丛书主编 江兆林

数学思想方法与建

数学思想方法与建模技巧

兰永胜 等 主编 邓方安 主审

新高考应用问题解法与训练

青岛海洋大学出版社

数学思想方法与建模技巧

新高考应用问题解法与训练

主　编　兰永胜　蒋海瓯　马德全　张理军　吴万辉

副主编　郑祖平　武玉清　谭柏生　张仁达　袁国颖

编　委　程复华　金建威　简树河　杨启林　李　海

王　收　游崛起　赵一军　张兆贵　窦玉磊

柳　婀　郑显辉

主　审　邓方安

青岛海洋大学出版社

·青　岛·

图书在版编目(CIP)数据

数学思想方法与建模技巧:新高考应用问题解法与训练/兰永胜等主编.—青岛:青岛海洋大学出版社,2000.7

ISBN 7-81067-163-4

Ⅰ.数… Ⅱ.兰… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 35279 号

青岛海洋大学出版社出版发行

(青岛市鱼山路5号　邮政编码:266003)

出版人:刘宗寅

临沂市第二印刷厂印刷

新华书店经销

*

开本:850mm×1 168mm　1/32　印张 10.75　字数:270 千字

2000 年 7 月第 1 版　　2000 年 7 月第 1 次印刷

印数:1～9 000 册　　定价:13.80 元

前　言

素质教育的重点是培养学生的创造性思维和实践能力.而数学学科以其独特的优势在素质教育中发挥作用,在这当中,数学应用题的教学举足轻重.高考改革将考查应用问题纳入到考查分析问题和解决问题能力的轨道,并逐年加大考查力度,以充分发挥应用问题在甄别考生水平时的作用.因此,广大考生迫切盼望一本系统地阐述数学应用题的书,以便能在较短的时间内提高解数学应用题的能力.然而,此类书目前十分少见.本书作者就是在这样的背景下,总结多年的教学实践和知识积累,对数学应用题进行系统分析与研究,并将研究成果编辑成书,适时地为广大考生提供了数学应用题方面的实用资料.

本书主要讲述解数学应用题的实用知识,尤其是介绍一些数学建模技巧.全书共分九章:第一章是总论,讲述数学应用题的基本特点、复习应考对策,数学应用题的解决过程、应试方法与要领,数学应用题的类型与建模举例;第二章介绍建立数学模型常用的知识和数学思想方法;第三章至第九章就各种类型的应用题详尽分析其解法和建模技巧.全书既有理论阐述,更有大量的实例,紧密联系实际,通俗易懂,各章均配有训练题,书末附有训练题的详解.

本书可作为高中数学总复习的参考读物,师生均可使用.对高一、高二的学生来说,也是一本不可多得的学习参考书.我们相信,本书的出版,对提高同学们的创新能力和解数学应用题的能力,减轻师生的教与学的负担将起到积极的作用.

西安电子科技大学应用数学博士研究生邓方安副教授主审本书，并提出了许多宝贵意见，我们表示衷心的感谢！另外，需要说明的是本书第九章由柳娴老师撰稿.

由于作者水平所限，书中一些问题的提法可能不妥，对某些例题的分析可能有疏漏，衷心地希望广大读者批评指正.

作　者

2000 年 7 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章　总论

数学应用问题(简称数学应用题)是相对纯数学问题而提出的,指的是应用数学知识解决有实际背景或有实际意义的问题.在平时,同学们尽管对纯数学问题的求解能得心应手,但是一碰上精心编拟,不拘于现成格式的数学应用题,往往感到束手无策,连入门之径都找不到,一旦别人把解法告诉你,或者你在对照参考答案之后,就会恍然大悟:"啊!原来如此!解题所需要的数学知识竟然如此简单,我全都非常熟悉.为什么我当时就没有想到这样做呢?"因此,大家都非常迫切地希望提高自己解数学应用题的能力.

然而,解数学应用题(与解纯数学难题一样),是数学解题中的最高境界,要求解题者具有很强的综合素质,尤其是创造性思维能力,这对于同学们来说,相当于科学家独立从事科学研究.两者的区别仅仅在于同学们要解决的是他人提出并已有了答案的实际问题(只是在你把问题解决之前,对你来说是尚无答案的而已),本书所涉及的数学应用题,均指这一类.科学家则是试图解决自己提出的或是由他人提出但至今还没有答案的实际问题.因此,在某种意义上说,解数学应用题,是对同学们的创新精神和实践能力的检验,也是同学们数学综合素质的最终体现.大家觉得这类题难解,也就不足为奇了.

