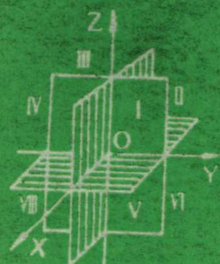
高等数学自学考试讲义

·下册·



北京出版社

高等数学自学考试讲义

下 册

北京市成人教育学院 编

北 京 出 版 社 出 版
（北京崇文门外东兴隆街 51 号）
新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行
马 池 口 印 刷 厂 印 刷

787×1092毫米 32开本 12.5印张 275,000字
1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷
印数1—4,500
书号：7071·1107 定价：1.75 元

目　　录

第七章 矢量代数与空间解析几何

矢量代数是一种数学运算方法，空间解析几何中的一系列问题，都是用矢量代数的方法解决的. 在今后学习高等数学以及一些专业课时，矢量代数也是很有用的工具.

空间解析几何中所学的内容，是今后学习多元函数微积分的基础，我们应当好好掌握这些有用的知识.

本章重点介绍矢量的概念及其运算方法，并利用它来研究空间平面与直线的一系列问题，另外还要讨论几种常用的空间曲面，建立它们的方程并画出它们的图形.

§7.1 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

从空间的一个定点 O，引三条互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz(如图 7-1)，就构成了空间直角坐标系. 按 Ox, Oy, Oz 的次序，那么它们的方向符合"右手法则"、即伸开右手的姆指、食指和中指成互相垂直的三个方向时，则正好就是 Ox, Oy, Oz 的方向. 今后称 O 点为坐标原点，而 Ox, Oy, Oz 为三个坐标轴，分别称为横轴、纵轴和立轴，有时也简称为 x 轴、y 轴

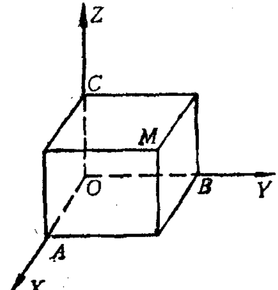


图 7-1

和 z 轴.

设M是空间任意一点,通过点 M 分别作与三个坐标轴垂直的平面,依次得到交点 A,B,C(图 7-1),若设

$$x=OA,\quad y=OB,\quad z=OC, \tag{1}$$

则M点就对应于一组数 x,y,z. 反之,若有一组数 x,y,z,则在 x 轴、y 轴、z 轴上可以找到三点 A,B,C 满足(1)式,从而也就确定了空间的唯一一点 M.

因此,空间一点M与一组有序数 x,y,z,成立"一一对应"的关系,今后就称这一组数是点M的坐标,记为 $M(x,y,z)$.

特别有:坐标原点,$O(0,0,0)$,而坐标轴上三点 A,B,C,分别为

$$A(x,0,0),\quad B(0,y,0),\quad C(0,0,z).$$

下面介绍二个名词:

(1) 坐标平面:由三个坐标轴 x,y,z 两两决定的三个互相垂直的平面 xOy,xOz,yOz.

(2) 卦限:由三个坐标平面把整个空间分为八个区域,称为八个卦限,如图 7-2,八个卦限依次规定为:

I: $x>0,y>0,z>0$;

II: $x<0,y>0,z>0$;

III: $x<0,y<0,z>0$;

IV: $x>0,y<0,z>0$;

V: $x>0,y>0,z<0$;

VI: $x<0,y>0,z<0$;

VII: $x<0,y<0,z<0$;

VIII: $x>0,y<0,z<0$.

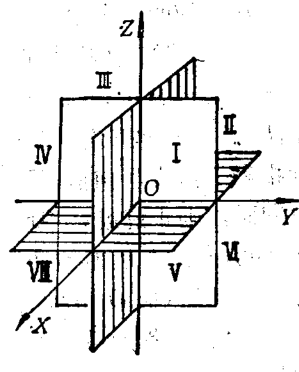


图 7-2

二、基本公式

1. 两点距离公式

设空间任意两点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，作表面分别平行于三个坐标面的长方体，M_1 与 M_2 为其对角的顶点(如图 7-3)，则

$$|M_1M_2|^2=|M_2N|^2+|M_1N|^2$$
$$=|M_2N|^2+|M_1A|^2+|M_1B|^2,$$

因为

$$|M_2N|=|z_2-z_1|,\qquad |M_1A|=|x_2-x_1|,$$
$$|M_1B|=|y_2-y_1|,$$

故 $$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (2)$$

这就是两点距离公式.

