WEIJIFEN JIAOCHENG

XITI JIEDA

微积分教程

习题解答

主编 涂晓青 白淑敏

WEIJIFEN JIAOCHENG XITI JIEDA

ZHUBIAN TU XIAOQING BAI SHUMIN

西南财经大学出版社

SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

WEIJIFEN JIAOCHENG
XITI JIEDA

微积分教程

习题解答

主编 涂晓青 白淑敏

WEIJIFEN JIAOCHENG XITI JIEDA
ZHUBIAN TU XIAOQING BAI SHUMIN

西南财经大学出版社
SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程习题解答/涂晓青,白淑敏主编.成都:西南财经大学出版社,2004.10
ISBN 7-81088-281-3

Ⅰ.微… Ⅱ.①涂…②白… Ⅲ.微积分—高等学校—解题 Ⅳ.0172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 102962 号

微积分教程习题解答

主编:涂晓青　白淑敏

责任编辑:涂敏
封面设计:大涛视觉传播设计事务所

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址:	http://www.xcpress.com/
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	四川机投印务有限公司
开　　本:	890mm×1240mm 1/32
印　　张:	11.875
字　　数:	290 千字
版　　次:	2004 年 10 月第 1 版
印　　次:	2004 年 10 月第 1 次印刷
印　　数:	1—5000 册
书　　号:	ISBN 7-81088-281-3/O·004
定　　价:	17.80 元

1. 如有印刷、装订等差错,可向本社发行部调换。

前　言

2002年,根据国家教育部颁布的《经济数学基础》教学大纲,参照国家考试中心硕士研究生入学《数学考试大纲》编写的教材《微积分教程》出版以后,经过两年的教学实践,广泛收集了老师、学生以及专家的意见,今年进行了全面修订,借教材修订的机会,我们对教材中的全部习题作出了解答,可供使用本教材的师生、自学者和准备报考经济类研究生的考生参考.

解答习题是数学学习中的重要环节.对于系统理解教材中的基本概念和基本理论,熟练掌握基本计算技能,具备抽象思维和逻辑推理能力、空间想象力、综合分析问题和解决问题的能力都是必须的.只有多做练习,才能达到熟能生巧的境界.有些题目有多种求解方法,希望使用本书的同学,切忌在没有自己独立完成教材中的习题前就直接查阅本习题解答.

本书第一、四章由崔红卫编写,第二、五、十章由涂晓青编写,第三、十一章由白淑敏编写,第六章由谢明文编写,第七章由谢建民编写,第八、九章由朱文莉编写,邓汝良、丁川、颜颖参与了部分原稿的编写和计算机输入工作.蔡薇担任了全书的作图工作,全书由涂晓青、白淑敏统稿,谢明文审阅了全书,并对本书各章部分习题作了具体修改.

在编写此解答的过程中,西南财经大学经济数学系领导和老师们给予了大量的支持和协作,西南财经大学出版社也鼎力相助,在此对他们谨表谢意.

限于编者水平有限,解题中疏漏错误在所难免,恳求广大读者提出宝贵意见.

编　者

2004年10月于光华园

目　录

第一章 函数

习题 1—1

1. 下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\tan(\arctan x)$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 0\\ x^3, x<0\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}x^3, x>0\\ x^2, x\leq 0\end{cases}$

(3) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$

(4) $y=f(x)$ 与 $s=f(t)$

解 (1) 因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都有定义,且

$$f(x)=x=\tan(\arctan x)=g(x)$$

所以两个函数相同.

(2) 因为两个函数的对应规则不同,所以两个函数不同.

(3) 因为函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 的定义域为

$$D_1=D(f)=\{x\in R 且 x\neq 0\}$$

而函数 $g(x)$ 的定义域为 $D_2=D(f)=R$

所以由 $D_1\neq D_2$ 知,两个函数为不相同的函数.

(4) 两个函数的对应关系相同,定义域相同,故两个函数相同.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$　　(2) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{x-1}}$

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{1+x}$　　(4) $y=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ x, & 0\leq x\leq 2\\ \sqrt{x-2}, & 2<x\end{cases}$

解 (1) 由偶次根式的定义可知, x 应满足关系式 $x^2-1\geq 0$
故函数的定义域为 $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(2) 由关系式 $\begin{cases}3-x>0\\ x-1>0\end{cases}$ 解得 $1<x<3$.