那么,能否在较短的时间内,使自己解数学应用题的能力有大幅度的提高呢?马克思主义哲学告诉我们,一切事物的运动变化和发展都是有其特点的.对数学应用题这一事物来说,也不例外.当我们还未认识到数学应用题的特点的时候,我们对它求解的行动是盲目的.我们一旦认识,了解了它的特点,就可以自觉地利用这

些特点，使解数学应用题的过程得以顺利进行. 因此，可以肯定地说，只要同学们从把握数学应用题的特点出发，并善于运用这些特点去指导自己的解题实践，就能够使自己解数学应用题的能力在最短的时间内得到最大幅度的提高. 从此，对数学应用题不再望题兴叹，一筹莫展.

§1 数学应用题的基本特点与复习应考对策

由于数学应用题情境新颖，难于模拟分类，因而它是考查同学们创新能力的好题型. 如 1999 年高考数学应用题，创设了一个陌生环境，要求根据提供的条件，去揭示数学理论的形成和探索过程. 它能很好地考查考生思维所处的层面. 下面我们结合该题首先探求数学应用题的基本特点和应试对策.

例 1 图 1-1 为一台冷轧机的示意图. 冷轧机由若干对轧辊组成，带钢从一端输入，经过各对轧辊逐步减薄后输出.

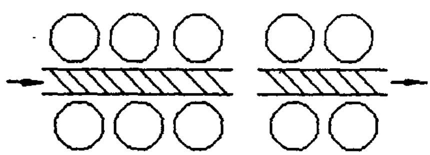

图 1-1

（Ⅰ）输入带钢的厚度为 α，输出带钢的厚度为 β. 若每对轧辊的减薄率不超过 γ_0，问冷轧机至少需要安装多少对轧辊？

（一对轧辊减薄率 =

$$\frac{\text{输入该对的带钢厚度} - \text{从该对输出的带钢厚度}}{\text{输入该对的带钢厚度}}\text{）}$$

（Ⅱ）已知一台冷轧机共 4 对减薄率为 20% 的轧辊，所有轧辊周长均为 1 600mm. 若第 k 对轧辊有缺陷，每滚动一周在带钢上压出一个疵点，在冷轧机输出的带钢上，疵点的间距为 L_k. 为了便于检修，请计算 L_1, L_2, L_3 并填入下表（轧钢过程中，带钢宽度不变，

且不考虑损耗).

轧辊序号 k	1	2	3	4
疵点间距 L_k(单位 mm)				1 600

粗略读题,我们便可感知到这是一道典型的工业应用题.虽然我们没有见过冷轧机,但是通过题中的叙述,我们完全可以了解冷轧机的工作过程.见过压面机(一种压制面条的机器,有电动和手动两种类型)或者小时候玩过泥巴(或橡皮泥)的同学,对这一过程的感性认识就会更快,更强.

基本特点 1:数学应用题都会有一定的生活背景(工业的、农业的、商业的、国防的、横向学科的 …),是命题者在同学们已有的知识范围内编拟出的,是同学们力所能及的题目.题中给出的材料为同学们所能理解,有相对的理想化、规范化(如例 1 中规定带钢宽度不变且不考虑损耗),有客观的对错答案,有明确的评分标准.

由上述特点,我们首先就应该坚定求解应用题的必胜信念.千万不能望题生畏,放弃不答,白白丢分.坚信"有志者事竟成",这是解题成功的心理条件和起点.对于例 1,我们不能一看"冷轧机","带钢","轧辊","疵点"就胆怯,而应继续仔细读题,审题(见过冷轧机的同学,恐怕也没有想到它会被高考命题者选为命题对象.因此,如果平时能多留意周围事物,并尝试提出一些问题,那么对提高解应用题的能力将会是大有裨益的).

第(Ⅰ)问实际上是"带钢原来厚度是 α,厚度每经过一对轧辊就比原来降低不超过 γ_0,至少经过多少次减薄,带钢厚度变为 β".这很容易使我们想起《代数》(上册,必修)P.70 习题七的第 2(2)题:"一种产品的成本原来是 a 元,在今后 m 年内,计划使成本平均每年比上一年降低 $p\%$,写出成本随经过年数变化的函数关系式".由题中对减薄率的规定可知,两者的数学模型(指数函数)是一致的.也容易使我们联想到《代数》(下册,必修)P.58 习题十八

第 5,6,7,8,10,12,13 题,从而得出此题的数学模型为等比数列.或者直接由对减薄率的规定得出此题的数学模型为等比数列,即设输入厚度为 β_k,输出厚度为 β_{k+1},减薄率为 γ,则有

$\gamma=\dfrac{\beta_k-\beta_{k+1}}{\beta_k}$ 即 $\dfrac{\beta_{k+1}}{\beta_k}=1-\gamma$. 由此可得等比数列模型.

