高等学校理工类专业基础课教材

概率论与数理统计学习指导

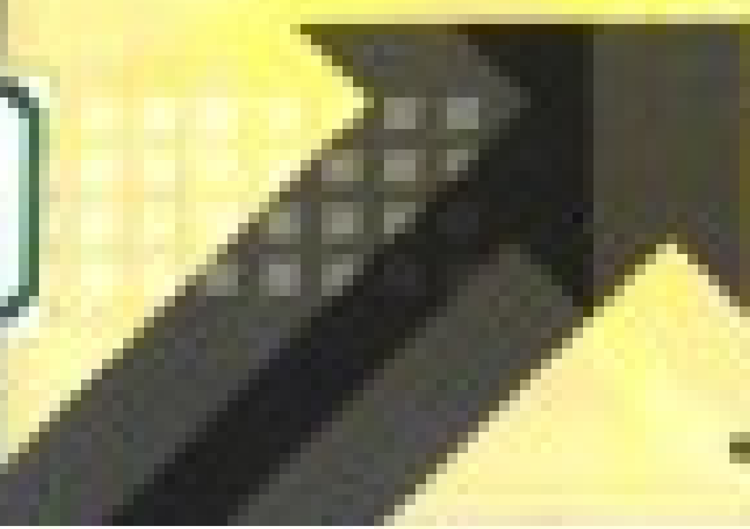
主编 李景和 金大永

编著 赵娇云 袁莉萍 吴梦虹 王颖

主审 杨永发

南开大学出版社

概率论与数理统计学习指导



高等学校理工类专业基础课教材

概率论与数理统计学习指导

主编　李景和　金大永
编著　赵娇云　袁莉萍
　　　吴梦虹　王　颖
主审　杨永发

南开大学出版社
天津

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/李景和主编. 一天津:南开大学出版社,2003.5(2004.12重印)

ISBN 7-310-01849-4

Ⅰ.概... Ⅱ.李... Ⅲ.①概率论一高等学校一教学参考资料②数理统计一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 005081 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2003 年 5 月第 1 版 2004 年 12 月第 4 次印刷

850×1168 毫米 32 开本 7 印张 174 千字

定价:16.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

前　言

本书是南开大学出版社《概率论与数理统计教程》一书的配套参考书．该书是工科大学“概率论与数理统计”课程的教学用书，自 2000 年出版以来，以其内容丰富、条理清楚、论述严谨、便于阅读的特点受到广泛好评，被多所学校选作教科书．考虑到“概率论与数理统计”是理工类各专业的一门重要基础课，为了帮助读者进一步学好这门课程，我们特组织了一些多年教授该课程的教师，编写了这本学习指导书．

本书内容包括：主要内容，习题选解，补充习题和考研习题集锦．其中，主要内容根据该课程的教学基本要求，对每一章的内容进行了归纳和总结．习题选解则选解了各章的部分有一定难度的习题．补充习题部分给出了较多的课外练习题，内容反映教学基本要求，少量的题目有一定难度．所有补充习题均给出了详尽的解答，供读者参考．考研习题集锦从历年的研究生入学考试试题和考研复习资料中选取了一些难度稍大，需一定解题技巧的习题，但很多都很有趣味，可以让我们感受到概率论美与和谐的魅力，引起对这门课程的兴趣．

作为配套参考书，本书的编排次序与原教程一致，以利于读者在学习的过程中同步阅读．虽然所有习题均给出了解答，甚至有的给出了多种解法，但这些答案应在读者求解了习题之后再对照使用．