特别的，空间任一点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (3)$$

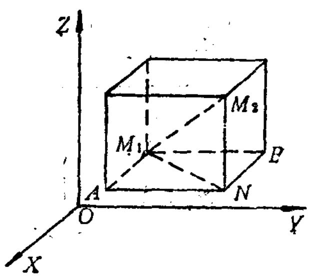


图 7-3

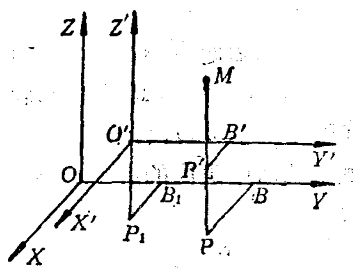


图 7-4

2. 坐标平移公式

若坐标系 $Oxyz$ 经平行移动得新坐标系 $O'x'y'z'$，而 O' 关于坐标系 $Oxyz$ 的坐标为

$$O'(a,b,c)$$

现有空间任意一点 M，它关于坐标系 $Oxyz$ 与 $O'x'y'z'$ 的坐

标分别为

$$M(x,y,z) \quad 与 \quad M(x',y',z').$$

若点 O' 在 Oy 轴上的投影点为 B_1，则 $OB_1=b$，点 M 在 Oy 轴上的投影点为 B，则 $OB=y$，而点 M 在 $O'y'$ 轴上的投影点为 B'，则 $O'B'=y'$，如图 7-4，有

$$OB=OB_1+B_1B=OB_1+O'B',$$
$$y=b+y',$$

类似的可得

$$x=a+x', \quad z=c+z'$$

故得坐标平移公式为:

$$\begin{cases} x=a+x' \\ y=b+y' \\ z=c+z' \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x'=x-a \\ y'=y-b \\ z'=z-c \end{cases}$$

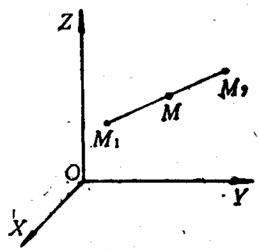


图 7-5

3. 中点公式.

若已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，现在设其联线的中点为 $M(x,y,z)$，与平面解析几何中类似的有中点公式为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2},$$

这里就不证明了.

例 1. 试证以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

解 因为

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49,$$

$$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49,$$
$$|BC|^2=(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2=98,$$
所以
$$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2, |AB|=|AC|$$
故以 A,B,C 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

例 2. 若 $A(2,1,4)$, $B(3,-4,2)$, $C(5,0,6)$ 为三角形的三个顶点,又设 $D(x_0,y_0,z_0)$ 为 BC 的中点,求中线 AD 的长.

解 由中点公式得,
$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+5}{2}=4,$$
$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-4+0}{2}=-2,$$
$$z_0=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{2+6}{2}=4,$$
所以有 $D(4,-2,4)$,故
$$|AD|=\sqrt{(4-2)^2+(-2-1)^2+(4-4)^2}=\sqrt{13}$$
即中线 AD 的长为$\sqrt{13}$.

习 题 7-1

1. 下列各点的位置有何特点.

1° $(2,3,0)$; 2° $(0,y_0,z_0)$;

3° $(0,0,z_0)$; 4° $(-5,0,0)$.

2. 若已知点 $M(1,-2,3)$,求它与

1° xOy 平面; 2° yOz平面; 3° x 轴;

4° z 轴; 5° 原点 O

对称的点的坐标.

3. 在 z 轴上,求与点 $A(-4,1,7)$和点 $B(3,5,-2)$等距离的点.

4. 求点$(1,-3,2)$关于点$(-1,2,1)$的对称点(提示：用中点公式).

§7.2 矢量的概念及其运算

一、矢量的概念

在实际问题中，有些量在确定了单位之后就可以用一个实数表示出来,这种量叫数量. 如某长方形的面积为18平方米，某物体的质量是150克,某工厂上班的时间是八点等.今后我们还会碰到另外一类量，只用一个实数是不能完全表达的，如力、速度、加速度等，只用一个实数来表示它们的大小,这是不够的,我们还要表示出它们的方向才行. 像这样有大小、还有方向的量叫矢量(或向量).

通常，我们用一有向线段来表示矢量(图7-6)记作

$$\overrightarrow{OA} \quad 或 \quad \vec{a}$$

图 7-6

如在物理中,常将力表示为$\vec{F}$，速度表示为$\vec{v}$，在一些教科书上,也常用黑体字如$\boldsymbol{a}$表示矢量,这样手写时很不方便，手写时,应在字母上加箭头.

下面介绍几个名词:

(1) 矢量的模：即为矢量的长度. 今后矢量$\vec{a}$的模表示为$|\vec{a}|$,矢量$\overrightarrow{AB}$的模表示为$|\overrightarrow{AB}|$.

特别的,当某矢量的长度为1时,则称此矢量为单位矢量.