第(Ⅱ)问,欲求 L_3,L_2,L_1,我们首先应该想到关于间距 L_k 的方程(或方程组).因为已知第 4 对轧辊有缺陷时,疵点间距 L_4 恰好等于轧辊周长 1 600mm,由于 L_3 与 L_4 联系较紧密,所以先考虑求 L_3.

若第 3 对轧辊有缺陷,带钢在通过第 4 对轧辊前较厚,并且容易知道.冷轧机轧钢板时钢板的体积不变,所以疵点间距 $L_3>$ 1 600(这是定性分析).但怎样得到关于 L_3 的方程呢?这就要善于寻找等量关系了(这也是从初一学习列一元一次方程解应用题起就要开始培养的).这里,“体积不变”(立体几何模型),“长度与厚度成反比”(比例模型)都是等量关系.求出 L_3 以后,就可以同理求出 L_2 与 L_1.如果想到先寻求 $L_k=f(k)$(函数模型),那么虽然求 L_k 时,等量关系的本质没变,但一般关系显然较抽象,这对某些同学来说,就在一定程度上增加了解题的难度.

在建立相应的数学模型以后,问题就迎刃而解了.

基本特点 2:数学应用题考查同学们应用数学的意识,具体地说,就是考查同学们从所熟悉(或所能理解)的生活、生产和其他学科的实际问题出发,进行观察、比较、类比、联想、分析、综合、抽象、概括、归纳和必要的逻辑推理,转化得出数学概念和规律(即数学模型)的能力.

数学应用题的这一特点就决定了我们在平常的学习和生活中,要经常保持“应用数学”的清醒头脑,经常有意识地进行把实际问题抽象成数学问题的训练,逐步把所学到的数学知识应用到生产,生活实际中去,尤其要注意熟练掌握教材中应用题的建模技

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

巧. 本书把数学应用题集中整理,并且不按"数学模型"分类,目的是让同学们通过理论学习和大量的解题训练,减少对数学应用题的陌生感,新奇感,增强"应用题感",从而克服怯场、发怵的心理.能读懂题目,是能正确解题的前提,连题目都读不懂,根本就谈不上解题. 如何提高同学们的阅读能力,以及把日常文字语言翻译成数学文字语言、符号语言和图形语言的能力,使同学们面对数学应用题,"读得懂,译得出",是本书的另一重要目的.

例 1 第(Ⅰ)问,因为要使轧辊数最少,所以每对轧辊的减薄率应该最大,都取为 γ_0,由指数函数模型,从不等式知识切入,设需要安装 x 对轧辊,根据题意,得 $\alpha(1-\gamma_0)^x \leqslant \beta$ ① 从方程知识切入,设至少需要安装 x 对轧辊,根据题意,得 $\alpha(1-\gamma_0)^x = \beta$ ②

如果由等比数列模型,首项是钢板原来厚度 α,公比是 $1-\gamma_0$,项数是轧辊对数 x 加上 1,由通项公式,同样可得 ① 或 ②.

例 1 第(Ⅱ)问,由立体几何模型,从方程知识切入,设带钢宽度为 w,第 3 对轧辊出口处钢板厚度为 β_3,第 4 对轧辊出口处钢板厚度为 β_4,根据题意,得

$$\begin{cases}\dfrac{\beta_4}{\beta_3} = 1 - 20\% \\ w \cdot \beta_3 \cdot 1\ 600 = w \cdot \beta_4 \cdot L_3\end{cases} \quad ③$$

如果由比例模型,长度 1 600mm 的带钢对应的厚度为 β_3(第 3 对轧辊处),长度 L_3mm 的带钢对应的厚度为 β_4(第 4 对轧辊处),因为带钢的体积不变,长度与厚度成反比,所以有

$$\frac{1\ 600}{L_3} = \frac{\beta_4}{\beta_3} = 1 - 20\% \quad ④$$

在得到 ①(或 ②),③(或 ④) 以后,便可以用非常简单的纯数学知识解决问题了.

基本特点 3:数学应用题以考查同学们的数学知识、方法与能力为主,所用到的数学知识、思想、方法都是中学数学中最基本的.

然而，如何运用这些最基本的数学知识、思想、方法建立起正确的数学模型，顺利地转化为纯数学问题，是解题的关键和困难所在.