本书概率论部分“主要内容”由李景和编写，“习题选解”由赵娇云编写，“补充习题”和“考研习题集锦”由王颖编写；数理统计部

分“主要内容”由金大永编写，“习题选解”由袁莉萍编写，“补充习题”和“考研习题集锦”由吴梦虹编写，杨永发审阅了全部书稿．

南开大学出版社李正明编审对本书提出了创意并给出了具体的指导，莫建来老师对本书的出版给予了很大的帮助，在此表示衷心的感谢．

我们希望使用本书的读者对书中的缺点和错误进行指正，以使本书的内容在再版时进一步得到完善．

编者

2002 年 12 月

目 录

第一章　概率论的基本概念

§1.1　主要内容

本章给出了概率论中的一些基本术语和基本概念，讨论了古典概型概率问题的解法．本章是其他各章的基础．

1.1.1　随机事件及概率定义

1. 随机事件

随机现象的统计规律性用随机试验描述．

定义 1.1　随机试验 E 的每个基本结果叫做一个**样本点**（或基本事件），记为 ω. E 的全体样本点构成的集合叫**样本空间**（或基本事件空间），记为 Ω. Ω 的任一个子集叫 E 的一个**随机事件**．随机事件常用英文字母 $A,B,\cdots$表示．

随机事件是若干个样本点组成的 Ω 的一个子集，它表示随机试验的某种结果．若试验的结果 $\omega\in A$，称事件 A **发生**，若 $\omega\notin A$，称 A **没有发生**．

基本事件是随机试验 E 的最"小"的事件，它是由 Ω 的单个元素构成的单子集．另外，全集 Ω 和空集 Φ 也是 Ω 的两个特殊子集，前者在每次试验中必然发生，叫**必然事件**，后者在每次试验中都不发生，叫**不可能事件**．

必然事件和不可能事件是随机事件的两个极端情形，代表了随机现象和确定性现象之间的过渡．

利用集合论中子集之间的关系和运算，可以定义事件之间的关系和运算．这就是：

(1)**包含关系**　$A \subset B$，表示事件 A 发生必导致事件 B 发生．

(2)**等价(相等)关系**　$A=B$，表示 $A \subset B$ 且 $B \subset A$.

(3)**并运算**　$A \cup B$，表示事件 A 或事件 B 至少有一个发生．

(4)**交运算**　$A \cap B$ 或 AB，表示事件 A 和事件 B 同时发生．

(5)**相容关系**　当 $AB \neq \Phi$ 时，称 A 与 B **相容**，当 $AB=\Phi$ 时，称 A 与 B **不相容**．

(6)**对立关系**　$B=\overline{A}$，指事件 B 满足条件

$$AB=\Phi, A \cup B=\Omega \tag{1.1}$$

(7)**差运算**　$A-B$，表示事件 A 发生而事件 B 不发生．显然有

$$A-B=A-AB=A\overline{B} \tag{1.2}$$

事件的关系和运算利用集合论中的维恩图来表示，直观而便于理解，即用平面上的一个矩形表示 Ω，矩形域中的一个点表示试验的一个结果 ω，事件 A 和 B 则分别用矩形域内的两个圆表示(见教程图 1-3～图 1-7).

事件的交运算和并运算满足的运算法则有：

(1)**交换律**　$A \cup B=B \cup A, AB=BA$；　(1.3)

(2)**结合律**　$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C),(AB)C=A(BC)$；　(1.4)

(3)**分配律**　$(A \cup B)C=AC \cup BC,(AB) \cup C=(A \cup C)(B \cup C)$；　(1.5)

由事件的对立关系可以导出．

(4)**对偶律**　$\overline{A \cup B}=\overline{A}\ \overline{B}, \overline{AB}=\overline{A} \cup \overline{B}$.　(1.6)

上述运算规律均可以推广到有限多个事件的情形．

2. 概率的定义

概率是度量随机事件发生的可能性大小的一个量，它的外在

表现是多次重复试验中事件出现的频率．

定义 1.2 设 A 是随机试验 E 的一个事件，将 E 重复进行 n 次，A 出现的次数记为 $N_n(A)$，称比值

$$f_n(A)=\frac{N_n(A)}{n} \tag{1.7}$$

为 n 次试验中 A 出现的**频率**．

频率 $f_n(A)$ 具有一个重要的性质：随着 n 的改变 $f_n(A)$ 在某一个数 p 的上下摆动，且随 $n\to\infty$，$f_n(A)$ 将趋向于 p.

