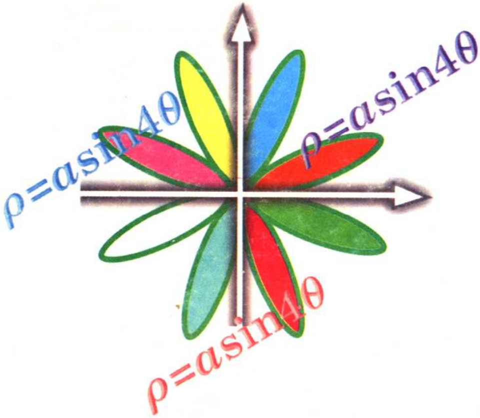
名师解惑丛书



参数方程 极坐标

索云旺 编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

参数方程　极坐标

索云旺　编著

山东教育出版社

1999年·济南

名师解惑丛书

参数方程　极坐标

索云旺　编著

出版发行：山东教育出版社
地　　址：济南市纬一路 321 号

出版日期：1998 年 9 月第 1 版
　　　　　1999 年 5 月第 2 次印刷
印　　数：5001—7000
用纸规格：787 毫米×1092 毫米 32 开
　　　　　4 印张　　　　　83 千字

制版印刷：山东新华印刷厂临沂厂

书　　号：ISBN 7—5328—2709—7/G・2487
定　　价：3.00 元

出版说明

古之学者必有师．师者，所以传道受业解惑也．有感于此，组织部分长年在一线执教、经验丰富的著名教师，以专题讲座形式编辑出版一套限于中学理科知识框架内，源于教材但有些内容又略高于教材的，高级中学数学、物理学、化学“名师解惑丛书”是我们多年的想法和愿望．

两年多来，山东教育出版社理科编辑室经过广泛的调研，以及与部分学生和老师们的座谈，我们的初衷不断得到升华，并与作者就丛书的特色取得如下共识：

每册书即为一个专题讲座，其内容由若干教学过程中反映出的疑难知识点组成，通过对典型例题的分析，剖析疑难知识点，帮助学生理清思路，进而达到融会贯通的目的．

每册书通过对知识的综合，帮助学生将过去所学的知识按专题进行系统的归纳和总结；通过适当介绍一些学科知识自身发展的逻辑规律，给学生有关学科思想方法方面的启迪．

总之，这套丛书企盼达到启迪思维、拓宽知识、培养兴趣的目的，以提高学生分析问题和解决问题的能力．

前　　言

参数方程及极坐标是平面解析几何的主要内容之一，生产实践中的很多问题都可借助参数方程和极坐标获得解决．学好参数方程和极坐标，可以帮助我们更深刻地认识和更全面地了解解析几何的思想和方法，并为今后的数学学习奠定良好的基础．

本书覆盖面广、取材丰富新颖、论证逻辑性强，许多解题方法引人入胜，使人耳目一新；注重解题思路的分析指导、解题后的反思，解题规律的概括总结；注重数学思维的培养和数学解题能力的提高，十分适合高中数学教学的实际，可与教材配合使用，是一本实用的教学参考书．

编者

目　　录

一　曲线的参数方程

曲线的参数方程$\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t)\end{cases}$($t$ 是参数)是曲线方程的一种形式——曲线上动点坐标的函数表达式．参数方程概念，将我们所学的有关函数的知识引入解析几何，丰富了解析几何的内容和研究方法．特别是参数方程中体现的数学思想，常常渗透到高考综合题的解答过程中．另外，从曲线是动点运动的轨迹的角度看，曲线的普通方程 $F(x,y)=0$ 从整体上表现了动点运动的规律；而它的参数方程则深入运动的内部，从构成曲线的点的角度，沿坐标方向，分别讨论运动的规律，然后再综合起来，表现运动的全貌．所以，参数和参数方程概念是分析思维和分析方法的产物，在学习这部分知识的过程中，我们的分析能力、综合能力必能得到提高．

通过本节的学习，不仅要理解参数方程的概念，能识别参数方程给出的曲线或曲线上点的坐标，了解参数方程中参数的意义，而且要学会利用参数建立点的轨迹方程．因此本节的重点是利用参数求点的轨迹方程，以及掌握参数方程与普通方程的互化方法．

(一)参数概念

从广义上讲，凡是影响研究对象运动、变化的变量，都是研究对象运动状态的参数．在平面坐标系(直角坐标系或极

坐标系)中,讨论动点的轨迹——曲线时,影响动点坐标变化的其它变量,就是动点的轨迹——曲线的参数. 复杂的问题中,影响动点运动的因素不止一个,就要综合考虑各种因素的影响,因此,产生多参数的概念.

