



近代控制理论引论

工业电气自动化教研室 夏德铃 编

19-2



哈尔滨工业大学

近代控制理论引论

工业电气自动化教研室 夏德铃 编

哈尔滨工业大学

近代控制理论引论

哈尔滨工业大学工业电气自动教研室 冯德铃编

哈尔滨工业大学教材 第三版

哈尔滨工业大学教材科发售

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

787×1092 1/16 印张 22.25 字数 502,560

1981年第一版 1981年5月第一次印刷 印量 4,1200册

校内使用 校内书号 0106 工本费 ×××

前 言

从五十年代开始发展起来的近代控制理论，目前在航天器、武器系统的控制及社会和经济问题的研究得到广泛地应用。

古典控制理论主要是从定性和定量两个方面去分析控制系统的输入和输出关系；使用的工具主要是传递函数；为改善控制系统性能所采用的手段主要是比例——积分——微分调节器；研究的对象主要是单输入单输出控制系统（简称单变量系统）。近代控制理论的特点是：不但从定性和定量两方面去分析系统的输入和输出特性，而且还着重于分析系统内部的状态；使用的工具主要是状态空间法；研究的对象既包括单输入单输出系统，同时又着重研究多输入多输出系统（简称多变量系统）；近代控制理论认为系统的输入和状态决定了系统今后的行为，通过状态反馈去控制系统的状态，将能更有效地改善控制系统的性能。

本教材的内容包括三个部分：第一、二、三章着重介绍用状态空间法分析线性系统；第四、五、六章介绍最优控制的基本理论；最后在第七、八、两章中扼要地介绍了最优估计的基本理论。诚然近代控制理论所包含的内容远不止这些，但是做为工科院校工业电气自动化专业的教材，以上三方面可以做为近代控制理论课程的基础部分。

本书可以做为工业电气自动化专业研究生的教材、也可以做为本科高年级学生选修课的教材。

考虑到自学者的需要，在内容上，力求与古典控制理论结合与对比，在叙述方法上力求深入浅出，并且在相应章节之后加有较详尽的附录，授课时可根据听课者的实际情况，不必一一讲授，有些内容则可以自学。

在编写本教材过程中，得到了本教研室的支持和帮助，在此谨致谢意。

编 者

1981.

目 录

第一章 线性动力学系统的数学描述

§ 1—1 连续时间系统的微分方程	1
§ 1—2 状态变量描述	4
§ 1—3 输入输出描述	8
§ 1—4 由系统传递函数求状态变量描述 (实现问题)	13
§ 1—5 由系统状态变量描述求传递函数矩阵	22
§ 1—6 连续时间系统状态方程求解	27
§ 1—7 离散时间系统的数字描述	45
§ 1—8 离散时间系统状态方程求解	56
§ 1—9 连续时间系统状态方程离散化	59
附 录	71

第二章 线性系统的能控性、能观性及稳定性

§ 2—1 能控性和能观性的概念	84
§ 2—2 能控性及其判别准则	86
§ 2—3 能观性及其判别准则	104
§ 2—4 能控性和能观性判别准则的另一种形式	114
§ 2—5 对偶性	118
§ 2—6 动力学系统的稳定性	120
§ 2—7 判别定常系统稳定性的李亚普诺夫方法	124
§ 2—8 线性定常系统的李亚普诺夫稳定性分析	132
附 录	137

第三章 标准型及状态反馈、状态估计

§ 3—1 状态变量的线性变换	146
§ 3—2 线性系统动力学方程的约旦标准型	149
§ 3—3 线性系统动力学方程的能控标准型	157
§ 3—4 线性系统动力学方程的能观标准型	161
§ 3—5 线性系统动力学方程的分解	165
§ 3—6 状态反馈和特征值的配置	177
§ 3—7 状态估计	183

第四章 变分法及无约束的最优控制

§ 4—1 最优控制的概念	195
§ 4—2 多元函数的极值	199
§ 4—3 求泛函极值和条件极值的变分法	200
§ 4—4 无约束最优控制的变分方法	207