频率具有如下三个性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.（非负性） (1.8)

(2) $f_n(\Omega)=1$.（规范性） (1.9)

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{n}A_n)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A).\text{（有限可加性）} \tag{1.10}$$

概率定义的对象是随机事件，为了使所定义的概率具备适当的性质，要求概率的"定义域"包含的随机事件足够多，这就需要这些随机事件组成的集合 $\mathscr{F}$ 构成一个事件域．

定义 1.3 设 $\mathscr{F}$ 是随机试验 E 的一个事件域，$P(A)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个实值函数，满足以下三个条件（公理）：

(1)（非负性公理） $0\leqslant P(A)\leqslant 1$； (1.11)

(2)（规范性公理） $P(\Omega)=1$； (1.12)

(3)（可列可加性公理） 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个两两不相容的事件列，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i). \tag{1.13}$$

称 $P(A)$ 是事件 A 的**概率**．

概率具有如下的常用性质：

(1)不可能事件的概率为零，即 $P(\Phi)=0$； (1.14)

(2)(有限可加性)　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.15}$$

(3)$P(\overline{A})=1-P(A)$. (1.16)

(4)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. (1.17)

推论　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$. (1.18)

(5)若 $B\subset A$,则 $P(B)\leqslant P(A)$. (1.19)

推论 1　若 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$. (1.20)

推论 2　$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$. (1.21)

3. 古典概型

定义 1.4　当随机试验 E 满足条件:

(1)E 的样本空间 Ω 中只有有限个样本点;

(2)每个样本点发生的可能性相同,则称 E 为**等可能概型**.

设 A 为古典概型 E 的一个随机事件,E 的样本空间中包含 n 个样本点,A 中包含 m 个样本点,可以定义 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.22}$$

计算古典概型随机事件的概率是一个难点,读者应适当加强练习.计算常用的工具是排列公式(考虑次序)和组合公式(不考虑次序).应注意求 n 和 m 时有序性要一致.

1.1.2　条件概率

1. 条件概率

定义 1.5　设 A,B 是两个随机事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.23}$$

为事件 B 在事件 A 已发生的条件下的**条件概率**.

容易验证，条件概率满足概率定义 1.3 中的三个公理，因此，条件概率满足概率的所有性质．又若令 $\Omega=A$，则 $P(B)=P(B|\Omega)$，即一般概率可以看作是必然事件发生的条件下的条件概率．

由式(1.23)立即可以得到以下定理．

定理 1.1(乘法公式) 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A). \tag{1.24}$$

定义 1.6(样本空间的划分) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一组事件，满足条件：

(1) $A_iA_j=\Phi,\ i,j=1,2,\cdots,i\neq j$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$.

称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个**划分**．

利用样本空间的划分，可以给出计算概率的全概率公式和贝叶斯公式．

定理 1.2(全概率公式) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分，$P(A_i)>0$，B 是任意一个事件，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i). \tag{1.25}$$

定理 1.3(贝叶斯公式) 在全概率公式的条件下，有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_i)}. \tag{1.26}$$

2. 事件的独立性

两个事件 A 与 B 独立的意义是指 A 的发生对 B 是否发生不产生影响，即

$$P(B|A)=P(B). \tag{1.27}$$

定理 1.4 设 $P(A)>0$，则式(1.27)成立的充要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{1.28}$$

两个事件独立的定义可以由式(1.28)或式(1.27)给出，为了

应用上的方便和形式简捷，我们用式(1.28)来定义两个事件的独立性．

定义 1.7 设 A,B 是两个事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

称事件 A,B **相互独立**．

事件 A,B 相互独立的充要条件是式(1.27)成立．

定理 1.5 在 4 对事件 $\{A,B\},\{A,\overline{B}\},\{\overline{A},B\},\{\overline{A},\overline{B}\}$ 中，如果有 1 对相互独立，则另外 3 对也相互独立．