(2) 两矢量相等：若矢量$\vec{A}$与$\vec{B}$满足条件

1° $|\vec{A}|=|\vec{B}|$;

2° $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 平行 (即 $\vec{A} \parallel \vec{B}$);

3° $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的方向相同.

则称矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 相等,记作

$$\vec{A}=\vec{B}.$$

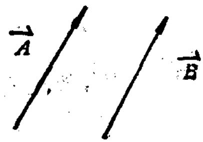


图 7-7

因此,空间的任一矢量,经过平行移动之后,仍为与原矢量相等的矢量,由于矢量平移后不变,有时也称其为自由矢量. 如空间矢量 $\vec{A}$, 经平行移动之后,得到 $\overrightarrow{OM}$,则

$$\vec{A}=\overrightarrow{OM},$$

今后称起点为坐标原点 O 的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 为点 M 的矢径记作

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}.$$

显然,空间的一点 M 确定了一个矢径 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, 反之,每一矢径 $\vec{r}$ 也确定了空间的一点 M,即为其终点.

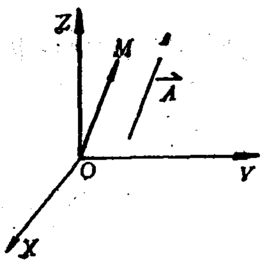


图 7-8

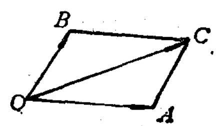


图 7-9

二、矢量的运算

1. 矢量的加法:我们规定两矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和为以这两矢量为边的平行四边形的对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$,如图 7-9, 即

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},$$

显然$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,故还有

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC},$$

这也叫三角形加法. 一般来说，若有 n 个矢量相加,即若

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2+\cdots+\vec{A}_n,$$

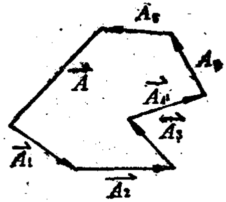


图 7-10

则总可以前一矢量的终点作为后一矢量的起点，相继作矢量$\vec{A}_1,\vec{A}_2,\cdots,\vec{A}_n$,故由第一矢量的起点到最后一矢量的终点所联的矢量即为和矢量 $\vec{A}$. 在图 7-10 上,作出了 $n=6$ 的图形.

矢量的加法满足下面的规律:

1° 交换律

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

2° 结合律

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

2. 矢量的减法　若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,则矢量$\overrightarrow{OA}$就定义为$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OB}$的差,即

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}.$$

由于$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$,故差矢量就是$\overrightarrow{BC}$，即从减矢量的终点到被减矢量的终点所联的矢量.

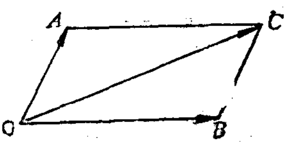


图 7-11

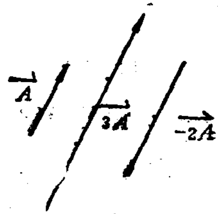


图 7-12

3. 矢量与数量的乘法：如图 7-12，若有矢量 $\vec{A}$，则 $3\vec{A}$ 即为沿 $\vec{A}$ 的方向，取长度为 $3|\vec{A}|$ 的矢量；而 $-2\vec{A}$ 为沿 $\vec{A}$ 的反方向，取长度为 $2|\vec{A}|$ 的矢量.

一般若有矢量 $\vec{A}$ 与数量 m，则它们的乘积 $m\vec{A}$ 为一矢量，它的模为 $|m||\vec{A}|$，它的方向在 $m>0$ 时与 $\vec{A}$ 同向，当 $m<0$ 时与 A 反向.

注意：

1° $-\vec{A}$ 即表示模与 $\vec{A}$ 相等，而方向与 $\vec{A}$ 相反的矢量.

2° 规定模为零的矢量叫零矢量，记为 $\vec{O}$，显然

$$\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{O},$$

零矢量的方向可以看成是任意的.

3° 若 $\vec{A}^0$ 表示与 $\vec{A}$ 同方向的单位矢量，且 $|\vec{A}^0|=1$，则有

$$\vec{A}=|\vec{A}|\vec{A}^0$$

所以，当 $\vec{A}\neq\vec{O}$ 时，有

$$\vec{A}^0=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

矢量与数量的乘法还满足

1° $(\lambda+\mu)\vec{A}=\lambda\vec{A}+\mu\vec{A}$;

2° $\lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$;

3° $\lambda(\mu\vec{A})=\mu(\lambda\vec{A})=(\lambda\mu)\vec{A}$,

其中 λ,μ 为数量.

习　题　7-2

1. 把三角形 ABC 的 BC 边五等分，并把分点 D_1、D_2、D_3、D_4 与对角连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\vec{M}$、$\overrightarrow{BC}=\vec{N}$ 表示矢量，$\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、

$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

2. 若四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形.

