

文都教育 考研精品系列

文都教育

2006

考研数学

必做主观题500题精析

最新版

主 审：蔡子华
主 编：曾祥金 樊启斌 汪成咏

MATHS

新华出版社

 文都教育

2006

考研数学必做主观题 500 题精析

主 审:蔡子华

主 编:曾祥金 樊启斌 汪成咏

策 划:文都考研信息中心

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学必做主观题 500 题精析/曾祥金,樊启斌,汪成咏主编,一北京:
新华出版社,2005.4

ISBN 7-5011-7048-7

I. 考... II. ①曾...②樊...③汪... III. 高等数学—研究生—入学
考试—解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028135 号

编 者:曾祥金 樊启斌 汪成咏

责任编辑:王子予 王兴旺

出版发行:新华出版社

地 址:北京石景山区京原路 8 号

邮政编码:100043

印 刷:北京长阳汇文印刷厂

开 本:787×1092 毫米 1/16

印 张:24

版 本:2005 年 4 月第 1 版 2005 年 4 月第 1 次印刷

印 数:1—5000 册

书 号:ISBN 7-5011-7048-7

定 价:30.00 元

前 言

全国硕士研究生入学数学统一考试是国家为招收硕士研究生而实施的具有选拔功能的水平考试。要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法。还要求考生具备抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

笔者从多年参与硕士研究生入学考试的数学试卷的阅卷经历中了解到,大多数考生的数学成绩并不理想。许多考生在对于并不十分困难的考题的解答中,往往由于最初几步的基本运算不过关,使得后面的运算或论证无以为继,导致得分率偏低。究其原因乃是由于考生的基本功不扎实、对数学的基本方法掌握不够、基本的运算能力不强所致。

为了帮助广大考生在复习中提高运算能力,提高综合分析问题和解决问题的能力,笔者从历年考研试题及各类教学参考书中精心挑选 500 道习题,给予详尽的分析和解答,而编成此书。

本书重点突出,例题的选择和编排典型、精到而合理,针对性强。

一是特别重视强化基本概念和基本理论的训练。对于考生难以掌握的一些重要概念和定理,特意安排了一定量的例题,从各个不同的侧面揭示出概念和定理的实质,加深考生对于基本概念和基本定理的理解。

二是特别重视加强基本的运算能力。通过安排大量典型的例子和对这些例题的详尽的分析和解答,揭示出种种运算规律和技巧,并适时地加以归纳和总结。其中有些方法在别的教参上难以见到,例如其中的几种:利用凑微分法求全微分的原函数,不用构造同解方程组而直接根据阶梯矩阵给出线性方程组的基础解系与特解等,这些方法既灵便又实用。

三是特别重视强化各种解题方法的综合运用。鉴于考生的数学建模能力的不足,特意就微分、积分的应用问题,微分方程的综合题等安排了足够多的例题。对于颇令考生有些为难的证明题、涉及微分中值定理的等式,也给予足够的关注,对证明的关键点都作了细致地分析。

在本书的编写过程中,北京交通大学的柳金甫教授负责概率统计部分的撰写,文都考研信息中心做了大量有益的工作,在此均表示衷心的感谢。由于时间仓促,错误和疏漏之处在所难免,诚请广大读者和专家批评和指正。

编 者

2005.3

目 录

第一部分 高等数学

第一章	函数、极限与连续	(1)
第二章	一元函数微分学	(23)
第三章	一元函数积分学	(54)
第四章	向量代数与空间解析几何	(87)
第五章	多元函数微分学	(93)
第六章	多元函数积分学	(110)
第七章	无穷级数	(140)
第八章	常微分方程	(160)

第二部分 线性代数

第一章	行列式	(181)
第二章	矩阵	(194)
第三章	向量	(211)
第四章	线性方程组	(228)
第五章	矩阵的特征值与特征向量	(247)
第六章	二次型	(265)

第三部分 概率论与数理统计

第一章	随机事件及概率	(275)
第二章	随机变量及其分布	(293)
第三章	随机向量的联合概率分布	(308)
第四章	随机变量的数字特征	(329)
第五章	大数定律和中心极限定理	(348)
第六章	数理统计的基本概念及抽样分布	(353)
第七章	参数估计与假设检验	(365)

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限与连续

【本章概述】

函数是高等数学的主要研究对象,它反映客观世界中变量与变量间的依存关系.极限是微积分理论的基础,连续、导数、定积分、重积分、线面积分的概念都建立在极限理论的基础之上.

