

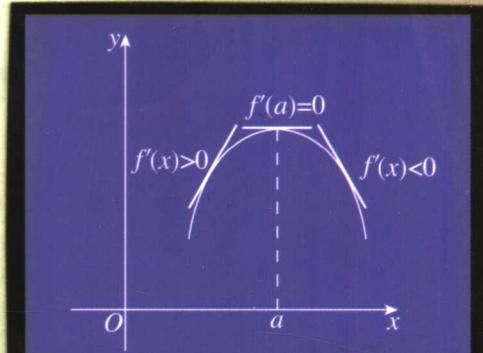
经全国中小学教材审定委员会  
2003年审查通过

全日制普通高级中学教科书

# 数学

第三册 (选修 II)

人民教育出版社中学数学室 编著



SHUXUE

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书

数 学

第三册(选修Ⅱ)

人民教育出版社中学数学室 编著

\*

人 人 教 材 出 版 社 出 版 发 行

(北京沙滩后街55号 邮编:100009)

网 址: <http://www.pep.com.cn>

北京市白帆印务有限公司印装 全国新华书店经销

\*

开本: 890 毫米×1 194 毫米 1/16 印张: 10.75 字数: 160 000

2004年6月第1版 2005年5月第6次印刷

印数: 123 501 ~ 143 500

ISBN 7-107-17448-7 定价: 11.10 元  
G·10538(课)

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与出版社联系调换。

(联系地址: 北京市方庄小区芳城园三区13号楼 邮编: 100078)

# 说 明

《全日制普通高级中学教科书·数学》(以下简称《数学》)是根据教育部2002年颁布的《全日制普通高级中学课程计划》和《全日制普通高级中学数学教学大纲》的规定,在《全日制普通高级中学教科书(试验修订本)·数学》的基础上进行修订的。此次修订的指导思想是:遵循“教育要面向现代化,面向世界,面向未来”的战略思想,贯彻教育必须为社会主义现代化建设服务,必须与生产劳动相结合,培养德、智、体、美全面发展的社会主义事业的建设者和接班人的方针,以全面推进素质教育为宗旨,全面提高普通高中教育质量。

普通高中教育,是与九年义务教育相衔接的高一层次的基础教育。高中教材的编写,旨在进一步提高学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质,培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应社会生活的能力,促进学生的全面发展,为高一级学校和社会输送素质良好的合格毕业生。

《数学》包括三册,其中第一册、第二册是必修课本,分别在高一、高二学习,每周4课时;第三册是选修课本,在高三学习,它又分为选修Ⅰ和选修Ⅱ两种,每周分别为2课时和4课时,供高中三年级全学年使用。本书是《数学》第三册(选修Ⅱ),内容包括概率与统计、极限、导数、复数四章。

全套书在体例上有下列特点:

1. 每章均配有章头图和引言,作为全章内容的导入,使学生初步了解学习这一章的必要性。
2. 书中习题共分三类:练习、习题、复习参考题。

练习 以复习相应小节的教学内容为主,供课堂练习用。

习题 每小节后一般配有习题,供课内、外作业选用,少数标有\*号的题在难度上略有提高,仅供学有余力的学生选用。

复习参考题 每章最后配有复习参考题,分A、B两组,A组题是属于基本要求范围的,供复习全章使用;B组题带有一定的灵活性,难度上略有提高,仅供学有余力的学生选用。

3. 每章在内容后面均安排有小结与复习,包括内容提要、学习要求和需要注意的问题、参考例题三部分,供复习全章时参考。

4. 每章附有一至两篇不作教学要求的阅读材料,供学生课外阅读,借以扩大知识面、激发学习兴趣、培养应用数学的意识。

本套书由人民教育出版社中学数学室编写,其中《数学》第三册(限选·理科)原试验本的编写工作由薛彬主持,参加编写工作的有俞求是、饶汉昌、田载今、李海东、袁明德、方明一、张劲松、颜其鹏、蔡上鹤等,责任编辑为袁明德、张劲松,审稿为蔡上鹤。

