北大燕园

# 李永乐·李正元考研数学⑦

2005年版

# 轻轻松松考高分

## 线性代数·概率论与数理统计篇
## ——历年试题分类解析


主编 清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠
东北财经大学 龚兆仁
策划 高联


- 合编线代、概率
- 包含数一—数四
- 涵盖87—04试题
- 分类解析透彻
- 挖掘命题规律
- 轻取考试高分

国家行政学院出版社

李永乐·李正元考研数学 ⑦

# 轻轻松松考高分

## 线性代数·概率论与数理统计篇

### ——历年试题分类解析


主编　清 华 大 学　李永乐
　　　中国人民大学　袁荫棠
　　　东北财经大学　龚兆仁
策划　高　联



国家行政学院出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

轻轻松松考高分.线性代数、概率论与数理统计篇:名师历年试题分类解析/李永乐,袁荫棠等编.
—北京:国家行政学院出版社,2003.2
ISBN 7-80140-270-7

Ⅰ.轻… Ⅱ.①李… ②袁… Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-解题 ②概率论-研究生-入学考试-解题 ③数理统计-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 004646 号

**轻轻松松考高分**
**线性代数·概率论与数理统计篇**
李永乐 袁荫棠 龚兆仁 主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码:100089
发行部电话:68920615 68929949
北京市朝阳印刷厂印刷 新华书店经销
*
787×1092 1/16 开本 17.25 印张 420 千字
2004 年 3 月第 2 版 2004 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-270-7/O·24 定价:24.00 元

# 研究过去 找出规律
# 认识现在 掌握重点
# 预测未来 轻取高分

## （代前言）

### （一）

当代著名数学家 G. D. 伯克霍夫(Birkhoff)指出："再也没有一个学科比数学更易于通过考试来测定智力了。"对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

### （二）

本书汇集了 1987 年—2004 年历届全国硕士研究生入学统考试线性代数、概率论与数理统计试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学线性代数、概率论与数理统计试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，使考生引以为戒。

本套书把历年考研数学试题依据考试大纲的章节顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

**编者按**——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

**考点分布**——统计分析本章所考题型、历年试题在该题型所占分数和所考次数，便于考生分析命题规律，从而预测今后命题趋势。

**题型分类解析**——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该题型考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而掌握考研数学试题的广度和深度，做到复习时目标明确，心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起，我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似，因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外，每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

**小结**——梳理本章知识结构，归纳本章重要知识点的具体内容及相关结论（公式、定理）。

## （三）

著名数学家、教育家G. 波利亚（Polya）说："解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋。因此，解题可以认为是人的最富有特征性的活动。"本套书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**李永乐、李正元**等编写的**《考研数学复习全书》（理工、经济类）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路极其吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2—3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

再提一个建议供参考。关于考题重复的问题，需要说明的是：这种重复不仅在理工类或经济类内部，而且也在数学一至四之间重复。近年来多次出现过原来理工类试题拿到经济类中做考题的情况。这就是说，经济类考生也应该了解理工类试题。因此，我们建议：无论理工类考生还是经济类考生，都应认真研读本书。

## （四）

参加本书编写的有：清华大学 **李永乐**、中国人民大学 **袁荫棠**、东北财经大学 **龚兆仁**。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2004年3月

# 目　录

## 上篇　线性代数

## 下篇 概率论与数理统计

# 上篇 线性代数

## 第一章　行列式

**编者按**

从1987年全国统考以来，行列式的题以填空、选择为主，题量不多，比较而言数学四相对多一些(共12题)，偏重于计算，数学一(含96年以前的数学二)仅8个题，偏重于简单论证.

对于落到行列式的考题，大致为三种类型，一是数字型行列式的计算，一是抽象型行列式的计算，还有就是行列式值的判定(特别是行列式是否为零的判定。)

在这些考题中不仅有行列式的概念、性质及计算，还涉及到矩阵、向量、方程组、特征值、二次型等知识点.

## Part Ⅰ　1987年—2004年历年试题考点分布

**✻ 数学一**

| 分值 考点 年份 | 数字型行列式的计算 | 抽象型行列式的计算 | 行列式 $\|A\|$ 是否为零的判定 |
|---|---|---|---|
| 1987 | | 3 | |
| 1988 | | 3 | |
| 1989 | | | 3 |
| 1990 | | | |
| 1991 | | 6 | |
| 1992 | | | |
| 1993 | | | |
| 1994 | | 6 | 6 |
| 1995 | | 6 | |
| 1996 | 3 | | |
| 1997 | | | |
| 1998 | | | |
| 1999 | | | 3 |
| 2000 | | | |
| 2001 | | | |
| 2002 | | | |
| 2003 | | | |
| 2004 | | 4 | |
| 合计 | 3 | 28 | 12 |

