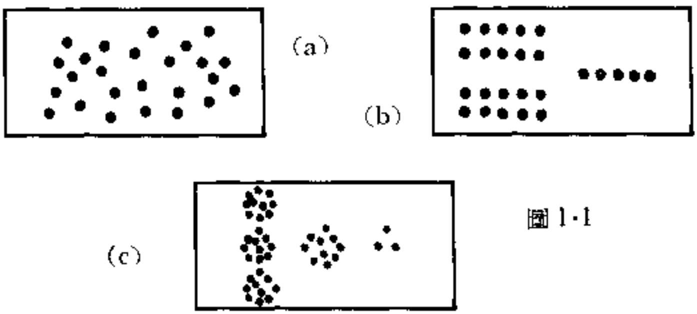


圖1·1

假定我們要計算一堆“珠子”〔圖1·1(a)〕的數量，計算的結果如圖中(b)所示。根據十進制記數法的法則，共有十顆的兩堆另五顆，亦即二十五顆，用數字表達出來，就是25（從左邊數起）。第一位代表“個位”，第二位代表“十位”，第三位代表“百位”，餘此類推，這樣，25就是兩個十和一個五。用數式表示出來就有

$$\begin{aligned}25&=2\times10+5\\&=2\times10+5\times1\end{aligned}$$