《数学》第三册(限选·理科)原试验本在编写过程中蒙孔令颐、蒋佩锦、储瑞年、戴佳珉、李果民、王华等同志提出宝贵意见,在此表示衷心感谢。

参加本次修订的有俞求是、饶汉昌、田载今、李海东、薛彬、张劲松、颜其鹏、蔡上鹤等,责任编辑为张劲松。

人民教育出版社中学数学室

2003年12月

## 本书部分常用符号

$\mu$	总体平均数
$\bar{x}$	样本平均数
$\sigma^2$	总体方差
$\sigma$	总体标准差
$s^2, s^{*2}$	总体方差的估计值
$s, s^*$	总体标准差的估计值
$N(\mu, \sigma^2)$	呈正态分布的总体
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	当 $n$ 趋向于无穷大时, 数列 $\{a_n\}$ 的极限
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	当 $x$ 趋向于无穷大时, 函数 $f(x)$ 的极限
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限
$\Delta x$	自变量 $x$ 的增量
$\Delta y$	函数 $y$ 的增量
$f'(x_0)$	函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的导数
$y' _{x=x_0}$	函数 $y$ 在 $x_0$ 处的导数
$f'(x)$	函数 $f(x)$ 的导函数
$y'$	函数 $y$ 的导函数
$i$	虚数单位, $i^2 = -1$
$C$	复数集
$z, a+bi$	复数 $z$ , 实部为 $a$ 、虚部为 $b$ 的复数

# 目 录

第二章 章目录

301 第一章 概率与统计

## 第一章 概率与统计

一 随机变量	4
1.1 离散型随机变量的分布列	4
1.2 离散型随机变量的期望与方差	9
二 统计	18
1.3 抽样方法	18
1.4 总体分布的估计	25
阅读材料 累积频率分布	30
1.5 正态分布	32
1.6 线性回归	36
阅读材料 回归直线方程的推导	43
实习作业 通过抽样调查,研究实际问题	45
小结与复习	48
复习参考题一	53

## 第二章 极限

一 数学归纳法	62
2.1 数学归纳法及其应用举例	62
阅读材料 不完全归纳法与完全归纳法	69
研究性学习课题:杨辉三角	71
二 极限	73
2.2 数列的极限	73
2.3 函数的极限	77
2.4 极限的四则运算	84
阅读材料 无穷等比数列( $ q <1$ )的和	91
2.5 函数的连续性	93
小结与复习	97
复习参考题二	102

### 第三章 导数

一 导数	108
3.1 导数的概念	108
3.2 几种常见函数的导数	114
阅读材料 变化率举例	117
3.3 函数的和、差、积、商的导数	118
3.4 复合函数的导数	121
3.5 对数函数与指数函数的导数	123
阅读材料 近似计算	126
二 导数的应用	127
3.6 函数的单调性	127
3.7 函数的极值	128
3.8 函数的最大值与最小值	130
3.9 微积分建立的时代背景和历史意义	135
小结与复习	139
复习参考题三	143

### 第四章 数系的扩充——复数

4.1 复数的概念	148
4.2 复数的运算	151
4.3 数系的扩充	154
研究性学习课题：复数与平面向量、三角函数的联系	157
小结与复习	159
复习参考题四	161