(二)参数方程

在取定的坐标系中,如果曲线上任意一点的坐标 x、y 都是某个变数 t 的函数

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t) \end{cases} (t \text{ 是参数}). \qquad ①$$

并且对于 t 的每一个允许值,由方程组①所确定的点(x,y)都在这条曲线上,那么方程组①就称做这条曲线的参数方程.

理解参数方程概念,要注意以下几个方面:

1. 由于选取的参数不同,同一曲线可以有不同的参数方程.

例如,抛物线 $y^2=2px(p>0)$的参数方程为

$$\begin{cases} x=2pt^2, \\ y=2pt \end{cases}$$(曲线上一点(x,y)与其顶点连线的斜率的倒数 t 为参数)

或 $$\begin{cases} x=\dfrac{y_0^2}{2p}, \\ y=y_0 \end{cases}$$(曲线上任意一点(x,y)的纵坐标 y_0 为参数).

又如过 $P_0(x_0,y_0)$点,倾斜角为 α 的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$$(定点 $P_0(x_0,y_0)$到直线上任意

一点 $P(x,y)$ 的有向线段 P_0P 的数量 t 为参数).

若直线的斜率 $k=\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{b}{a}$($a$、$b$ 不一定满足 $a^2+b^2=1$),则它的参数方程又可写为

$$\begin{cases}x=x_0+at,\\ y=y_0+bt\end{cases}(t\ 为参数).$$

显然,此参数 t 不具有前面方程中参数 t 的几何意义.

2. 同一形式的方程,选取不同的参数,可表示不同的曲线.

例 1 已知参数方程 $\begin{cases}x=at+\lambda\cos\theta,\\ y=bt+\lambda\sin\theta\end{cases}$($a,b,\lambda$ 均不为零,$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$). 分别取:(1)$t$ 是参数;(2)λ 是参数;(3)θ 是参数,则下列结论中成立的是(　　).

(A)(1)、(2)、(3)均是直线

(B)只有(2)是直线

(C)(1)、(2)是直线,(3)是圆

(D)(2)是直线,(1)、(3)是圆锥曲线

分析:若 t 是参数,a、b、λ、θ 为常数,消去 t 后得一个关于 x、y 的二元一次方程,故 t 是参数时,参数方程表示直线. 若 λ 是参数,a、b、t、θ 是常数,消去 λ 后方程化为关于 x,y 的二元一次方程,故 λ 是参数时,参数方程表示直线. 若 θ 是参数,a、b、t、λ 是常数,消去 θ 后方程化为 $(x-at)^2+(y-bt)^2=\lambda^2$,参数方程表示圆,故答案是 C.

【导评】同一个形式的方程,选取不同的参数,可表示不同的曲线,因此在研究参数方程时,必须分清参数与常数.

3. 参数方程与含有参数的普通方程不同. 首先,参数方程是通过参数间接表示曲线上点的坐标关系,含参数的普通

方程是直接表示曲线上点的坐标关系．其次，参数方程是曲线方程的一种形式，一般表示一条曲线，含有参数的普通方程一般表示曲线系．如 $y=x+t$ 是含有参数 t 的普通方程，它表示斜率为 1 的直线系．

（三）求轨迹的参数方程

利用参数求轨迹的参数方程是重点，一般有如下步骤：

1．设轨迹上点的坐标为 x、y．画图时点的位置取得好，往往容易发现变量之间的关系．

2．适当选择参数．参数的选取应根据具体条件考虑以下两点：一是曲线上每一点的坐标 x、y 与参数的相互关系比较明显，容易列出方程；二是参数取某一值时，可唯一地确定 x、y 的值．例如，在研究与时间有直接关系的运动物体时，常用时间作参数；在研究旋转物体时，常用旋转角作参数．此外，也常用线段的长度，直线的倾斜角或斜率和截距等作参数．

3．根据已知条件和图形的几何性质或物理性质，建立点的坐标与参数的函数关系式．证明可以省略．

例 2　如图 1－1，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$|BC|=a$，$|AC|=b$．求当 A、C 两点分别在 y 轴和 x 轴的正半轴上滑动时，B 点的轨迹方程．

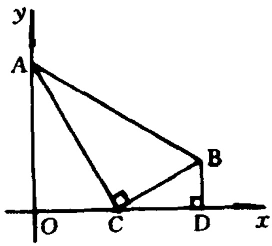


图 1－1

分析：B 点的位置由 A（或 C）点的位置来确定，因此选与 A（或 C）有关的变量为参数．

解：设 $B(x,y)$，此时，$C(t,0)$（$t\geqslant 0$），作 $BD\perp x$ 轴，垂足为 D.