✲ **数学二**

| 考点 / 分值 / 年份 | 数字型行列式的计算 | 抽象型行列式的计算 | 行列式$\|A\|$是否为零的判定 |
|---|---|---|---|
| 1987 | | | |
| 1988 | | | |
| 1989 | | | |
| 1990 | | | |
| 1991 | | | |
| 1992 | | | |
| 1993 | | | |
| 1994 | | | |
| 1995 | | | |
| 1996 | | | |
| 1997 | | | |
| 1998 | | | |
| 1999 | 3 | | |
| 2000 | | | |
| 2001 | | | |
| 2002 | | | |
| 2003 | | 4 | |
| 2004 | | 4 | |
| 合计 | 3 | 8 | 0 |

✲ **数学三**

| 考点 / 分值 / 年份 | 数字型行列式的计算 | 抽象型行列式的计算 | 行列式$\|A\|$是否为零的判定 |
|---|---|---|---|
| 1987 | | | |
| 1988 | 1 | 6 | |
| 1989 | | | 3 |
| 1990 | | | |
| 1991 | | | |
| 1992 | | 3 | |
| 1993 | | | |
| 1994 | | | |
| 1995 | | | |
| 1996 | | | |
| 1997 | | | |
| 1998 | | | |
| 1999 | | | |
| 2000 | | 3 | |
| 2001 | | | |
| 2002 | | | |
| 2003 | | | |
| 2004 | | | |
| 合计 | 1 | 12 | 3 |

✲ **数学四**

| 分值 年份 \ 考点 | 数字型行列式的计算 | 抽象型行列式的计算 | 行列式$\|A\|$是否为零的判定 |
|---|---|---|---|
| 1987 | | | |
| 1988 | 1 | | |
| 1989 | | | 3 |
| 1990 | 4 | 3 | |
| 1991 | 3 | | |
| 1992 | | 6 | |
| 1993 | | 3 | |
| 1994 | | | |
| 1995 | | | |
| 1996 | 3 | | |
| 1997 | 3 | | |
| 1998 | | 3 | |
| 1999 | | | |
| 2000 | 3 | 3 | |
| 2001 | 3 | | |
| 2002 | | | |
| 2003 | | | |
| 2004 | | | |
| 合计 | 20 | 18 | 3 |

# Part Ⅱ 1987 年—2004 年历年试题分类解析

## 一、数字型行列式的计算

**1. (88, $\frac{3}{4}$, 1 分)*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

**【分析】** 这是基础题,解法很多,先用性质恒等变形再展开,例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

---

* 88, $\frac{3}{4}$, 1 分 依次表示:1988 年,$\frac{\text{数学三}}{\text{数学四}}$,本题满分 1 分,下同.

或 $\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&3&3&3\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{vmatrix}=-3.$

**评注**　第一种方法是直接用展开公式,第二种方法用到公式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n-1}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n-1}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n-11}&a_{n-12}&\cdots&0&0\\a_{n1}&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

**2. (90,4,4分)**　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $10\times10$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&0\end{vmatrix},$$

计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为10阶单位矩阵,$\lambda$ 为常数.

**【解】**　$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&\cdots&0&0\\0&-\lambda&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-\lambda&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&\cdots&0&0\\0&-\lambda&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-\lambda&1\\0&0&0&\cdots&0&-\lambda\end{vmatrix}+$$

$$10^{10}(-1)^{10+1}\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\-\lambda&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&-\lambda&1\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)(-\lambda)^9-10^{10}=\lambda^{10}-10^{10}.$$

**3. (91,4,3分)**　$n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}=$ ________.

【分析】 按第 1 列展开,有

$$D=a\begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \\ & & & & a \end{vmatrix}+b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & & & & \\ a & b & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & b & \\ & & & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

请思考本题按第 1 行展开与按第 1 列展开哪一种方法更简便?

4.(96,1,3 分) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$. (B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$.

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$. (D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$. 【 】

【分析】 这是一个数字型行列式的计算,由于本题有较多的零,可以直接展开计算. 若按第一行展开,有

$$D=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

所以应选(D).

若熟悉拉普拉斯展开式,可通过两列互换,两行互换,把零元素调至行列式的一角. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix},$$

从而知

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

5.(96,4,3 分) 五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】 对于$\begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & c & a & b \\ & & c & a \end{vmatrix}$型行列式，主要用递推法. 对于本题，注意到2至4行的数为相反数，故可把2至5列均加至第1列，得到

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + (-a)(-1)^{5+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix},$$

即 $D_5 = D_4 + (-a)(-1)^{5+1}a^4.$

那么 $D_4 = D_3 + (-a)(-1)^{4+1}a^3,$

$D_3 = D_2 + (-a)(-1)^{3+1}a^2.$

把这三个等式相加，并把 $D_2 = 1 - a + a^2$ 代入，得

$$D_5 = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5.$$

**评注** 请读者按第1行(列)直接展开，建立递推关系式，并体会一下这两种解法的难易差异.

因为主对角线下方是 $-1$，本题也可把第2至第5行的倍数加至第1行，把 $a_{11}$ 至 $a_{14}$ 化为0，然后对第1行展开.