附录一 部分中英文词汇对照表	162
----------------	-----

附录二 导数公式表	164
-----------	-----

全日制普通高级中学教科书

# 数 学

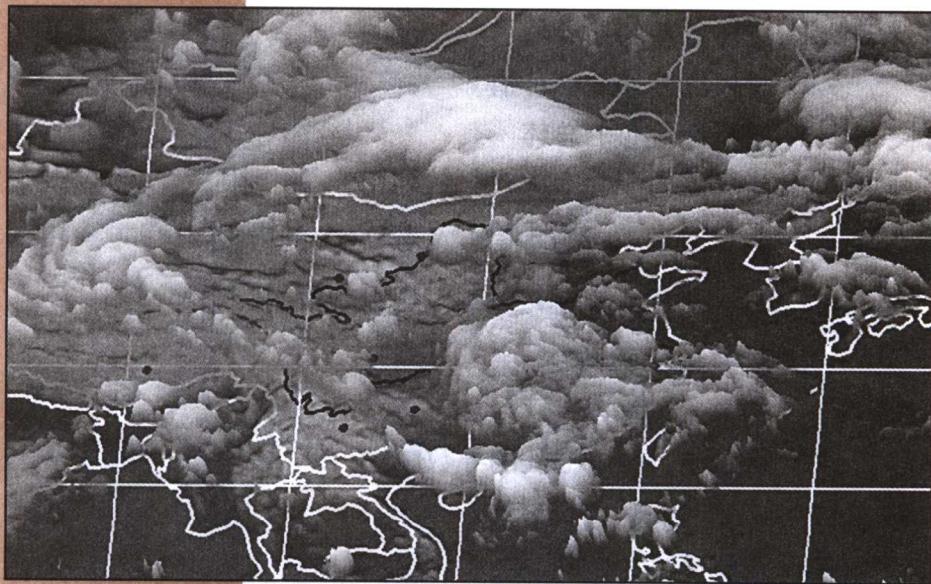
第三册（选修Ⅱ）

人民教育出版社中学数学室 编著

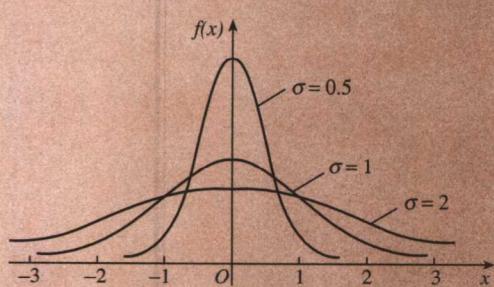
人民教育出版社

23J97 / 07

# 第一章 概率与统计



- 1.1 离散型随机变量的分布列
- 1.2 离散型随机变量的期望与方差
- 1.3 抽样方法
- 1.4 总体分布的估计
- 1.5 正态分布
- 1.6 线性回归
- 实习作业 通过抽样调查，研究实际问题



我们来看下面的两个问题.

某商场要根据天气预报来决定节日是在商场内还是在商场外开展促销活动. 统计资料表明, 每年国庆节商场内的促销活动可获得经济效益 2 万元; 商场外的促销活动如果不遇到有雨天气可获得经济效益 10 万元, 如果促销活动中遇到有雨天气则带来经济损失 4 万元. 9 月 30 日气象台预报国庆节当地有雨的概率是 40%, 商场应该选择哪种促销方式?

在当今社会中, 抽样调查已成为社会研究的常用方法. 例如, 有关部门要通过了解某地区小学入学新生的体重、身高情况来分析这些学生的身体发育状况, 需要从这些学生中抽取部分学生, 对他们的体重、身高的数据进行统计处理. 怎样抽取一部分学生才能较好地反映全体学生的情况? 怎样估计学生身体发育状况的平均水平? 怎样估计学生身体发育的总体分布状况?

以上问题涉及将要在本章学习的随机变量和统计的知识. 本章将在初中“统计初步”和高中必修课“概率”的基础上, 学习随机变量和统计的一些知识, 其中重点研究离散型随机变量的分布列、期望与方差, 抽样方法, 总体分布的估计, 正态分布和线性回归.

# 一 随机变量

## 1.1 离散型随机变量的分布列

### 1. 离散型随机变量

先看下面的问题.

某人射击一次, 可能出现命中 0 环, 命中 1 环, …, 命中 10 环等结果, 即可能出现的结果可以由 0, 1, …, 10 这 11 个数表示.

某次产品检验, 在可能含有次品的 100 件产品中任意抽取 4 件, 那么其中含有的次品可能是 0 件, 1 件, 2 件, 3 件, 4 件, 即可能出现的结果可以由 0, 1, 2, 3, 4 这 5 个数表示.

在上面射击的随机试验中, 可能出现的结果都可以用一个数即“环数”来表示, 这个数在随机试验前是无法预先确定的, 在不同的随机试验中, 结果可能有变化, 就是说, 这种随机试验的结果可以用一个变量来表示. 在产品检验的随机试验中, 结果也可以用“次品数”这个变量来表示.