【考试要求】

1. 理解函数概念,包括分段函数、复合函数、反函数、隐函数
2. 理解极限概念,掌握极限性质与四则运算法则、极限存在的两个准则
3. 掌握利用两个重要极限求极限的方法,掌握罗必达法则
4. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限
5. 理解连续性概念,会判断间断点的类型
6. 理解闭区间上连续函数的性质,并会运用这些性质

【重点、难点】

函数、极限、连续概念.综合运用极限的四则运算法则、无穷小的等价代换、罗必达法则求极限的计算方法.

【重要定义、定理、公式】

(一) 极限定义

[定义 1] 对于给定的数列 $\{a_n\}$ 及实数 a , 若对 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \epsilon$, 则称 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

[定义 2] 对给定函数 $f(x)$ 及数 A , 若对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 类似可定义 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

[定义 3] 对给定函数 $f(x)$ 及数 A , 若对 $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. 类似可定义 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

(二) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(三) 极限存在的判别准则

[定理 1](夹逼准则) 若 $\exists N > 0$, 当 $n \geq N$ 时, $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

[定理 2](夹逼准则) 若当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

[点评] 定理 2 对于其它极限过程也成立.

[定理 3](单调有界原理) 若数列 $\{a_n\}$ 单调且有界, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 必存在.

[定理 4](极限与单侧极限的关系) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在且相等, 其值等于 A .

[点评] 定理 4 也适用于 $x \rightarrow \infty$ 的情形. 定理 4 对于确定函数在分段点处的极限十分重要.

(四) 无穷小与无穷大

[定义 4] 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则称数列 $\{a_n\}$ $n \rightarrow \infty$ 时为无穷小. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

[定义 5](1) 若对于 $\forall M > 0$, $\exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时有 $|a_n| > M$, 则称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为无穷大.

(2) 若对于 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ ($\exists X > 0$), 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ ($|x| > X$) 时有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时的无穷大.

[定义 6] 设在同一极限过程中, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为无穷小

(1) 如果 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小.

(2) 如果 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(3) 如果 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小.

(4) 如果 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

(五) 重要的等价无穷小(当 $x \rightarrow 0$ 时)

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x; \arcsin x \sim x; \arctan x \sim x; \ln(1+x) \sim x;$$

$$e^x - 1 \sim x; a^x - 1 \sim x \ln a; (1+x)^a \sim ax; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

[定理 5](无穷小的等价代换) 若在同一极限过程中有等价的无穷小 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, 与 $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, 则

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

(六) 罗必达法则

设 $f(x)$, $g(x)$ 设同一极限过程中的无穷小(无穷大), 且 $f'(x)$, $g'(x)$ 存在. 如果 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \text{ 或 } \infty.$$

(七) 连续与间断

[定义 7](1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 连续. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$), 则称 $f(x)$ 在 x_0 左(右)连续.

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内有定义, x_0 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

[定理 6] $f(x)$ 在 x_0 连续当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 既左连续且右连续.

[可去间断点] 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无定义, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

[跳跃间断点] $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 可去间断点与跳跃间断点归为第一类间断点, 其特征是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在. 其余的间断点归为第二类间断点, 其特征是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少一个不存在. 特别地, 当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少一个为无穷大, 则 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

【常考题型】

- (一) 函数概念及其运算
- (二) 极限概念与性质
- (三) 综合运用无穷小的等价代换与罗必达法则计算极限
- (四) 数列的极限
- (五) 确定极限式中的参数
- (六) 连续与间断

(一) 函数概念及其运算

例 1 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ -x, & x \leq 1 \end{cases}$, 求 $f[g(x)]$, $f[f(x)]$, $g[f(x)]$ 与 $g[g(x)]$.

[分析] 本题考察分段函数的复合运算, 其关键是正确地作变量代换.