故函数的定义域为 $D(f)=(1,3)$.

(3) 要使该函数有意义, x 应满足关系式

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ 1+x\geq 0\end{cases}$$

解得 $x\neq\pm1, x\geq -1$.故函数的定义域为

$$D(f)=(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

(4) 因为分段函数的定义域为各分段函数定义域之并集,故

$$D(f)=(-\infty,0)\cup[0,2]\cup(2,+\infty)=(-\infty,+\infty).$$

3. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$,求 $f(0)$, $f(2)$, $f(-x)$, $f(2x)+1$, $f(\dfrac{1}{x})$, $f(2+h)$, $f(x+h)$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 其中 $(h\neq 0,\ -4.)$

解 当 $x=0$ 时, $f(0)=\dfrac{1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$.

当 $x=2$ 时, $f(2)=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$.

当 $x=-t$ 时, $f(-t)=\dfrac{1}{2-t}$,所以 $f(-x)=\dfrac{1}{2-x}$.

当 $x=2\,t$ 时, $f(2t)=\dfrac{1}{2t+2}$,所以 $f(2x)+1=\dfrac{2x+3}{2(x+1)}$.

当 $x=\dfrac{1}{t}(t\neq 0)$ 时, $f(\dfrac{1}{t})=\dfrac{1}{\dfrac{1}{t}+2}=\dfrac{t}{1+2t}$,所以 $f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x}{1+2x}$.

当 $x=2+h$ 时, $f(2+h)=\dfrac{1}{h+4}$.

当 $x=t+h$ 时, $f(t+h)=\dfrac{1}{t+h+2}$,所以 $f(x+h)=\dfrac{1}{x+h+2}$.

故 $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{1}{(x+h+2)(x+2)}.$$

4. 求下列函数的值.

(1) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ 2x+3, & x>1\end{cases}$,求 $f(0), f(1+a), f(-1.5)$.

(2) $f(x)=\sin x$,求 $f(-\arcsin\frac{1}{2})$.

解 (1) 当 $x=0$ 时, $f(0)=1$.

当 $1+a<1$ 即 $a<0$ 时, $f(1+a)=2+a$.

当 $1+a>1$ 即 $a>0$ 时, $f(1+a)=2a+5$

即 $$f(1+a)=\begin{cases}2+a, & a<0\\ 5+2a, & a>0\end{cases}$$

当 $x=-1.5<1$ 时,有 $f(-1.5)=-0.5$.

(2) 因为 $f(x)=\sin x$,所以

$$f(-\arcsin\frac{1}{2})=\sin(-\arcsin\frac{1}{2})=-\sin(\arcsin\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}.$$

5. 求函数的定义域:

(1) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[-4,4]$,求 $f(x^2)$ 的定义域;

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,3a]$ $(a>0)$,求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域;

(3) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求 $f(\lg x)$ 的定义域;

(4) 若 $f(1-x)$ 的定义域是 $[-1,1]$,求 $f(x)$ 的定义域.

解 (1) 因为 $f(x)$ 中的 x 满足 $-4\le x\le 4$

所以 $f(x^2)$ 中的 x^2 必须满足 $-4\le x^2\le 4$,即 $-2\le x\le 2$.

故函数 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-2, 2]$.

(2) 欲使函数有定义,须且只需使 $f(x+a)$ 和 $f(x-a)$ 同时有定义,于是

$$\begin{cases}0\le x+a\le 3a\\ 0\le x-a\le 3a\end{cases}\quad (a>0)$$

即 $\qquad a \le x \le 2a$.

故函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为$[a, 2a] \quad (a>0)$.

(3) 因为 $f(\lg x)$ 中的 $\lg x$,必须满足 $0 \le \lg x \le 1$,即$1 \le x \le 10$.

故函数 $f(\lg x)$ 的定义域为$[1,10]$.

(4) 由 $f(1-x)$ 的定义域为$[-1,1]$,得$-1 \le x \le 1$

令 $u=1-x$, 则由 $-1 \le -x \le 1$ 知,有

$$0 \le u \le 2$$

故函数 $f(u)$ 即 $f(x)$ 的定义域为$[0, 2]$.