如果随机试验的结果可以用一个变量来表示, 那么这样的变量

①  $\xi$  的国际音标为 [ksi : ], 叫做随机变量. 随机变量常用希腊字母  $\xi$ 、 $\eta$  ② 等表示.

②  $\eta$  的国际音标为 ['eitə].

例如, 上面射击的命中环数  $\xi$  是一个随机变量:

$\xi=0$ , 表示命中 0 环;

$\xi=1$ , 表示命中 1 环;

……

$\xi=10$ , 表示命中 10 环.

上面产品检验所取 4 件产品中含有的次品数  $\eta$  也是一个随机变量:

$\eta=0$ , 表示含有 0 个次品;

$\eta=1$ , 表示含有 1 个次品;

$\eta=2$ , 表示含有 2 个次品;

$\eta=3$ , 表示含有 3 个次品;

$\eta=4$ , 表示含有 4 个次品.

在上面的射击、产品检验等例子中, 对于随机变量可能取的值, 我们可以按一定次序一一列出, 这样的随机变量叫做离散型随机变量.

任意掷一枚硬币，可能出现正面向上、反面向上这两种结果，虽然这个随机试验的结果不具有数量性质，但仍可以用数量来表示它。我们用变量  $\xi$  来表示这个随机试验的结果：

$\xi=0$ , 表示正面向上；

$\xi=1$ , 表示反面向上。

此外，若  $\xi$  是随机变量， $\eta=a\xi+b$ , 其中  $a, b$  是常数，则  $\eta$  也是随机变量。

## 练习

1. 写出下列各随机变量可能取的值，并说明随机变量所取的值所表示的随机试验的结果：
  - (1) 从 10 张已编号的卡片（从 1 号到 10 号）中任取 1 张，被取出的卡片的号数  $\xi$ ；
  - (2) 一个袋中装有 5 个白球和 5 个黑球，从中任取 3 个，其中所含白球的个数  $\xi$ ；
  - (3) 抛掷两个骰子，所得点数之和  $\xi$ ；
  - (4) 接连不断地射击，首次命中目标需要的射击次数  $\eta$ 。
2. 举出一些离散型随机变量的例子。

## 2. 离散型随机变量的分布列

抛掷一个骰子，设得到的点数为  $\xi$ ，则  $\xi$  可能取的值有

1, 2, 3, 4, 5, 6.

虽然在抛掷骰子之前，我们不能确定随机变量  $\xi$  会取哪一个值，但是却知道  $\xi$  取各值的概率都等于  $\frac{1}{6}$ （见下表）。

$\xi$	1	2	3	4	5	6
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

表中指出了随机变量  $\xi$  可能取的值，以及  $\xi$  取这些值的概率。此表从概率的角度指出了随机变量在随机试验中取值的分布状况，称为随机变量  $\xi$  的概率分布。

一般地，设离散型随机变量  $\xi$  可能取的值为

$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots,$

$\xi$  取每一个值  $x_i (i=1, 2, \dots)$  的概率  $P(\xi=x_i)=p_i$ , 则称表

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_i$	$\cdots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\cdots$	$p_i$	$\cdots$

为随机变量  $\xi$  的概率分布, 简称为  $\xi$  的分布列.

由概率的性质可知, 任一离散型随机变量的分布列都具有下面两个性质:

$$(1) p_i \geq 0, i=1, 2, \dots;$$

$$(2) p_1 + p_2 + \cdots = 1.$$

**例 1** 某一射手射击所得环数  $\xi$  的分布列如下:

$\xi$	4	5	6	7	8	9	10
$P$	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

求此射手“射击一次命中环数  $\geq 7$ ”的概率.

分析: “射击一次命中环数  $\geq 7$ ” 是指互斥事件 “ $\xi=7$ ” “ $\xi=8$ ” “ $\xi=9$ ” “ $\xi=10$ ” 的和, 根据互斥事件的概率加法公式, 可以求得此射手“射击一次命中环数  $\geq 7$ ”的概率.