[详解] $f[g(x)] = \begin{cases} g^2(x), & \text{当 } g(x) > 1 \\ -g(x), & \text{当 } g(x) \leq 1 \end{cases}$,

由 $g(x)$ 的表达式可知, 对于 $\forall x \in (-\infty, \infty)$, $g(x) \geq 2$, 因此 $f[g(x)] = g^2(x)$, 故

$$f[g(x)] = \begin{cases} (2-x)^2, & x \leq 0 \\ (2+x)^2, & x > 0 \end{cases}$$

$$f[f(x)] = \begin{cases} f^2(x), & \text{当 } f(x) > 1 \\ -f(x), & \text{当 } f(x) \leq 1 \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的表达式可知, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \leq 1$; 而当 $x > 1$ 或 $x < -1$, $f(x) > 1$. 故

$$f[f(x)] = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1. \\ x^4, & x > 1 \end{cases}$$

同理

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-x, & x < 0 \\ 2+x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2+x^2, & x > 1 \end{cases} \quad g[g(x)] = \begin{cases} 4-x, & x \leq 0 \\ 4+x, & x > 0 \end{cases}$$

[点评] 求分段函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合 $f[g(x)]$ 的方法是: 先换元 ($x \rightarrow g(x)$), 形式地定出 $f[g(x)]$, 然后根据 $f(x)$ 的分段区间划分 $g(x)$ 的值域, 从而划分 $g(x)$ 的定义域, 最后再具体的计算化简.

例2 设 $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) (n \geq 2)$, 而 $f_1(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

[分析] 本题是利用递归关系求函数列的问题, 摸清基本规律, 归纳出 $f_n(x)$ 的公式.

[详解] 由直接的计算有

$$f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}, f_3(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}, f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}. \quad ①$$

对于 ① 观察归纳可得

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}. \quad ②$$

则由 ② 有

$$f_{n+1}(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+nx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}. \quad ③$$

由数学归纳法可知 ② 对于任意得自然数 n 成立.

例3 (1) 设 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{2x^4 + x^3 + x^2 - x + 2}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1}$, 求 $f\left(x + \frac{1}{x}\right)$,

(2) 设 $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 而 $f(\varphi(x)) = \sqrt{2+x-x^2}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域.

[分析] 题中没有直接给出 $f(x)$ 的表达式, 因此先求出 $f(x)$.

[详解] (1) 因

$$\frac{2x^4 + x^3 + x^2 - x + 2}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1} = \frac{2x^2 + x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{x^2 + 3x + 5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right) + 5}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) + 7},$$

所以由 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{2x^4 + x^3 + x^2 - x + 2}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1}$ 得 $f(x) = \frac{2x^2 + x + 5}{x^2 + 3x + 7}$. 故

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{2x^4 + x^3 + 9x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 1}.$$

(2) 令 $u = \varphi(x)$ 即 $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 则 $x + \sqrt{1+x^2} = e^u$, 从而 $1+x^2 = (e^u - x)^2$,

解得 $x = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = shu$. 因此 $f(x) = \sqrt{2 + shx - sh^2x}$. 欲函数有意义, 则 $2 + shx - sh^2x \geq 0$, 从而 $-1 \leq shx \leq 2$. 因此函数的定义域为 $[\ln(\sqrt{2}-1), \ln(2+\sqrt{5})]$.

例 4 (1) 设 $f(x) = e^{x^2}$, 而 $f[\varphi(x)] = 1-x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 的定义域. (88, 1)

(2) 设 $f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2}$ 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 求 $\int \varphi(x) dx$. (95, 2)

[分析] 题中没有直接给出 $\varphi(x)$ 的表达式, 因此关键在求出 $\varphi(x)$.

[详解] (1) 因为 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)}$, 由 $f[\varphi(x)] = 1-x$, 则 $\varphi^2(x) = \ln(1-x)$. 由于 $\varphi(x) \geq 0$, 故有 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$. 欲函数有意义, $\ln(1-x) \geq 0$, 从而 $x \leq 0$. 故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$.