从这一特点出发，让同学们在解数学应用题时，能迅速联想与题目有关的数学知识和数学方法，并运用一定的技巧将实际问题转化为纯数学问题，使同学们"分得清"题设条件（包括隐含条件）与所求结论之间的联系，"找得到"相应的数学模型，从而达到"见题便建模"的目的，成为本书的核心内容（详见以后各章）.

通过上面对例 1 的详尽分析，我们将其求解过程完整简明地表述出来.

（Ⅰ）解：设至少需要安装 x 对轧辊，根据题意，每对轧辊的减薄率都应取为 γ_0，且

$$\alpha(1-\gamma_0)^x=\beta$$

解得 $x=\dfrac{\lg\beta-\lg\alpha}{\lg(1-\gamma_0)}$，由实际意义，$x$ 应取不小于 $\dfrac{\lg\beta-\lg\alpha}{\lg(1-\gamma_0)}$ 的第一个整数.

答：至少需要安装不小于 $\dfrac{\lg\beta-\lg\alpha}{\lg(1-\gamma_0)}$ 的第一个整数对轧辊.

（Ⅱ）解：设第 3 对轧辊出口处带钢的厚度为 β_3，长度为 1 600mm，经过冷轧后，在第 4 对轧辊出口处被等积地轧成长度为 L_3，厚度为 β_4 的带钢，根据题意，得 $\begin{cases}\dfrac{\beta_4}{\beta_3}=1-20\%,\\ \dfrac{1\ 600}{L_3}=\dfrac{\beta_4}{\beta_3}.\end{cases}$

解得 $L_3=\dfrac{1\ 600}{0.8}=2\ 000(\mathrm{mm})$. 同理，

$L_2=\dfrac{1\ 600}{0.8^2}=\dfrac{L_3}{0.8}=2\ 500(\mathrm{mm})$.

$L_1=\dfrac{1\ 600}{0.8^3}=\dfrac{L_2}{0.8}=3\ 125(\mathrm{mm})$.

填表如下：

轧辊序号 k	1	2	3	4
疵点间距 L_k(单位 mm)	3 125	2 500	2 000	1 600

基本特点 4:数学应用题的解题表述,一般都有"一写解,二写设,三写根据题意得,四把纯数学问题解,五由实际意义定取舍,六写答案要完整"的步骤与格式.转化后的纯数学问题的求解,一般不会太难.

上述特点说明,同学们在解数学应用题时,要注意表述的简明,规范,以节省解题时间.转化为纯数学问题以后,只要按照求解相应纯数学问题的一切要求正确求解,细心运算,并注意检验所得结果的实际意义,就可以得到实际问题的正确答案.让同学们"写得出,解得对",是本书的又一目的.

§2 数学应用题的解决过程、应试方法与要领

一、应用题的解决过程

通过上面的叙述,同学们对数学应用题有了较为全面的认识.我们知道,解数学应用题实质上是在限定的短时间内,创造性地解决问题的过程.这一过程一般必须经过四个阶段:知识准备期,审题酝酿期,模型明朗期,验证解答期.

1. **知识准备期**:对知识和经验进行积累和整理,准备解决问题阶段.由于我们的解题是在"限定的短时间内"进行,不可能在进了考场以后再准备,而应用题求解成功与否,是数学素质好坏的试金石,也是高考能否成功的重要因素.所以,我们必须从现在开始着手准备,这也是学习本书的重大意义所在.这一时期,也可称为"能力储存期".

2. **审题酝酿期**:沉思和多方假设阶段.指在考场上对应用题所

提供的信息进行阅读、思考、联想、探索，不断从正面，反面去进行各种数学模型的假设，让其在头脑中反复地组合、交叉、撞击和渗透，不断否定、选择，形成新的数学模型假设，以便为解题提供必要的线索. 对于例 1，很明显，这是一个工业应用问题，是减薄率问题. 我们可以作出假设如下：函数模型？方程模型？数列模型？不等式模型？比例模型 …

假设是以题目给出的事实材料为基础的，必须以相关知识尤其是数学知识为根据，虽然它的可靠性、有效性还有待于后面的解题实践去检验，但这种假设为进一步解题提供了线索，并不是毫无根据的胡思乱想.

在审题酝酿过程中，如果思维受阻，就必须转换思路或者把问题暂时搁在一边，先做试卷中的其他题，以便产生新的思维或在潜意识层面徘徊. 在考场上，我们必须善于审时度势，当机立断地做出决定，并且执行决定. 在解应用题的过程中，要很好地把握各个关键时刻. 因为在考场上，时间就是分数. 这一阶段的心理状态呈现多种思维交替，思考强度大，常有“山重水复疑无路”的内心困惑出现. 此时，良好的意志品质起着重要作用. 求解例 1 的第（Ⅱ）问时，由于带钢在第 k 对轧辊中的厚度与出口处（最后一对轧辊中）的长度 L_k 对应，而且在这一过程中涉及到的量较多，就很有可能出现上述困惑现象.