解: 根据射手射击所得环数  $\xi$  的分布列, 有

$$P(\xi=7)=0.09,$$

$$P(\xi=8)=0.28,$$

$$P(\xi=9)=0.29,$$

$$P(\xi=10)=0.22.$$

所求的概率为

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 7) &= 0.09 + 0.28 + 0.29 + 0.22 \\ &= 0.88. \end{aligned}$$

一般地, 离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

在一次随机试验中, 某事件可能发生也可能不发生, 在  $n$  次独立重复试验中这个事件发生的次数  $\xi$  是一个随机变量. 我们知道, 如果在一次试验中某事件发生的概率是  $p$ , 那么在  $n$  次独立重复试验中这个事件恰好发生  $k$  次的概率是

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

其中  $k=0, 1, \dots, n$ ,  $q=1-p$ . 于是得到随机变量  $\xi$  的概率分布如下:

$\xi$	0	1	$\cdots$	$k$	$\cdots$	$n$
$P$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	$C_n^n p^n q^0$

由于  $C_n^k p^k q^{n-k}$  恰好是二项展开式

$$(q+p)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \cdots + C_n^k p^k q^{n-k} + \cdots + C_n^n p^n q^0$$

中的第  $k+1$  项（这里  $k$  可取  $0, 1, \dots, n$ ）中的各个值，所以，称这样的随机变量  $\xi$  服从二项分布，记作  $\xi \sim B(n, p)$ ，其中  $n, p$  为参数，并记

$$C_n^k p^k q^{n-k} = b(k; n, p).$$

例如，抛掷一个骰子，得到任一确定点数（比如 2 点）的概率是  $\frac{1}{6}$ 。重复抛掷骰子  $n$  次，得到此确定点数的次数  $\xi$  服从二项分布，

$$\xi \sim B\left(n, \frac{1}{6}\right).$$

又如，重复抛掷一枚硬币  $n$  次，得到正面向上的次数  $\xi$  服从二项分布， $\xi \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ .

二项分布是一种常见的离散型随机变量的分布。

在独立重复试验中，某事件第一次发生时所作试验的次数  $\xi$  也是一个取值为正整数的离散型随机变量。“ $\xi=k$ ” 表示在第  $k$  次独立重复试验时事件第一次发生。如果把第  $k$  次试验时事件  $A$  发生记为  $A_k$ 、事件  $A$  不发生记为  $\bar{A}_k$ ， $P(A_k)=p$ ， $P(\bar{A}_k)=q$ ，那么

$$P(\xi=k) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cdots \bar{A}_{k-1} A_k)$$

根据相互独立事件的概率乘法公式，

$$\begin{aligned} P(\xi=k) &= P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) \cdots P(\bar{A}_{k-1}) P(A_k) \\ &= q^{k-1} p. \quad (k=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

于是得到随机变量  $\xi$  的概率分布

$\xi$	1	2	3	$\cdots$	$k$	$\cdots$
$P$	$p$	$qp$	$q^2 p$	$\cdots$	$q^{k-1} p$	$\cdots$

我们称  $\xi$  服从几何分布，并记

$$g(k, p) = q^{k-1} p,$$

其中  $q=1-p$ ， $k=1, 2, 3, \dots$ 。

**例 2** 某人每次射击击中目标的概率是 0.2，射击中每次射击的结果是相互独立的，求他在 10 次射击中击中目标的次数不超过 5 次的概率（精确到 0.01）。

解：设在这 10 次射击中击中目标的次数是  $\xi$ ，则  $\xi \sim B(10, 0.2)$ .

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 5) &= P(\xi=0) + P(\xi=1) + \cdots + P(\xi=5) \\ &= C_{10}^0 \times 0.8^{10} + C_{10}^1 \times 0.2 \times 0.8^9 + \cdots + C_{10}^5 \times 0.2^5 \times 0.8^5 \\ &\approx 0.99. \end{aligned}$$

答：他在 10 次射击中击中目标的次数不超过 5 次的概率为 0.99.