则 $x=|OD|=t+|CD|, y=|DB|$.

$\because \angle C=90^\circ$,

$\therefore \angle BCD=\angle OAC$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OAC \backsim \mathrm{Rt}\triangle DCB$.

$\therefore \dfrac{|OC|}{|DB|}=\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{b}{a}$.

$\therefore |DB|=\dfrac{a}{b}t$.

$\therefore y=\dfrac{a}{b}t$.

$\because |CD|=\sqrt{|BC|^2-|DB|^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{b^2}t^2}=\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-t^2}$.

$\therefore B$ 点轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=t+\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-t^2}, \\ y=\dfrac{a}{b}t \end{cases} (t \text{ 是参数}, t\in[a,b]).$$

本题与图形中的角关系密切,因此,也可以选和 C 点有关的角为参数.

解法二:设 $B(x,y)$,取 $\angle BCx=\theta(0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ)$. 作 $BD\perp x$ 轴,垂足为 D. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中,$|BD|=a\cdot\sin\theta$, $|CD|=a\cdot\cos\theta$.

$\because \angle CAO=\angle BCD=\theta$,

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAC$ 中,$|OC|=|AC|\sin\theta=b\sin\theta$.

$\therefore B$ 点轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta+b\sin\theta, \\ y=a\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}, 0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ).$$

【导评】题目虽然简单,但两种解法有简有繁,所以,要注意参数的选择. 解复杂的题目时,参数的选择是否恰当,对能

否顺利解出题目，有很大影响．从理论上讲，一般地，转动问题多以角为参数；平动问题多以时间为参数．但实际解题时，遇到的问题不一定这么单纯，这么典型，点的运动往往比较复杂，只有灵活应用代数、几何、三角等知识进行分析，才能找到恰当的参数．因此，如何选择恰当的参数这个问题，对知识和能力的要求较高，必须反复练习，才能逐步掌握解决这类问题的技巧．

例 3　如图 1－2，圆 $x^2+y^2=4$ 上一段定长的弧$\overset{\frown}{CD}$使锐角$\triangle COD$ 的面积为 $\sqrt{3}$，AB 是$\odot O$ 的直径，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，当$\overset{\frown}{CD}$沿圆周运动时，求 AD 与 BC 两直线交点 P 的轨迹方程．

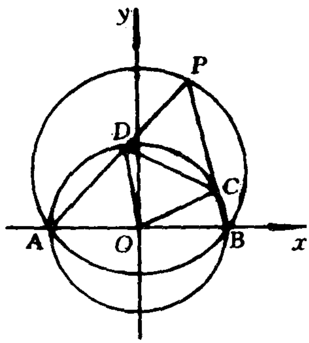


图 1－2

分析：交点 P 由 C、D 在圆上的位置来确定．$\overset{\frown}{CD}$沿圆周转动，P 点必也转动，所以选择和 C、D 有关，顶点在圆心 O 的角作为参数．

解法一：$\because \triangle COD$ 的面积$=\sqrt{3}$，

$$|OC|=|OD|=2,$$

$\therefore \frac{1}{2}\times 2\times 2\cdot\sin\angle COD=\sqrt{3}$，

$$\sin\angle COD=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\because \angle COD$ 是锐角，

$\therefore \angle COD=\frac{\pi}{3}$.

$\because$ 圆 $x^2+y^2=4$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=2\sin\theta \end{cases} (\theta\ 为参数).$$

故若设交点 $P(x,y)$，$\angle COx=\theta$，

则 $C(2\cos\theta, 2\sin\theta)$，$D(2\cos(\theta+\frac{\pi}{3}), 2\sin(\theta+\frac{\pi}{3}))$.

$\therefore$ 直线 AD 的方程为

$$y=\frac{\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)}{1+\cos(\frac{\pi}{3}+\theta)}(x+2); \quad ①$$

直线 BC 的方程为

$$y=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}(x-2). \quad ②$$

联立方程①、②的方程组的解是

$$\begin{cases} x=\frac{4}{\sqrt{3}}\cos(\theta+\frac{\pi}{6}), \\ y=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\cos(\theta+\frac{\pi}{6})-2\right], \end{cases}$$

这即是以 θ 为参数的 P 点轨迹的参数方程．

因为本题只与直线和圆有关，若用平面几何知识分析图形的性质，可以简化解题的步骤．

解法二：同解法一，解得 $\angle COD=\frac{\pi}{3}$.