(2) 令 $x^2-1 = u$, 则 $x^2 = u+1$, 从而 $f(u) = \ln \frac{u+1}{u-1}$. 因此, $f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}$. 由于 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 有 $\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x$, 解得 $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$. 因此

$$\int \varphi(x) dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) dx = x + 2\ln|x-1| + C.$$

[点评] (1) 对于已知 $\varphi(x)$ 及 $f[\varphi(x)] = g(x)$ 而求 $f(x)$ 的问题, 其步骤为: 一、作变量代换 $u = \varphi(x)$; 二、解出 $x = \varphi^{-1}(u)$; 三、求出 $f(u) = g[\varphi^{-1}(u)]$, 则就定出 $f(x)$.

(2) 已知 $f(x)$ 及 $f[\varphi(x)] = g(x)$ 而求 $\varphi(x)$ 的问题, 实质是由 $f(y) = g(x)$ 求隐函数 $y = \varphi(x)$ 的问题, 由方程 $f(y) = g(x)$ 解出 y 即可.

(二) 极限概念与性质

例 5 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 均不存在.

[分析] 精确计算 $\cos n$ 与 $\sin n$ 以及探究它们的变化规律很不容易, 证明就要充分利用三角函数的性质.

[证明] 用反证法. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n$ 存在, 其值为 A , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = A$. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n-1) = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1) = A. \quad ①$$

由 ① 推出

$$2\sin 1 \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(n-1) - \cos(n+1)] = A - A = 0.$$

从而推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0. \quad ②$$

由于 $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin 1 \cos n$, 从而由 ② 有

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2\sin 1} = 0. \quad ③$$

由 ② 与 ③ 推出

$$1 = \cos^2 n + \sin^2 n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos^2 n + \sin^2 n] = 0. \quad ④$$

矛盾. 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n$ 不存在. 同样的道理可证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 也不存在. 证毕.

例6 利用数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

[分析] 考虑 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$, 则不等式等价于 $n < (1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + \dots$. 若 $n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$, 则必有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$. 而由 $n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$ 推出 $n > \frac{2}{\epsilon^2} + 1$, 故可取 $N = \left[\frac{2}{\epsilon^2} + 1\right]$. 其中 $[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数.

[证明] 对于任意的正数 ϵ , 无论 ϵ 怎样小, 取一正整数 $N = \left[\frac{2}{\epsilon^2} + 1\right]$. 则当 $n > N$ 时, 有 $n > \frac{2}{\epsilon^2} + 1$, 从而 $n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$. 由此推出

$$1 \leq n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 < (1 + \epsilon)^n. \quad ①$$

因此由 ① 有 $1 \leq \sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon$, 即有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$. 由数列极限的定义可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 证毕.

例7 证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是对于任意满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0 (n \geq 1)$ 的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

[分析] 本题为抽象极限的证明, 利用极限的定义比较合适.

[证明] 必要性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则对于任意的正数 ϵ , 存在正数 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则对于上述给定的 $\delta > 0$, 存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$, 从而有 $|f(x_n) - A| < \epsilon$, 由数列极限的定义可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. 必要性得证.

充分性: 用反证法. 设对于任意满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0 (n \geq 1)$ 的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在或存在而不等于 A , 则存在一个正数 $\epsilon_0 > 0$, 使得对于任意的 $\delta > 0$ 都有点 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 及 $|f(x) - A| > \epsilon_0$. 于是对于任意的自然数 n , 存在 x_n 满足 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ 及 $|f(x_n) - A| > \epsilon_0$, 则得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$, 与假设矛盾. 充分性得证.

[点评] 本例的结论对于 $x \rightarrow \infty$ 的极限过程也成立. 它揭示出函数极限与数列极限之间的深刻联系, 也是利用函数极限方法计算某些数列极限的理论依据. 例如求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 若数列 x_n 为 n 的函数 $f(n)$ 或 $\frac{1}{n}$ 的函数 $f\left(\frac{1}{n}\right)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

可利用罗必达法则或其它方法计算.

例8 证明: $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ 及 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n (n = 1, 2, \dots)$.