§ 4—5	二次型性能指标的最优控制问题	218
§ 4—6	线性调节器	219
§ 4—7	线性伺服机构	229
§ 4—8	二次型性能指标最优控制系统的频域特征	233
第五章 极小值原理及受约束的最优控制		
§ 5—1	极小值原理	236
§ 5—2	快速控制系统 (最短时间控制系统)	245
§ 5—3	燃料最省控制系统	256
§ 5—4	极小值原理在离散最优控制系统中的应用	261
附 录		266
第六章 动态规划		
§ 6—1	多级决策过程	268
§ 6—2	最优性原理	270
§ 6—3	离散系统的线性调节器问题	276
§ 6—4	动态规划的连续形式	279
§ 6—5	用动态规划求解线性调节器问题	287
第七章 参量的基本估计方法		
§ 7—1	估计和最优估计	290
§ 7—2	最小二乘估计	291
§ 7—3	加权最小二乘估计	295
§ 7—4	加权最小二乘估计的递推计算	299
§ 7—5	线性最小方差估计	302
§ 7—6	线性最小方差估计的递推计算	305
§ 7—7	最小方差估计	308
第八章 线性最优滤波与随机最优控制		
§ 8—1	随机线性系统的数学描述	311
§ 8—2	由离散系统的极限情况求连续系统的数学描述	315
§ 8—3	离散时间系统的卡尔曼滤波	318
§ 8—4	连续时间系统的卡尔曼滤波	329
§ 8—5	白噪声情形下一般线性离散系统的滤波	335
§ 8—6	白噪声情形下一般线性连续系统的滤波	337
§ 8—7	有色噪声情形下线性系统的滤波	340
§ 8—8	递推滤波的渐近性质	344
§ 8—9	随机线性系统的最优控制	345

第一章 线性动力学系统的数字描述

欲分析和研究系统，首先须建立数学方程，用以描述系统中各种物理量之间的关系，即通常所说的系统数字描述。

根据须解决的问题不同，数学描述总是按照某种原则或方法，从系统的共性方面去建立的。因此，一个系统可以有多种数学描述，反之，不同的系统，例如电的系统和机械系统，其数学描述也可以是相似的。

本章将介绍线性动力学系统的几种典型数学描述以及它们之间的关系。

§ 1—1 连续时间系统的微分方程

在经典控制理论中，总是用一个高阶微分方程式或者传递函数去描述控制系统输入与输出的关系，这个描述系统输入和输出关系的高阶微分方程式基本上是按照以下步骤去建立的：

(1) 列出原始方程式

根据构成系统所使用的元件，找出联系这些元件的输入和输出的物理规律，表达这些元件的物理规律的数学描述式，就是原始方程。

对于非线性不严重的元件，可以直接写出线性方程。而对于非线性比较严重的元件，原始方程将是非线性方程。如欲使用线性理论去分析研究系统，就必须利用泰勒展开式，将此非线性方程在平衡点附近取一次线性近似方程。

(2) 消去中间变量

合并各元件的输入——输出方程式，就能消去中间变量，最后得到只包含系统的输入和输出的方程，它往往是一个高阶微分方程式。

现以下例说明

【例1—1】列出图 1—1 所示他激直流电动机速度控制系统的微分方程式。

首先列写原始方程

(1) 以电动机的角速度 ω (rad/sec)为输出，以电枢电流 I (A)，为输入，则根据经典力学知：在电动机磁场为恒定的情况下，有

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_M I - M_l$$

式中 J ——转动惯量 ($\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$)

C_M ——电动机的转矩常数 ($\text{kg} \cdot \text{m}/\text{A}$)

M_l ——负载转矩 ($\text{kg} \cdot \text{m}$)

如果负载转矩 M_l 很小，可以忽略不计，则上式可以写做

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{C_M}{J} I \quad (1-1)$$

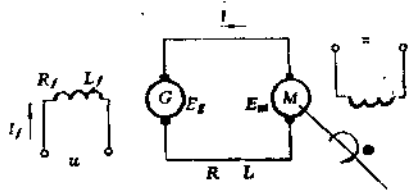


图 1—1

(2) 以电动机电枢电流 I 为输出, 发电机的感应电势 $E_e(V)$ 为输入, 则根据电路理论有

$$E_g = L \frac{dI}{dt} + IR + E_m$$

(3) 如果认为发电机的激磁曲线近似为线性的, 而电动机的反电势 E_m 又与其角速度成正比, 即有

$$E_g = K_g I_f$$

$$E_m = C_e \omega$$

式中 I_f —— 发电机的激磁电流 (A)

K_g —— 比例系数 (V/A)

C_e —— 电动机的电势常数 (V·sec)

则前式又可以写成以发电机激磁电流 I_f 为输入, 电动机电枢电流 I 为输出的方程式, 即

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{C_e}{L} \omega - \frac{R}{L} I + \frac{K_g}{L} I_f \quad (1-2)$$

(4) 以发电机磁场电压 $u(v)$ 为输入, 以激磁电流 I_f 为输出的电路方程为

$$u = L_f \frac{dI_f}{dt} + R_f I_f$$

或

$$\frac{dI_f}{dt} = -\frac{R_f}{L_f} I_f + \frac{1}{L_f} u \quad (1-3)$$

(5) 将 (1-1) 式代入 (1-2) 式消去 I , 然后再代入 (1-3) 式, 消去 I_f , 消去这些中间变量后, 就得到以发电机的激磁电压 u 为输入, 电动机的角速度 ω 为输出的一个三阶微分方程式:

$$\begin{aligned} T_m T T_f \frac{d^3}{dt^3} \omega + T_m (T + T_f) \frac{d^2}{dt^2} \omega + (T_m + T_f) \frac{d}{dt} \omega + \omega \\ = \frac{K_g}{C_e R_f} u \end{aligned} \quad (1-4)$$