设 $\angle COB=\theta$，则 $\angle BOD=\frac{\pi}{3}+\theta$.

$\therefore \angle A=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2}$.

同理，$\angle B=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$.

$$\therefore \angle P=\pi-(\angle A+\angle B)=\pi-\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}\text{（定值）}.$$

当$\overset{\frown}{CD}$运动到直径 AB 下方半圆时，同理可求得 $\angle P=\frac{2}{3}\pi$（定值）.

$\therefore P$ 点的轨迹是以 AB 为弦，含 $60°$ 角圆弧的圆．其圆心在 $(0,\frac{2}{3}\sqrt{3})$，半径为 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$．方程为

$$x^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{16}{3}\ (x\neq\pm 2).$$

解法三：设交点 $P(x,y)$，$\angle COB=\theta$，由平面几何知识，得 $\angle A=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}$，$\angle B=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$.

$\therefore \angle PBx=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$.

$\therefore PA$ 的方程为

$$y=\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)(x+2); \qquad ①$$

PB 的方程为

$$y=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}(x-2). \qquad ②$$

联立方程组，解得点 P 坐标即是以 θ 为参数的 P 点轨迹的参数方程．

说明：当 $\theta=0$ 时，C 点与 B 点重合，BC 直线不定；当 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 时，D 点与 A 点重合，AD 直线不定．这两种情况下，只能用极限方法确定交点 P 的位置，但与题目给的条件不符，

所以所求的轨迹上，不应包含$(2,\frac{4}{3}\sqrt{3})$与$(-2,\frac{4}{3}\sqrt{3})$两点．

（四）参数方程与普通方程互化

关于参数方程与普通方程的互化，更多地是考查由参数方程化普通方程，主要是：

1. 用“消元法”消去参数．经常采用的有代入消元法、加减消元法及利用三角恒等式消元法等．

2. 在参数方程化普通方程时，要注意保持同解变形．

例 4 已知
$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cos\theta, \\ y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\sin\theta, \end{cases} \tag{①}$$

求证：(1)若 t 为非零常数，θ 为参数，则参数方程①表示的曲线是椭圆；

(2)若 θ 为不等于$\frac{n\pi}{2}(n\in Z)$的常数，t 为参数，则参数方程①表示的曲线为双曲线，且双曲线与上述椭圆有共同的焦点．

解：(1)参数方程①可化为
$$\begin{cases} \frac{2x}{e^t+e^{-t}}=\cos\theta, \\ \frac{2y}{e^t-e^{-t}}=\sin\theta. \end{cases}$$

平方相加，化简，得
$$\frac{x^2}{(\frac{e^t+e^{-t}}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{e^t-e^{-t}}{2})^2}=1. \tag{②}$$

$\because (e^t+e^{-t})^2>(e^t-e^{-t})^2>0$,

$\therefore$ 方程②表示的曲线为椭圆.

(2)参数方程①又可化为

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{\cos\theta}=e^t+e^{-t},\\[2ex]\dfrac{2y}{\sin\theta}=e^t-e^{-t}.\end{cases}$$

平方相减,化简,得

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=1. \qquad ③$$

所以,方程③表示的曲线为双曲线.

在方程②中,$(\frac{e^t+e^{-t}}{2})^2-(\frac{e^t-e^{-t}}{2})^2=1$,则 $c=1$,椭圆②的焦点为$(-1,0)$,$(1,0)$.

同理,由方程③,$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$,则 $c=1$,双曲线③的焦点为$(-1,0)$,$(1,0)$. 因此椭圆和双曲线有共同的焦点.

说明:本例的启示是形式相同的方程,由于选择参数的不同,表示不同的曲线. 因此,应注意区分问题中的字母是常数还是参数.

例 5 参数方程$\begin{cases}x=\left|\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right|,\\[2ex] y=\dfrac{1}{2}(1+\sin\theta)\end{cases}$ $(0<\theta<2\pi)$表示( ).

(A)双曲线的一支,这支过点$(1,\frac{1}{2})$

(B)抛物线的一部分,这部分过点$(1,\frac{1}{2})$

(C)双曲线的一支,这支过点$(-1,\frac{1}{2})$