多个事件的独立性由式(1.28)推广得到．

定义 1.8(3 个事件的独立性) 设 A,B,C 是 3 个事件，如果有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \tag{1.29}$$

$$\left.\begin{aligned}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\end{aligned}\right\}, \tag{1.30}$$

称 A,B,C **相互独立**．

值得注意的是，式(1.29)和式(1.30)相互不能推出，故定义 1.8 中的 4 个等式都是必需的．如果仅有式(1.30)成立，我们称 A,B,C **两两独立**．

定理 1.6(n 个相互独立的事件至少发生其一的概率) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个相互独立的随机事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]. \tag{1.31}$$

3.n 重伯努利试验

设有相继进行的 n 次试验，如果

(1)每次试验都是在相同的条件下进行，即每次试验的样本空间相同；

(2)各次试验是独立的，即每次试验的结果对其他各次试验没

有影响，则称由这 n 次试验构成的复合试验为 n **重独立重复试验**.

若随机试验 E 只有两种可能结果：事件 A 和事件 $\overline{A}$，且 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p$，则称 E 为**伯努利试验**. 由伯努利试验构成的 n 重独立试验称为 n **重伯努利试验**.

n 重伯努利试验是一种非常重要的概率模型，在讨论某事件出现的频率时特别有用. 关于事件 A 恰出现 k 次的概率，有如下的定理.

定理 1.7 设在伯努利试验中，事件 A 出现的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中，事件 A 恰出现 k 次的概率为

$$P_n(k)=b(k;n,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\qquad k=0,1,\cdots,n. \tag{1.32}$$

式(1.32)称为**伯努利公式**，也叫**二项概率公式**.

§1.2 习题选解

1[①]. 从包含两件正品 a_1, a_2 和两件次品 b_1, b_2 的 4 件产品中，分别按(1)每次取出后不放回；(2)每次取出观察后放回两种不同方式，依次取出两件，试分别写出这两个试验的样本空间.

解 (1)每次取出后不放回. 考虑这个试验的样本空间时，可以按有序抽样，考虑产品抽出的先后次序，也可以按无序抽样，不考虑产品抽出的先后次序. 在有序抽样情形，样本空间为：

$$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_1),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,b_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_2,b_1)\}.$$

在无序抽样情形，诸如(a_1,a_2)，(a_2,a_1)将成为同一个样本点，这时样本空间为：

---

① 习题选解的编号使用原题在教程各章习题中的题号，后面相同.

$$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,b_2)\}.$$

应该指出，考虑 Ω 中任意一个随机事件包含的样本点时，应与 Ω 的有序性相一致．另外看到，在有序抽样情形，Ω 中的样本点数目用排列公式 P_4^2 计算；在无序抽样情形，Ω 中的样本点数目用组合公式 C_4^2 计算．

(2)有放回抽样情形，必须考虑抽出产品的顺序，这时样本空间为：

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),\\&(a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),\\&(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,b_1),(b_1,b_2),\\&(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_2,b_1),(b_2,b_1)\}.\end{aligned}$$

样本空间中所含样本点的数目用可重复排列公式 4^2 计算．

2. 设 A 表示事件：甲种产品畅销，乙种产品滞销，问 A 的对立事件 $\overline{A}$ 表示什么？

解 以 B 表示事件：甲种产品畅销，C 表示事件：乙种产品滞销，则 $A=BC$，依对偶律，有

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C},$$

故 A 表示事件：甲种产品滞销或乙种产品畅销．

5. 证明：$P(AB)=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})$，由此可得，当 $P(A)=P(B)=0.5$ 时，有

$$P(AB)=P(A\ B).$$

证 $P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})$

$$=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B}).$$

将 $P(\overline{A})=1-P(A)=0.5$，$P(\overline{B})=1-P(B)=0.5$ 代入上式，得 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

7. 把一副纸牌发给 4 个人，问某一人得到 $k(k=0,1,2,3,4)$ 个 A 的概率 $P(A_k)$ 有多大？又 $\sum_{k=0}^{4}P(A_k)=?$