式中 $T_m = \frac{JR}{C_e C_m}$

$$T = \frac{L}{R}$$

$$T_f = \frac{L_f}{R_f}$$

给定了输入 u 之后, 式 (1-4) 的解 (即系统的响应) 由两部分之和组成, 即其解为

$$\omega(t) = \omega_1(t) + \omega_2(t) \quad (1-5)$$

其中 $\omega_1(t)$ 是 $\omega(t)$ 中的自由分量, 或者称为零输入响应, 它是当输入 $u=0$ 时式 (1-4) 的齐次方程

$$T_m T T_f \frac{d^3}{dt^3} \omega + T_m (T + T_f) \frac{d^2}{dt^2} \omega + (T_m + T_f) \frac{d}{dt} \omega + \omega = 0 \quad (1-6)$$

的解，故在数学上又称为齐次解或补解。 $\omega_1(t)$ 的形式可写成

$$\omega_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} \quad (1-7)$$

式中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是特征方程

$$T_m T T_f \lambda^3 + T_m (T + T_f) \lambda^2 + (T_m + T_f) \lambda + 1 = 0 \quad (1-8)$$

的三个根。

式(1-7)中的 C_1, C_2 及 C_3 则是须根据一组初始条件才能确定的常数。例如我们所要研究的电动机的角速度 $\omega(t)$ 是从某一初始时刻 t_0 开始在 $t > t_0$ 时的行为，当 $t = t_0$ 时，电动机的角速度 $\omega(t_0)$ 、角速度的一阶和二阶导数 $\dot{\omega}(t_0)$ 、 $\ddot{\omega}(t_0)$ 均应是已知的。也就是说，给定一组初始条件： $\omega(t_0)$ 、 $\dot{\omega}(t_0)$ 及 $\ddot{\omega}(t_0)$ 后，就可以确定常数 C_1, C_2 及 C_3 ，则系统输出的自由分量 $\omega_1(t)$ 就能从式(1-7)求得。

式(1-5)中的 $\omega_2(t)$ 是微分方程的解 $\omega(t)$ 中的强迫分量，或者称为零状态响应，它是在式(1-4)的系统微分方程中，令初始时刻 t_0 的输出 $\omega(t_0)$ 及各阶导数都等于零，即令

$$\frac{d^2}{dt^2} \omega(t_0) = \frac{d}{dt} \omega(t_0) = \omega(t_0) = 0 \quad (1-9)$$

而求得的解，它是系统参量，输入 u 及时间 t 的函数。数字上也称 $\omega_2(t)$ 为特解。

这样我们就得出了式(1-4)所示的系统微分方程的解为

$$\omega(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + \omega_2(t) \quad (1-10)$$

由以上例子可见

(1) 当组成控制系统的各元件(或环节)的输入输出物理规律已知的情况下，可以从列写原始方程入手，经过消去中间变量，最后得到一个描述系统输入输出关系的高阶微分方程，它的普速式可以写成

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} y(t) + a_n y(t) \\ = b_0 \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_m u(t) \end{aligned} \quad (1-11)$$

式中 $y(t)$ —— 输出，

$u(t)$ —— 输入，

并且 $m < n$ 。

(2) 如果初始时刻是 t_0 ，当 $t \geq t_0$ 时仅给定了输入 $u(t)$ 并不能唯一地确定输出 $y(t)$ ，只有一组初始条件及输入都给定了才能唯一地确定 $y(t)$ 。

(3) 所谓给定一组初始条件，就是给定了 t_0 时刻的输出及其各阶导数，即给定了 $y(t_0)$ 、 $\dot{y}(t_0)$ 、 $\ddot{y}(t_0)$ 、 $\dots$ 、 $y^{(n-1)}(t_0)$ 。

(4) 高阶微分方程只描述了系统的输出与输入之间的关系，系统的各个中间变量都消去了，因此，它属于系统输入输出时域描述。

§ 1-2 状态变量描述

即使是输入输出描述,但是输出并不能仅由输入唯一地确定,只有当输入及一组初始条件都给定后,输出才能被唯一地确定了,这组初始条件就称为“状态”。在 t_0 时的一组状态可做为一种信息,它与输入一起,唯一地确定了输出。

状态变量的定义 动态系统的状态变量是表示系统的最小的一组变量,只要知道了在 $t = t_0$ 时刻的这组变量和 $t \geq t_0$ 的输入,就能完全确定系统在 $t \geq t_0$ 任何时间的行为。