**例 3** 某人每次投篮投中的概率为 0.1，各次投篮的结果互相独立。求他首次投篮投中时投篮次数的分布列，以及他在 5 次内投中的概率（精确到 0.01）。

解：设他首次投篮投中时投篮次数为  $\xi$ ，则  $\xi$  服从几何分布，其中  $p=0.1$ .  $\xi$  的分布列为

$\xi$	1	2	3	...	$k$	...
$P$	0.1	0.09	0.081	...	$0.9^{k-1} \times 0.1$	...

他在 5 次内投中的概率是

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 5) &= P(\xi=1, \text{ 或 } \xi=2, \text{ 或 } \xi=3, \text{ 或 } \xi=4, \text{ 或 } \xi=5) \\ &= P(\xi=1) + P(\xi=2) + P(\xi=3) + P(\xi=4) + P(\xi=5) \\ &= 0.1 + 0.09 + 0.081 + 0.0729 + 0.06561 \\ &\approx 0.41. \end{aligned}$$

答：他在 5 次内投中的概率为 0.41.

### 练习

1. 篮球运动员在比赛中每次罚球命中得 1 分，罚不中得 0 分。已知某运动员罚球命中的概率为 0.7，求他罚球 1 次的得分的分布列。
2. 袋中共有 50 个大小相同的球，其中记上 0 号的 5 个，记上  $n$  号的有  $n$  个 ( $n=1, 2, \dots, 9$ )。现从袋中任取一球，求所取球的号数的分布列以及取出的球的号数是偶数的概率。
3. 举出一些服从二项分布的随机变量的例子。
4. 抛掷 5 枚硬币，求出得到正面向上的次数  $\xi$  的分布列。
5. 某人在一定条件下射击击中目标的概率是 0.3，假设连续射击中各次射击相互独立，求射击中首次击中目标时射击次数  $\xi$  的分布列。

## 习题 1.1

1. 写出下列随机变量可能取的值，并说明随机变量所取的值所表示的随机试验的结果：
  - (1) 袋中有大小相同的红球 10 个，白球 5 个。从袋中每次任意取出 1 个球，直到取出的球是白球为止所需要的取球次数；
  - (2) 袋中有大小完全相同的红球 10 个，白球 5 个。从袋中每次任意取出一个球，若取出一个白球则结束，若取出一个红球则放回袋中继续从袋中任意取出一球，直到取出的球是白球为止所需要的取球次数  $\xi$ ；
  - (3) 从标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片中任取 2 张，所取卡片上的数之和。
2. 从编号为 1, 2, …, 20 的 20 个大小完全相同的球中任取一个球，求所取球的号数的分布列。
3. 某射手射击击中目标的概率为 0.9，求从开始射击到击中目标所需要的射击次数  $\xi$  的概率分布。
4. 连续抛掷两个骰子，求所得的两个骰子的点数之和的概率分布。
5. 已知随机变量  $\xi$  所有可能取的值是 1, 2, …,  $n$ ，且取这些值的概率依次是  $k, 2k, \dots, nk$ ，求常数  $k$  的值。
6. 某批数量较大的商品的次品率为 10%，从中任意地连续取出 5 件，求其中次品数  $\xi$  的分布列。
- \*7. 如果  $\xi \sim B\left(20, \frac{1}{3}\right)$ ，求使  $P(\xi=k)$  取最大值的  $k$  的值。一般地，如果  $\xi \sim B(n, p)$ ，其中  $0 < p < 1$ ，讨论当  $k$  由 0 增加到  $n$  时， $P(\xi=k)$  的变化情况。 $k$  取什么值时， $P(\xi=k)$  取最大值？
8. 某种新产品的合格率是 95%，在产品抽查时，每次抽出一个产品进行检查，那么抽出一个合格品所需抽查次数不超过 3 次的概率是多少？
9. 在独立重复试验中，每次试验中某事件发生的概率是 0.8，求第 3 次事件发生所需要的试验次数  $\xi$  的分布列。

## 1.2 离散型随机变量的期望与方差

对于离散型随机变量，确定了它的分布列，就掌握了随机变量取值的统计规律。在实际问题中，我们还常常希望通过数字来反映随机变量的某个方面的特征，最常用的有期望与方差。

### 1. 期望

某射手射击所得环数  $\xi$  的分布列如下：

$\xi$	4	5	6	7	8	9	10
$P$	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

在  $n$  次射击之前，虽然不能确定各次射击所得的环数，但可以根据已知的分布列估计  $n$  次射击的平均环数.