3. 证明

1° $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$;

2° $\lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$，$\lambda$ 为数量.

§7.3 矢量的坐标表示

一、矢量在轴上的投影

若有一矢量 $\vec{A}$ 与一数轴 u，如何规定它们的交角呢？

若矢量 $\vec{A}$ 的起点在数轴 u 上，则 $\vec{A}$ 与数轴 u 可确定一个平面，而它们的交角即为 φ（图 7-13），规定

$$0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

从 $\vec{A}$ 的终点 M 引数轴 u 的垂线 MN，垂足为 N，则 ON 为矢量 $\vec{A}$ 或 $\overrightarrow{OM}$ 在轴 u 上的投影，

$$ON=|\vec{A}|\cos\varphi.$$

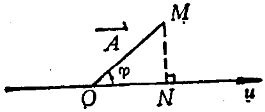


图 7-13

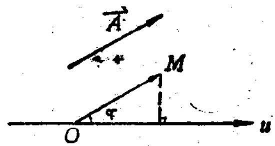


图 7-14

若矢量 $\vec{A}$ 的起点不在数轴 u 上，我们可将 $\vec{A}$ 平移至 $\overrightarrow{OM}$，则

$$\vec{A}=\overrightarrow{OM},$$

规定 $\overrightarrow{OM}$ 与轴 u 的交角即为 $\vec{A}$ 与轴 u 的交角，ON 即为 $\vec{A}$ 在

轴 u 上的投影(如图 7-14),

$$ON=|\overrightarrow{OM}|\cos\varphi=|\vec{A}|\cos\varphi.$$

由上述,可得

定理一 矢量 $\vec{A}$ 在任何轴 u 上的投影(记为 $P_{rju}\vec{A}$)为

$$P_{rju}\vec{A}=|\vec{A}|\cos\varphi,$$

其中 φ 为矢量 $\vec{A}$ 与轴 u 的交角.

显然,当 φ 为锐角时,$P_{rju}\vec{A}$ 为正,而当 φ 为钝角时,$P_{rju}\vec{A}$ 为负.

进一步,我们还可得

定理二 有限个矢量的和在轴 u 上的投影等于各个矢量在轴 u 上投影的和,即

$$P_{rju}(\vec{A}_1+\vec{A}_2+\cdots+\vec{A}_n)=P_{rju}\vec{A}_1+P_{rju}\vec{A}_2+\cdots+P_{rju}\vec{A}_n.$$

此定理请大家自己证明.

二、矢量的坐标

若 $M(x,y,z)$ 为空间的任一点,则(图 7-15)

$$OA=x,\quad OB=y,\quad PM=z,$$

其中 P 为 M 点在 xOy 平面上的投影点. 根据矢量的加法

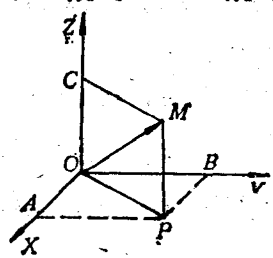


图 7-15

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}$$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

若分别用 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 表示 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上的单位矢量,起点为 O,方向与坐标轴相同,则

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\vec{k},$$

所以

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

显然 x、y、z 也就是矢量 $\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的投影.

若 $\vec{A}$ 是空间的任一矢量，则经过平行移动可以与某一矢量 $\overrightarrow{OM}$ 重合，这时 $\vec{A}$ 在三个坐标轴上的投影 x,y,z 即为点 M 的坐标，因此

$$\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

今后，称 x,y,z 为 $\vec{A}$ 的坐标，记为

$$\vec{A}=\{x,y,z\},$$

而 $x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为 $\vec{A}$ 在 x,y,z 轴上的分矢量.

如果 $\vec{A}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$，$\vec{B}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$，则

$$\vec{A}\pm\vec{B}=(x_1\pm x_2)\vec{i}+(y_1\pm y_2)\vec{j}+(z_1\pm z_2)\vec{k}$$

$$\lambda\vec{A}=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}+\lambda z_1\vec{k}.$$

例 1. 设两定点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标.

解 如图 7-16，因为

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},$$

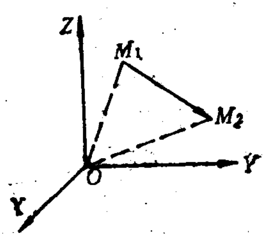


图 7-16

所以

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$
$$=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}.$$

例 2. 下列说法是否正确，为什么？

1° $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ 是单位矢量，

2° $-\vec{k}$ 不是单位矢量.

解 1°的说法是错误的，因为

$$|\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\neq 1$$

故不是单位矢量.