从〔例1-1〕来看,系统的微分方程式 (1-4) 的一组初始条件是 $\omega(t_0)$, $\dot{\omega}(t_0)$ 及 $\ddot{\omega}(t)$, 因此在 $t = t_0$ 时刻,电动机的角速度 $\omega(t_0)$, 角加速度 $\dot{\omega}(t_0)$ 及角速度的二阶导数 $\ddot{\omega}(t_0)$ 就被称为系统的状态,也就是初始状态。而 $\omega(t)$, $\dot{\omega}(t)$, $\ddot{\omega}(t)$ 则被称为系统的状态变量。

所谓最小一组变量的含意是指个数最少的一组变量。以〔例1-1〕情况看,只需知道 $\omega(t_0)$, $\dot{\omega}(t_0)$ 及 $\ddot{\omega}(t_0)$ 和 $t \geq t_0$ 时的 $u(t)$ 就能唯一地确定 $t \geq t_0$ 时的输出 $\omega(t)$, 并不需要更多的条件了。

从式 (1-1) 看, $\dot{\omega}(t) \equiv I$, 再从式 (1-2) 看, $\omega(t)$ 和 $\dot{\omega}(t)$ (即 I) 确定后, $\ddot{\omega}(t)$ 就完全由 $I_f(t)$ 确定,或者说 $\ddot{\omega}(t)$ 就完全由 $I_f(t)$ 确定。据此可知, $\omega(t)$, $\dot{\omega}(t)$, 及 $\ddot{\omega}(t)$ 是一组状态变量,相应地, $\omega(t)$, $I(t)$ 及 $I_f(t)$ 也是一组状态变量。当 $t = t_0$ 时, $\omega(t_0)$, $I(t_0)$ 及 $I_f(t_0)$ 及 $t \geq t_0$ 时的输入 $u(t)$ 给定后,同样可使 $t \geq t_0$ 任何时间的输出 $\omega(t)$ 被唯一地确定。

但是 $I(t)$ 和 $I_f(t)$ 都是系统内部的中间变量,它在描述系统输入输出关系的微分方程式 (1-4) 中没有表现出来,而在原始方程式 (1-1) ~ (1-3) 中都是存在的,只是为了求得输入输出描述式 (1-4) 而有意地将它们消去了。

于是,我们可以这样推论,用式 (1-1) ~ (1-3)

即

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{C_M}{J} I \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{C_g}{L} \omega - \frac{R}{L} I + \frac{K_g}{L} I_f \\ \frac{dI_f}{dt} &= -\frac{R_f}{L_f} I_f + \frac{1}{L_f} u \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

再加上一个方程

$$y = \omega \quad (1-13)$$

在给定了初始条件 $\omega(t_0)$, $I(t_0)$ 及 $I_f(t_0)$ 及 $t \geq t_0$ 时的输入 $u(t)$ 后,就能唯一地确定了输出 $y(t)$ 。

将式 (1-12) 称为系统的“状态方程”,式 (1-13) 称为系统的“输出方程”,这样的描述称为系统的“状态变量描述”

通常用 x 表示状态变量, 以〔例1—1〕而言, 可令:

$$x_1 = \omega$$

$$x_2 = I$$

$$x_3 = I_f$$

则式 (1—12) 及 (1—13) 又可写成

$$\dot{x}_1 = \frac{C_m}{J} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{C_e}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{k_g}{L} x_3 \quad (1-14)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\frac{R_f}{L_f} x_3 + \frac{1}{L_f} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1-15)$$

状态方程式 (1—14) 实际就是一阶线性微分方程组, 方程组用矩阵的形式表示是很方便的, 所以式 (1—14) 及 (1—15) 又可写成矩阵方程的形式, 即:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$$

式中:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = y, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_m}{J} & 0 \\ -\frac{C_e}{L} & -\frac{R}{L} & \frac{K_g}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

以上是用〔例1—1〕的单输入单输出的系统作为例子来说明系统的状态变量描述。单输入单输出系统通常称为“单变量系统”。对于“多变量系统” (即多输入多输出系统), 用状态变量描述并不增加方程的复杂程度。线性系统状态变量描述可以写成更普遍的形式:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) \quad (1-16)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t) \quad (1-17)$$

式中 $\mathbf{X}(t)$ —— n 维列向量 (状态向量);

$$\mathbf{X}(t) \triangleq [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$$

$\mathbf{U}(t)$ —— r 维列向量 (控制向量, 也称输入向量);

$$\mathbf{U}(t) \triangleq [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t) \ \dots \ u_r(t)]^T$$

$\mathbf{Y}(t)$ —— m 维列向量 (输出向量);

$$\mathbf{Y}(t) \triangleq [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t) \ \dots \ y_m(t)]^T$$

$\mathbf{A}(t)$ —— $n \times n$ 维系数矩阵 (时变或定常矩阵);

$B(t)$ —— $n \times r$ 维控制矩阵 (时变或定常矩阵);
 $C(t)$ —— $m \times n$ 维输出矩阵 (时变或定常矩阵);
 $D(t)$ —— $m \times r$ 维直接传递矩阵 (时变或定常矩阵)。