6. 设函数 $f(x)$ 对一切正数都满足方程 $f(xy)=f(x)+f(y)$. 求证:

(1) $f(1)=0$ $\qquad$ (2) $f(\frac{1}{x})=-f(x)$

(3) $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

证 (1) 在已知方程中,令 $x=1, y=1$,得

$$f(1)=f(1)+f(1)=2f(1)$$

即
$$f(1)=0.$$

(2) 在已知方程中,令 $y=\frac{1}{x}$,则 $f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x})=0$

即
$$f(\frac{1}{x})=-f(x).$$

(3) 在已知等式中, x 不变,而将 y 用 $\frac{1}{y}$ 代换,得

$$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$$

将(2)式代入上式,得

$$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y).$$

7. 当k为何值时 $f(x)=\dfrac{x+k}{kx^2+2kx+2}$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

解　当 $k=0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{2}$，此时函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $k\neq 0$ 时，只要 $kx^2+2kx+2\neq 0$，

即 $\Delta=(2k)^2-4\times 2k<0$，也就是 $0<k<2$ 时，函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

故当 $0\le k<2$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x+k}{kx^2+2kx+2}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

8. 求函数 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$ 的定义域.

解　$D(f)=[-1,1]\cup(-2,-1)\cup(1,2)=(-2,2)$.

习题　1—2

1. 判断下列函数的单调性:

(1) $y=(\dfrac{1}{2})^x$　　(2) $y=\log_2{}^x$

(3) $y=x+\ln x$　　(4) $y=1-x^2$

解　(1) 对于指数函数 $y=(\dfrac{1}{2})^x$，底数 $\dfrac{1}{2}<1$，故是单调减函数.

(2) 对于对数函数 $y=\log_2 x$，底数 $2>1$，故是单调增函数.

(3) 因为 $y=x+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，对于 $\forall x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\ln x_1-x_2-\ln x_2$$
$$=x_1-x_2+\ln\frac{x_1}{x_2}$$

由假设知 $x_1-x_2<0,\ln\dfrac{x_1}{x_2}<0$，得 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数.

(4) 因为 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，而在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所

以 $y=1-x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数,而在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

2. 指出下列函数的奇偶性:

(1) $y=x^3+3x$　　(2) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}\quad(-1<x<1)$

(3) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{x}\quad(x\neq 0)$　　(4) $y=\begin{cases}1-x, & x\leq 0\\ 1+x, & x>0\end{cases}$

(5) $y=x\sin\dfrac{1}{x}\quad(x\neq 0)$　　(6) $y=x\cos x+\sin x$.

解 (1) 因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,均有

$$f(-x)=(-x)^3+3(-x)=-(x^3+3x)=-f(x)$$

所以该函数为奇函数.

(2) 因为 $\forall x\in(-1,1)$,均有

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以该函数为奇函数.

(3) 因为对于 $\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,均有

$$f(-x)=\frac{a^{-x}-a^x}{-x}=\frac{a^x-a^{-x}}{x}=f(x)$$

所以该函数为偶函数.

(4) 因为当 $x>0$,即 $-x<0$ 时,有 $f(-x)=1-(-x)=1+x$,而当 $x\leq 0$,即 $-x\geq 0$ 时,有 $f(-x)=1+(-x)=1-x$,于是

$$f(-x)=f(x)=\begin{cases}1+x, & x>0\\ 1-x, & x\leq 0\end{cases}$$

所以该函数 $f(x)$ 为偶函数.

(5) 因为 $\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,均有

$$f(-x)=(-x)\sin(-\frac{1}{x})=x\sin\frac{1}{x}=f(x)$$

所以该函数 $f(x)$ 为偶函数.

(6) 因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,均有

$$f(-x)=(-x)\cos(-x)+\sin(-x)$$
$$=-x\cos x-\sin x=-(x\cos x+\sin x)=-f(x)$$

所以该函数 $f(x)$ 为奇函数.

3. 下列函数是否为周期函数,如果是周期函数,求其周期.