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1-a+a^2 & a-a^2 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-a+a^2-a^3 & a-a^2+a^3 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-a+a^2-a^3+a^4 & a-a^2+a^3-a^4 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}
$$

$$
= (1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)\cdot(-1)^{5+1}(-1)^4
$$

$$
= 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.
$$

**6. (97,4,3 分)** 设 $n$ 阶矩阵

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

则 $|A| =$ ________.

**【分析】** 把第 2,3,…,$n$ 各行均加至第 1 行,则第 1 行为 $n-1$,提取公因数 $n-1$ 后,再把第 1 行的 $-1$ 倍加至第 2,3,…,$n$ 各行,可化为上三角行列式. 即

$$
|A| = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).
$$

**评注** 除去用行列式性质及展开公式计算外,你能否利用特征值更简单地求出行列式 $|A|$ 的值吗?

**7. (99,2,3 分)** 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4. 【 】

**【分析】** 问方程 $f(x)=0$ 有几个根,也就是问 $f(x)$ 是 $x$ 的几次多项式. 将第 1 列的 $-1$ 倍依

次加至其余各列，有

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}\xlongequal{(2)+(4)}\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-1\\4x&-3&x-7&-6\end{vmatrix}.$$

由拉普拉斯展开式知 $f(x)$ 是2次多项式，故应选(B)．

**评注** 由于行列式中各项均含有 $x$，若直接展开是繁琐的，故一定要先恒等变形；也不要错误地认为 $f(x)$ 一定是4次多项式．

**8. (00,4,3分)** 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$n$ 为正整数，则 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=$ ________.

**【分析】** 因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}(1\ 0\ -1)=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix},\text{而}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1\ 0\ -1)\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=2,$$

则 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A}$.

于是 $\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$.

那么

$$|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=|a\boldsymbol{E}-2^{n-1}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{vmatrix}=a^2(a-2^n).$$

**评注** 若特征值熟练，由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为2,0,0．那么，$\boldsymbol{A}^n$ 的特征值是 $2^n$,0,0．从而 $a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n$ 的特征值是 $a-2^n,a,a$．故

$$|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=(a-2^n)a^2.$$

**9. (01,4,3分)** 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix},$$

则第4行各元素余子式之和的值为________.

**【分析】** 按余子式定义，即求下列4个行列式值之和

$$\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}$$

$$=-56+0+42-14=-28.$$

因为行列式中有较多的零元素，所以用余子式的定义直接求和并不复杂．

如果利用余子式与代数余子式的关系及代数余子式的性质，也可如下计算

$$\sum M_{4j}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$
=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.
$$

### 综　　述

对于数字型行列式的计算主要是用按行、按列展开公式，但在展开之前往往先运用行列式性质对其作恒等变形，以期某行或某列有较多的零元素，这时再展开可减轻计算量．同时，也要注意一些特殊公式，如上(下)三角、范德蒙行列式、拉普拉斯展开式的运用．

虽然单独命的计算题并不多，但在特征值问题中有较多$|\lambda E-A|$型行列式的计算，在线性相关、矩阵可逆、$n$个未知数$n$个方程的齐次方程组、二次型的正定等问题中都会涉及到行列式的计算，因此，对行列式的计算要重视，不要因小失大．

## 二、抽象型行列式的计算

**10.(87,1,3分)**　设$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵为$\boldsymbol{A}^*$，且$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，则$|\boldsymbol{A}^*|=$

(A)$a$.　　(B)$\dfrac{1}{a}$.　　(C)$a^{n-1}$.　　(D)$a^n$.　　【　　】

**【分析】**　这是一个抽象行列式的计算．由伴随矩阵的基本关系式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

两端取行列式，并利用$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$及$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$有

$$|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^n.$$

因为$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，从而知$|\boldsymbol{A}^*|=a^{n-1}$．故应当选(C)．

**评注**　若$|\boldsymbol{A}|=0$，根据秩的关系式

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & 若\ r(\boldsymbol{A})=n,\\1, & 若\ r(\boldsymbol{A})=n-1,\\0, & 若\ r(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$$

知$r(\boldsymbol{A}^*)<n$，即有$|\boldsymbol{A}^*|=0$，亦可用$|\boldsymbol{A}|^{n-1}$表示．所以，不论$\boldsymbol{A}$是否可逆，均有

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}.$$

这是一个比较重要的关系式．

**11.(88,1,3分)**　设4阶矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$是4维列向量，且$|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=1$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$________．

**【分析】**　这是抽象行列式的计算．由于

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4),$$

从而$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|$

$$=8(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|)$$