在本书中, 所有向量都定义成列向量。

图 1—2 表示了式 (1—16) 及 (1—17) 所确定的系统的方框图, 图中采用双线表示向量。

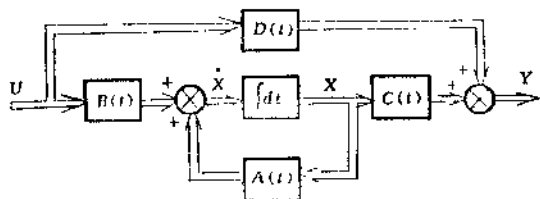


图 1—2

状态变量的非唯一性: 一个系统的状态变量选定可以有很多组, 不是只有唯一的一组。仍以 [例 1—1] 的情况而言, 选定 $\omega(t)$, $I(t)$ 及 $I_f(t)$ 做为一组状态变量, 则得到形如式 (1—14), (1—15) 的状态变量描述。

述。假如我们按照最初对式 (1—14) 的微分方程去求解所需之一组初始条件 $\omega(t)$, $\dot{\omega}(t)$ 及 $\ddot{\omega}(t)$ 去确定状态变量, 则同一系统可以得出另外一种状态变量描述。的确, 从式 (1—14) 出发, 如选状态变量为:

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega(t) \\ x_2 &= \dot{\omega}(t) \\ x_3 &= \ddot{\omega}(t) \end{aligned}$$

则得到状态方程和输出方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{T_m T T_f} x_1 - \frac{T_m + T_f}{T_m T T_f} x_2 - \frac{T_m (T + T_f)}{T_m T T_f} x_3 + \frac{K_g}{C_e R_f T_m T T_f} u \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

$$y(t) = x_1 \quad (1-19)$$

式 (1—18), (1—19) 与式 (1—14), (1—15) 是完全等价的, 它们描述的都是一个系统。如果我们在另选一组变量, 将会再有另一种形式的状态变量描述。选择不同的状态变量, 就得到不同的状态变量描述。

一系统的状态变量的选定, 并不要求是在实际系统中都能很方便地直接地量测到的物理量, 上述之 [例 1—1] 所选的两组状态变量, 第一组 $\omega(t)$, $I(t)$ 及 $I_f(t)$ 是能够从图 1—1 中直观地看出是哪部分电路中的物理量, 也是很容易地用电流及速度检测元件量测到的。但是第二组状态变量 $\omega(t)$, $\dot{\omega}(t)$, $\ddot{\omega}(t)$ 就不是这样了, 角速度的二阶导数 $\ddot{\omega}(t)$ 就不是那么容易直接量测到的物理量。

虽然系统的状态变量不是唯一的, 但是选定一组状态变量也是有条件的。所选的一组状态变量必须具有下述性质:

(1) 在时刻 t 的状态变量值 $X(t)$ (注意, 这是指在时刻 t 的 X 之值, 并非指以 t 为自变量的函数), 由 $t = t_0$ 时的初始状态变量值 $X(t_0)$ 及 $t \geq t_0$ 的输入唯一地确定。

(2) 在时刻 t 的输出 $Y(t)$, 由该时刻的状态变量值 $X(t)$ 和输入唯一地确定。

通常连续系统的状态方程可以写成

$$\dot{X}(t) = f[t, X(t), U(t)] \quad (1-20)$$

的形式, 此处 $\dot{X}(t)$ 是 t 、 $X(t)$ 及 $U(t)$ 的显函数, 当然也常有不显含时间变量 t 的, 凡是能写成这种形式的, 都称为正规形微分方程 (normal form differential equation) 一般说到状态方程都是指的这种正规形。上述性质(1)的含意就是: 当给定初始时间 t_0 下的状态 $X(t_0)$, 并且给出了 t_0 以后的输入 $U(t)$ ($t \geq t_0$) 时, 满足 $X(t_0) = X_0$ 的方程 (1-20) 的解 $X(t)$ 在 $t \geq t_0$ 时存在, 而且只有一个。

用正规微分方程 (1-20) 表示的状态变量 $x(t)$, 并不能保证它的解的存在性和唯一性。例如标量微分方程 $\dot{x} = \sqrt{x}$, 当初始条件为 $x(0) = 0$ 时, 其解为 $x(t) = 0$ 和 $x(t) = \frac{1}{4}t^2$, 就不是唯一的。又例如 $\dot{x} = x^2$, 给定初始条件 $x(0) = 1$ 时, 其解为, $x(t) = \frac{1}{1-t}$, 但是该解在 $t=1$ 时, 使 $x(t) = \infty$, 这说明 $x(t)$ 不是在所有 $t \geq 0$ 时都存在。关于保证微分方程的解存在并且唯一的充分条件有李普希茨条件 (Lipschitz condition), 可参阅本章的附录 (三)