(1) $f(x)=|\sin x|$　　　　(2) $f(x)=x\cos x$

解 (1) 令 $f(x+T)=f(x)$,则 $|\sin(x+T)|=|\sin x|$.而满足上式的 T 之最小正值为 π.因此, $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(2) 设 $f(x+T)=f(x)$,则 $(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$

当 $x=0$ 时,由 $T\cos T=0$,得 $T_1=\dfrac{\pi}{2}$;

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时,由 $(T+\dfrac{\pi}{2})\cos(T+\dfrac{\pi}{2})=0$, 得 $T_2=\pi$.

由于 $f(x)$ 不满足 $\forall x\in D(f)$,T 均为唯一正值,即 T 随 x 的变化而变化,所以 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数.

4. 证明函数 $f(x)=x^2+x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数.

证 因为 $\forall\ x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$,均有

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+x_1+1)-(x_2^2+x_2+1)$$
$$=(x_1-x_2)(x_1+x_2+1)$$

而 $x_1-x_2<0$ 时, $x_1+x_2+1>0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即

$$f(x_1)<f(x_2)$$

故 $f(x)$ 为单调增函数.

5. $f(x)$ 为定义在(－1,1)上的奇函数,若 $f(x)$ 在(0,1)内是单调增函数,证明在(－1,0)内也单调递增.

证 设 x_1 、 x_2 为(－1,0)内的任意两点,且 $x_1<x_2$,则 $-x_1$ 、 $-x_2\in(0,1)$,且 $-x_1>-x_2$. 由 $f(x)$ 在(0,1) 内为单增函数,得

$$f(x_1)-f(x_2)=-f(-x_1)+f(-x_2)=-[f(-x_1)-f(-x_2)]<0$$

即 $$f(x_1)<f(x_2)$$

故 $f(x)$ 在(－1,0)内也单调递增.

6. 证明 $y=\sqrt{x}\cos x$ 不是周期函数.

证　因为 $D(f)=[0,+\infty)$，不是一个双向无界的数集，所以 $f(x)=\sqrt{x}\cos x$ 不是周期函数.

7. 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$ 在其定义域内是有界的.

证　因为　$x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geq 4$

所以
$$0\leq \frac{1}{x^2+2x+5}\leq \frac{1}{4}$$

故由函数有界的定义知,函数 $f(x)$ 在其定义域内是有界的.

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 且满足

$$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$$

其中 a,b,c 均为常数,$|a|\neq|b|$.证明 $f(x)$ 为奇函数.

证　在已知等式中,用 $\dfrac{1}{x}$ 代替 x,得

$$af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$$

解方程组 $\begin{cases} af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \\ af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx \end{cases}$,得

$$f(x)=\frac{(a-bx^2)c}{x}\cdot\frac{1}{a^2-b^2}\qquad (a^2\neq b^2)$$

因为 $f(-x)=\dfrac{(a-bx^2)c}{-x}\cdot\dfrac{1}{a^2-b^2}=-\dfrac{(a-bx^2)c}{x(a^2-b^2)}=-f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

9. 证明定义在对称区间上的任意函数可以写成一个偶函数和一个奇函数之和.

证 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 I 上的任意一个函数, 则

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

令 $F_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，$F_2(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ $(x\in I)$,则由 I 为对称区间,知

只要 $\forall x\in I$,必有 $-x\in I$ 且

$$F_1(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=F_1(x)$$

$$F_2(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-F_2(x)$$

即 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别是对称区间 I 上的偶函数与奇函数且

$$f(x)=F_1(x)+F_2(x)$$

故函数 $f(x)$ 可表示为偶函数 $F_1(x)$ 与奇函数 $F_2(x)$ 之和.

习题 1—3

1. 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ (2) $y=1+\lg(x+1)$

(3) $y=\begin{cases}2-\sqrt{4-x^2}, & 0\le x\le 2\\ 2x-2, & 2<x\le 4\end{cases}$ (4) $y=5x-1$

解 (1)由所给函数解出 x，得

$$x=\frac{2(y+1)}{y-1}$$

交换 x,y 得，反函数 $y=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$ $(x\neq 1)$.

(2) 由已知函数解出 x,得

$$x=10^{(y-1)}-1$$

交换 x,y 得，反函数 $y=10^{(x-1)}-1$ $(-\infty,+\infty)$.

(3) 当 $0\le x\le 2$ 时,由 $y=2-\sqrt{4-x^2}$ $(0\le y\le 2)$ 得

$$x=\sqrt{4y-y^2}$$