[分析] 不等式涉及极限 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 且很精确, 故对极限的考察应比较精细

[证明] 首先由于数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调增加地收敛于 e , 因而

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, (n \geq 1). \quad ①$$

由牛顿二项定理可知对于 $x > 0$ 有 $(1+x)^n > 1+nx$. 故

$$\begin{aligned} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} (n+1) &= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} (n+1) > \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right)(n+1) \\ &= n+1 + \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} > n+2, \end{aligned}$$

即有 $(n+1)^{2n+3} > n^{n+1}(n+2)^{n+2}$. 因此

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}, (n = 1, 2, \dots). \quad ②$$

从而数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调下降地收敛于 e , 故 $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$. 因此

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n} < \frac{3}{n}, (n = 1, 2, \dots). \quad ③$$

故 $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} (n = 1, 2, \dots)$ 成立.

由等式

$$n! = \frac{n^n}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad ④$$

以及 $2 < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e (k = 1, 2, \dots)$ 有

$$2\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n, (n = 1, 2, \dots). \quad ⑤$$

从而例中第二个不等式也成立. 证毕.

例 9 求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

[分析] 当 $x \rightarrow 0$ 时, 因 $\sin \frac{1}{x}$ 有界, $x^2 \rightarrow 0$, 所以 $x^2 \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, (1) 为 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 因 $\sin x$

有界, 故 $x - \sin x$ 与 $x + \sin x$ 均为无穷大, (2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

[详解] (1) 因 $\sin \frac{1}{x}$ 有界, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \stackrel{\sin x \approx x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + 3 + x \sin \frac{1}{x}\right) = 3.$$

(2) 因 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 而 $\sin x$ 有界, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

[点评] (1)(2) 分别为 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式, 但不能用罗必达法则. 若对 (1) 用罗必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \xrightarrow{\text{罗必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 3 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}.$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 3 + 2x \sin \frac{1}{x}) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在, 因而 $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 3 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$ 不

存在, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 3 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 也不存在. 用罗必达法则导出 (1) 极限不存在, 显然错误. 若对 (2) 用罗必达法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \xrightarrow{\text{罗必达}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

令 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, 则 $f(2n\pi) = 0$, $f(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 (n = 1, 2, \dots)$, 因而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ 不存在. 用罗必达法则导出 (2) 极限不存在, 错误.

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} (97, 2)$

[分析] 若只保留高阶无穷大, 则分子相当于 $\sqrt{4x^2} + x = 2|x| + x = |x|$, 分母相当于 $|x|$, 因而极限为 1.

$$\begin{aligned} \text{[详解]} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^{-1} \sqrt{4x^2 + x - 1} + |x|^{-1} + |x|^{-1}}{|x|^{-1} \sqrt{x^2 + \sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} = 1. \end{aligned}$$

[点评] 当 $x \rightarrow x_0$ 时含 $\sin \frac{1}{x - x_0}$, $\cos \frac{1}{x - x_0}$ 的极限、当 $x \rightarrow \infty$ 时含 $\sin x$, $\cos x$ 的极限, 慎用或不用罗必达法则, 当用“无穷小乘有界量为无穷小”的结论.

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) (93, 2)$

[分析] 当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $\sqrt{x^2 + 100} = |x| \sqrt{1 + \frac{100}{x^2}} \sim |x| + \frac{100|x|}{2x^2} = -x - \frac{50}{x}$, 因此 $\sqrt{x^2 + 100} + x \sim -\frac{50}{x} \rightarrow 0$, 极限为 $0 \cdot \infty$ 型不定式.

$$\text{[详解]} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2 + 100} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-100}{\sqrt{1 + \frac{100}{x^2}} + 1} = -50.$$

例 12 求 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin 2x}{|x|} \right]$ 及 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right]$

[分析] 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, 因而 $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, 故 $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$; 而 $|x|$ 应视为分段函数, 因此先求单侧极限.

[详解] (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin 2x}{|x|} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{3e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}-1} + \frac{\sin 2x}{x} \right] = -1 + 2 = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin 2x}{|x|} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} - \frac{\sin 2x}{x} \right] = 3 - 2 = 1,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin 2x}{|x|} \right] = 1.$$

(2) 同理

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right] = 1.$$

[点评] 极限式内含绝对值或当 $x \rightarrow 0$ 时极限式内含 $e^{\frac{1}{x}}$ 、 $e^{-\frac{1}{x}}$, 先求左右极限. 本例中虽然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$

及 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{|x|}$ 都不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin 2x}{|x|} \right]$ 存在.