。以上所论是普遍的情况, 包括线性和非线性, 如果是线性系统, 则式 (1-20) 的右边将是状态变量及输入的线性函数, 那就可以写成式 (1-16) 的形式, 即

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (1-16)$$

式 (1-16) 的解存在并且唯一的充分条件就是 $A(t)$ 、 $B(t)$ 矩阵中的各元应是时间变量的分段连续函数。可以这样不很严格地说, 物理上能实现的线性系统, 能够写出形如式 (1-16) 这样的状态方程, 通常都可以满足解的存在并且是唯一的充分条件。所以式 (1-16) 又称为标准型状态方程。如果 $A(t)$ 、 $B(t)$ 都是定常阵, 当然式 (1-16) 解的存在并且唯一是更无问题了。

在结束本节之前, 我们再概括地说明以下几个问题:

(1) 系统的状态变量描述是系统内部状态的时域描述, 故又称为内部描述, 它所描述的是系统全部的信息 (包括输入和输出)。与此对应的是输入输出描述又可称为外部描述。

(2) 一个系统的状态变量选择不是唯一的, 选择不同的状态变量, 得到不同的状态变量描述。但是不论选择那一组状态变量, n 阶系统的状态变量只能有 n 个, 不多也不少。

(3) 用矩阵方程表示状态方程和输出方程, 使状态变量描述特别适用于多变量系统。

(4) 状态方程是时域一阶微分方程组, 非常适宜用计算机求数值解, 或者用计算机去分析研究系统。

(5) 现代控制理论指出, 采用状态变量反馈去改善系统的控制性能, 将比经典理论中常用的 PID 调节器要优越得多。这也是现代控制理论与经典控制理论的主要区别之一。如果不用状态变量去描述系统, 当然也就很难去分析和综合现代控制系统。

§ 1—3. 输入输出描述

前面曾介绍了从构成系统的元件或电路的输入输出的物理规律着手建立微分方程式, 或者建立状态方程及输出方程, 这种方法对于简单的控制系统, 以致系统中各个环节的输入和输出间的物理规律都十分清楚的情况下, 这样做是可行的。但是也要看到现代控制系统结构可能比较复杂, 或者在系统中某些环节的物理规律我们还不十分清楚的时候, 通过前述方法建立微分方程或者状态方程不是不可能就是不够准确。如果所建立的数学方程不能准确地描述系统, 欲进一步分析或设计系统都是没有基础的。因此, 须要建立一种通过试验去识别系统的手段。

前已述及, 对于结构及参量已经确定的线性系统, 于 $t = t_0$ 开始施加输入 $u(t)$ ($t \geq t_0$) 于系统, 则输出 $y(t)$ ($t > t_0$) 将由一组初始条件及输入 $u(t)$ 唯一地确定。假定初始条件为零, 即在 $t = t_0$ 时, 系统的状态都为零, 当施加输入 $u(t)$ ($t \geq t_0$) 于线性系统时, 则与之相应的输出 $y(t)$ 应该仅由输入所引起而且唯一地仅由 $u(t)$ 所确定。因此, 可以设想, 在零初始条件的假设下, 线性系统的输出与输入之间应有下式关系:

$$y(t) = H(t)u(t) \quad (1-21)$$

式中 $H(t)$ 是某一算子或函数。

不难理解, $H(t)$ 必定是由线性系统的结构和参量, 或者说是由线性系统的特性决定的, 一旦系统特性确定了, 则 $H(t)$ 就被确定了, 反之, 当 $H(t)$ 确定了, 则线性系统的特性也就被确定了。

所以对初始条件为零的系统施加输入, 通过量测输入和输出, 然后经过分析, 确定系统的特性, 也就成为识别系统的一种方法。我们在此不准备介绍识别系统的具体方法, 而是推导出初始条件为零的线性系统的输入输出描述, 为系统的识别提供原理上的依据。

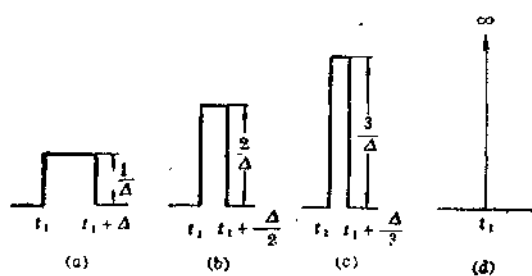


图 1—3

为了推导线性系统的输入输出描述, 首先要说明脉冲函数 (或称 Dirac δ 函数, 简称 δ 函数) 的概念。

设 $\delta_{\Delta}(t - t_1)$ 是图 1—3 a 所表示的脉动函数 (pulse function), 即

$$\delta_{\Delta}(t - t_1) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t < t_1 \\ \frac{1}{\Delta} & \text{当 } t_1 \leq t < t_1 + \Delta \\ 0 & \text{当 } t > t_1 + \Delta \end{cases}$$