3. 模型明朗期：顿悟和突破阶段. 在模型明朗期发现具体的数学模型与解题方法. 顿悟是指经过长时间（相对于限定的短时间而言）的审题酝酿之后，新的想法在极短暂的时间里豁然开朗、脱颖而出. 这当中，直觉思维往往起决定性作用，这一阶段的心理状态是高度兴奋，有时自己也感到惊讶，但更多的是快乐、欣慰. 如求解例 1 的第（Ⅱ）问时，虽然知道应该设法得到方程，然而苦苦寻找等量关系却毫无结果，突然发现了“体积相等”或“钢板的长度与厚度成反比”以后，便会有上述感觉.

4. **验证解答期**：评价、完善和充分论证阶段. 当突然获得突破之后，需要尽快地充实扩展，最终形成解答. 这期间的心理状态较为平静. 但需要慎重、周密和耐心，以免造成不必要的失误（如讨论不全面，表述不当等）而丢分.

二、解应用题的要领

通过上述对数学应用题解决过程的分析，我们认为，求解数学应用题的要领可以概括如下：

1. 观察审题，找到最佳感觉；
2. 借助符号，适当进行翻译；
3. 依托图表，理顺数量关系；
4. 想方设法，建立数学模型；
5. 发挥水平，求解数学问题；
6. 回到实际，检验数学结果；
7. 正确表述，力求得到满分.

1. 观察审题，找到最佳感觉

我们大都有过这样一种体验，当我们读完，读懂一道题时，凭着解题经验常常会直觉地想出关于此题的解法（而且往往正确），或者对这个题型的特征立即有个大体的认识. 这种现象我们把它称作“最佳感觉”. 这种感觉可以帮助我们确定求解的方向，引导我们走向求解成功之路. 一般说来，在考场上的短时间内，如果没有这种感觉，就很难顺利，完整地将应用题解出来. 因此，同学们在解数学应用题的训练过程中，务必注意捕捉、体会这种“感觉”.

2. 借助符号，适当进行翻译

首先要善于把普通语言翻译成数学语言，其次要善于把普通语言中的数量关系用数学语言表示出来，要善于捕捉变量之间的关系. 例 1 第（Ⅱ）问中，第 k 对轧辊有缺陷，可设第 k 对轧辊出口处带钢的厚度为 β_k，长度为 1 600mm，经过冷轧后，在（第 4 对轧辊）出口处被等积地压成长度为 L_k，厚度为 β_4 的带钢，经过上述翻译，

立即可得

$$\begin{cases}\dfrac{1\ 600}{L_k} = \dfrac{\beta_k}{\beta_4} & ⑤\\ \beta_4 = \beta_k(1-0.2)^{4-k} & ⑥\end{cases}$$

3. 依托图表,理顺数量关系

图有两种,一种是严格的几何图像,另一种是帮助我们思考的形象或类比示意图.图解有利于直观地显示题设之间的数量关系.某些本来很抽象的数学应用题,通过图解,往往能使问题变得一目了然.

例 2 某汽车公司在甲站依次排列着 m 辆汽车,在乙站依次排列着 n 辆汽车(假定 $m \geqslant n$),每隔一小时,由两站同时向对方开出一辆汽车,每辆汽车在途中走三小时半到达对方车站,休息两小时后便依次排在车队的后面准备再次出车.如果每天各站都向对方开出八次班车.试问,这个公司的哪一辆车在一天的途中与本公司的汽车相遇次数最多?最多几次?(**注**:每天均指白天的 12 个小时)

这是一个公共交通问题.虽然题中给出材料的背景易懂,但涉及的量多而杂.因此,很难"找到最佳感觉",也不好"借助符号,适当进行翻译".但如果想到"依托图形",即设计出汽车的运行图,那么我们便可以得到一种直观的"计数模型"了.

解:设在平面 tOx 上,Ot 轴表示时间,Ox 轴表示位置,以原点 O 表示甲站,在 Ox 轴上选取一点作为乙站.如图 1-2 所示,根据题意,可得从甲,乙两站开出的汽车,其时间位置线,就是图中的两组平行线.

若从一站第一班车出发到它由对方再次发车,中间至少需要 $3\dfrac{1}{2}+2=5.5$ 小时,此时对方已开出 6 次班车,故必有 $m \geqslant n \geqslant 6$,否则便不能按原计划运行.又因为一班车从甲站到乙站后,再由

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com