根据这个射手射击所得环数  $\xi$  的分布列，在  $n$  次射击中，预计有大约

$$P(\xi=4) \times n = 0.02n \quad \text{次得 4 环},$$

$$P(\xi=5) \times n = 0.04n \quad \text{次得 5 环},$$

.....

$$P(\xi=10) \times n = 0.22n \quad \text{次得 10 环}.$$

$n$  次射击的总环数约等于

$$\begin{aligned} & 4 \times 0.02 \times n + 5 \times 0.04 \times n + \cdots + 10 \times 0.22 \times n \\ & = (4 \times 0.02 + 5 \times 0.04 + \cdots + 10 \times 0.22) \times n, \end{aligned}$$

从而， $n$  次射击的平均环数约等于

$$4 \times 0.02 + 5 \times 0.04 + \cdots + 10 \times 0.22 = 8.32.$$

类似地，对任一射手，若已知其射击所得环数  $\xi$  的分布列，即已知各个  $P(\xi=i)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, 10$ )，则可预计他任意  $n$  次射击的平均环数是

$$E\xi = 0 \times P(\xi=0) + 1 \times P(\xi=1) + \cdots + 10 \times P(\xi=10).$$

我们称  $E\xi$  为此射手射击所得环数  $\xi$  的期望，它刻画了随机变量  $\xi$  所取的平均值，从一个方面反映了射手的射击水平.

一般地，若离散型随机变量  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	...
$P$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	...

则称

$$E\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n + \cdots$$

为  $\xi$  的数学期望或平均数、均值，数学期望又简称为期望. 它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

若  $\eta = a\xi + b$ ，其中  $a, b$  为常数，则  $\eta$  也是随机变量. 因为

$$P(\eta = ax_i + b) = P(\xi = x_i), i = 1, 2, 3, \dots$$

所以， $\eta$  的分布列为

$\eta$	$ax_1+b$	$ax_2+b$	...	$ax_n+b$	...
$P$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	...

于是

$$\begin{aligned}
 E\eta &= (ax_1+b)p_1 + (ax_2+b)p_2 + \cdots + (ax_n+b)p_n + \cdots \\
 &= a(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n + \cdots) \\
 &\quad + b(p_1 + p_2 + \cdots + p_n + \cdots) \\
 &= aE\xi + b,
 \end{aligned}$$

即

$$E(a\xi + b) = aE\xi + b.$$

**例 1** 篮球运动员在比赛中每次罚球命中得 1 分, 罚不中得 0 分. 已知某运动员罚球命中的概率为 0.7, 求他罚球 1 次的得分  $\xi$  的期望.

解: 因为  $P(\xi=1)=0.7$ ,  $P(\xi=0)=0.3$ , 所以

$$\begin{aligned}
 E\xi &= 1 \times P(\xi=1) + 0 \times P(\xi=0) \\
 &= 1 \times 0.7 + 0 \times 0.3 \\
 &= 0.7.
 \end{aligned}$$

**例 2** 随机抛掷一个骰子, 求所得骰子的点数  $\xi$  的期望.

解: 抛掷骰子所得点数  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	1	2	3	4	5	6
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

所以

$$\begin{aligned}
 E\xi &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\
 &= (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} \\
 &= 3.5.
 \end{aligned}$$

**例 3** 有一批数量很大的产品, 其次品率是 15%. 对这批产品进行抽查, 每次抽出 1 件, 如果抽出次品, 则抽查终止, 否则继续抽查, 直到抽出次品, 但抽查次数最多不超过 10 次. 求抽查次数  $\xi$  的期望 (结果保留三个有效数字).

解: 抽查次数  $\xi$  取 1~10 的整数, 从这批数量很大的产品中每次抽取一件检查的试验可以认为是彼此独立的, 取出次品的概率是