脉动函数 $\delta_{\Delta}(t - t_1)$ 的特点是它在宽度 Δ 内所包含的面积为 1。随着宽度减小, 高度则按比例增加, 始终保持脉动函数与时间轴所包含的面积为 1 (如图 1—3 中的 (b)、(c) 所示)。当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 求得极限为:

$$\delta(t - t_1) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t - t_1)$$

将 $\delta(t-t_1)$ 称为脉冲函数 (Impulse function), 简称为 δ 函数, 它的特点是

$$\delta(t-t_1) = \begin{cases} \infty & \text{当 } t = t_1 \\ 0 & \text{当 } t \neq t_1 \end{cases} \quad (1-21)$$

δ 函数有两个基本性质

性质 (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1) dt = \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \delta(t-t_1) dt = 1 \quad (1-22)$$

性质 (2):

对任何连续函数 $f(t)$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_1) dt = f(t_1) \quad (1-23)$$

对于性质 (1), 我们可以从直观上看出来。对于性质 (2), 我们可以给出一个不够严格的证明。利用积分中值定理可知:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_{\Delta}(t-t_1) dt &= \int_{t_1}^{t_1+\Delta} \frac{1}{\Delta} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{t_1}^{t_1+\Delta} f(t) dt = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta \cdot f(t_1 + \varepsilon) \\ &= f(t_1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

式中 $0 < \varepsilon < \Delta$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_1) dt &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_{\Delta}(t-t_1) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t_1 + \varepsilon) = f(t_1) \end{aligned}$$

根据性质 (2) 的同样道理可以推出

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t) \quad (1-23a)$$

利用脉冲函数的概念, 就能很方便地推导出初始条件为零的线性系统的输入输出描述。

我们首先分析单变量线性系统, 当初始条件为零时, 根据式 (1-21) 则有输入输出之间的关系为:

$$y(t) = H(t) u(t)$$

设输入 $u(t)$ 是如图 1-4 所表示的分段连续函数, 它可以用一系列的脉动函数 (分段常值信号) 来近似, 而每一个脉动函数可以表示为 $u(t_i) \delta_{\Delta}(t-t_i) \Delta$, 也就是用宽度都

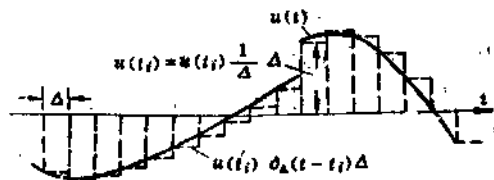


图 1-4

是 Δ ，振幅却是 $u(t_i)$ 的脉动系列来近似表示，这样， $u(t)$ 就可以用下列求和式近似表示：

$$u(t) \approx \sum_{t_i=-\infty}^{\infty} u(t_i) \delta_{\Delta}(t-t_i) \Delta$$

若在初始时刻 $t=t_0$ 时，才向系统施加输入，则上式又可求和的下限 $t_i=-\infty$ 改为 $t_i=t_0$ ，即

$$u(t) \approx \sum_{t_i=t_0}^{\infty} u(t_i) \delta_{\Delta}(t-t_i) \Delta$$

根据前述，若在 $t=t_0$ 时，系统的初始条件为零，则系统的输入输出满足线性特性，

$$y(t) = H(t)u(t) \approx \sum_{t_0}^{\infty} [H(t) \delta_{\Delta}(t-t_i)] u(t_i) \Delta \quad (1-25)$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时，则近似式成为等式，并且和式就变成积分式了，其中的脉动函数 $\delta_{\Delta}(t-t_i)$ 也就成为脉冲函数 $\delta(t-t_i)$ 了。以 $t_i=\tau$ ， $\Delta=d\tau$ 代入即有

$$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} [H(t) \delta(t-\tau)] u(\tau) d\tau \quad (1-26)$$

若对于所有的 τ ， $H(t)\delta(t-\tau)$ 已知，则与任何输入 $u(\tau)$ 相应的输出可以从式(1-26)求得，将 $H(t)\delta(t-\tau)$ 记作

$$H(t)\delta(t-\tau) = W(t, \tau) \quad (1-27)$$

并且称 $W(t, \tau)$ 为脉冲响应函数（或称权函数），它的物理意义是：在时刻 τ 对初始条件为零的线性系统施加一脉冲函数形式的输入，则与之相应的输出，即为 $W(t, \tau)$ ，脉冲响应函数也由此得名。 $W(t, \tau)$ 是一个双变量函数，其中 τ 表示 δ 函数施加于系统的时刻，而 t 则表示观测输出的时刻。

对于一个物理可实现的系统，在时刻 t 的输出 $y(t)$ 并不取决于在 t 之后的输入，而只取决于时刻 t 之前的输入，过去可以影响将来，而将来的输入并不能影响过去和现在。这种性质称为因果性（Causality）。按照定义， $W(t, \tau)$ 是在 τ 时刻加于系统的 δ 函数输入所引起的输出。若系统具有因果性，则有

$$W(t, \tau) = 0 \quad \text{对于所有的 } t < \tau$$

所以对于初始条件为零，具有因果性的时变或定常的单变量线性系统的输入输出描述将是

$$y(t) = \int_{t_0}^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1-28)$$

与式(1-26)相比较，将积分的上限由 ∞ 改为 t ，这就是考虑了实际物理系统具有因果性的结果。

从单变量系统的结论推广到多变量系统是不困难的。若一个系统有 r 个输入和 m 个输出，则其输入输出描述可由下式表示：

$$Y(t) = \int_{t_0}^t w(t, \tau) U(\tau) d\tau \quad (1-29)$$

式中

$$U(\tau) = [u_1(\tau) \ u_2(\tau) \ \dots \ u_r(\tau)]^T \text{——} r \text{ 维控制向量,}$$

$Y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_m(t)]^T$ —— m 维输出向量

$$W(t, \tau) = \begin{pmatrix} w_{11}(t, \tau) & w_{12}(t, \tau) & \dots & w_{1r}(t, \tau) \\ w_{21}(t, \tau) & w_{22}(t, \tau) & \dots & w_{2r}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{m1}(t, \tau) & w_{m2}(t, \tau) & \dots & w_{mr}(t, \tau) \end{pmatrix}$$

$w_{ij}(t, \tau)$ 是时刻 t 在第 i 个输出端上的响应, 它是由在时刻 τ 时加于第 j 个输入端上的脉冲函数所起的, 那时其它输入端的输入均认为是零。简言之, $w_{ij}(t, \tau)$ 是第 i 个输出端对第 j 个输入端的脉冲响应。所以可将 $W(t, \tau)$ 称为“脉冲响应矩阵”。

下面我们着重研究定常系统的输入输出描述。当系统特性不随时间而变, 则称时不变或定常系统。定常线性系统的一个性质是:

其脉冲响应函数仅取决于 $t - \tau$ 之差。例如单变量定常系统之脉冲响应函数如图 1—5 所示, 在 $\tau = 0$ 时加于系统之 δ 函数得到的响应为 $w(t)$, 于 $\tau \neq 0$ 时对系统施加 δ 函数输入则得到响应为 $w(t - \tau)$, 它们的形状完全一样, 只是在时间轴上平移 $-\tau$ 。当 $t = t_1$ 时, 于 $w(t)$ 函数图形上得到 $w(t_1)$; 同样的在 $t - \tau = t_1$, 或 $t = t_1 + \tau$ 时, 于 $w(t - \tau)$ 曲线上得到的函数值也是 $w(t_1)$ 。

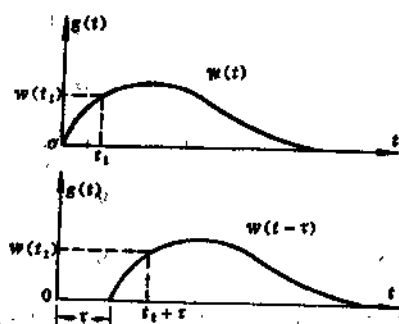


图 1—5

因此, 对于初始条件为零, 且具有因果性的线性定常系统, 其输入输出描述则为

$$Y(t) = \int_{t_0}^t W(t - \tau) U(\tau) d\tau \quad (1-30)$$

又因为定常系统的特性与时间无关, 可选定初始时刻 $t_0 = 0$ 。于是对于线性定常系统, 式 (1—30) 常表示成

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t W(t - \tau) U(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t W(\tau) U(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1-31)$$

上式中的第二个等号后的表达式是用变量代换后得到的, 例如以 $t - \tau = \alpha$, $d\tau = -d\alpha$, 代入式 (1—31) 的第一个等号后面的式子中, 并取积分的上下限, 当 $\tau = 0$ 时 $\alpha = t$; 当 $\tau = t$ 时 $\alpha = 0$, 然后再将 α 仍用 τ 代换回来, 就得到后一等号右侧的表达式了。

式 (1—31) 即是卷积公式, 式中 $Y(t)$ 是系统的 m 维输出向量, $U(t)$ 是系统 r 维输入向量, $W(t - \tau)$ 则是系统的脉冲响应矩阵 ($m \times r$ 维)。用卷积公式去描述线性定常系统是属于输入输出时域描述。它只适用于描述初始条件为零, 具有因果性 (在 $\tau \geq 0$ 时, 才对系统施加 δ 函数输入, 因果性表现在 $t < 0$ 时, $W(t) = 0$) 的线性定常系统。

将拉普拉斯变换应用于式 (1—31), 就可将时域中的卷积公式换为频域中的代数