例 13 (03, 2) 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^2)}{x - \arcsin x}, & x < 0 \\ 6, & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{1}{4}x}, & x > 0 \end{cases}$$

问 a 为何值时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, a 为何值时 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

[分析] 连续与可去间断都蕴涵 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 的存在性.

[详解] 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $\ln(1+ax^3) \sim ax^3$, $\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \\ &\stackrel{\text{罗必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2} - 1} \sqrt{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} \sqrt{1-x^2} = -6a.$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\sin \frac{1}{4}x \sim \frac{1}{4}x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{\frac{1}{4}x^2} \xrightarrow{\text{罗必达}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{\frac{1}{2}x}$$

$$\xrightarrow{\text{罗必达}} 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (a^2 e^{ax} + 2) = 2a^2 + a.$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续或第一类间断, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 故 $2a^2 + 4 = -6a$, 得 $a = -1$ 或 $a = -2$.

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

当 $a = -2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0)$, $f(x)$ 在 $x=0$ 第一类间断.

[点评] 在分段点处求极限或考察连续性, 应先计算左、右极限, 后应用“极限与单侧极限的关系”得出极限存在与否的结论.

(三) 综合运用无穷小的等价代换与罗必达法则计算极限

例 14 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x^2}$.

[分析] 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x^2 \sim x^2$, 作等价无穷小代换简化计算

[详解]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow{\text{罗必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \xrightarrow{\text{罗必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

[点评] 利用泰勒公式 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, 有 $x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

因此更清楚地看出分子 $x - \sin x$ 为什么不宜作 $\sin x \sim x$ 的等价代换.

例 15 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\tan x} - a^{\sin x}}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)(1 - \cos x)}$.

[分析] 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $a^{\tan x - \sin x} - 1 \sim (\tan x - \sin x) \ln a$.

[详解] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\tan x} - a^{\sin x}}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^{\tan x - \sin x} - 1)a^{\sin x}}{\frac{1}{6}x^3} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \ln a$

$$\xrightarrow{\text{罗必达}} 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2} \ln a \xrightarrow{\text{罗必达}} 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sec^2 x \tan x + \sin x}{6x} \ln a = 3 \ln a.$$

例 16 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$.

[分析] 本题为 $\infty - \infty$ 型不定式, 先化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 再计算.

[详解]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \xrightarrow{\sin^2 x \sim x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \frac{\sin x + \cos x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \stackrel{\text{罗必达}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

[点评] 在分子上, $\sin^2 x \sim x^2$, 但不宜作等价代换. 若将 $\sin^2 x$ 代换为 x^2 , 则计算结果为 1, 是错误的. 有的同学会将分子上 $\cos^2 x$ 代换为 1, 计算结果则为 $-\frac{1}{3}$, 同样是错误的.

例 17 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

[分析] 直接用罗必达法则计算涉及幂指函数的求导, 不太容易, 因此先作无穷小的等价代换化简, 再计算.

[详解] $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, 从而当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1 \sim \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{x} e = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \stackrel{\text{罗必达}}{=} e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

[点评] 利用泰勒公式 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ 也可以算出极限值.

例 18 (04, 2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1}{x^3}$.

[分析] 与例 17 一样, 当先化简, 后计算.

[详解] 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1 \sim x \ln \frac{2+\cos x}{3} = x \ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3}\right) \sim x \frac{\cos x - 1}{3}$.

方法一:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \frac{2+\cos x}{3}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \frac{2+\cos x}{3}}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+\cos x) - \ln 3}{x^2} \stackrel{\text{罗必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例 19 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1 - \frac{x^2}{2}}{(1 - \sqrt[8]{1-x^2}) \ln \left(1 + \frac{2}{3}x\right)}$.

[分析] 解题的思路与例 17 类似.

[详解] 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \sqrt[3]{1-x^2} \sim \frac{1}{8}x^2$, $\ln\left(1 + \frac{2}{3}x\right) \sim \frac{2}{3}x$, 故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^3} \xrightarrow{\text{罗必达}} 12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{3x^2} \\ &\xrightarrow{\text{罗必达}} 12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{6x} \xrightarrow{\text{罗必达}} 12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x}{6} = 4.\end{aligned}$$

[点评] 不定式的计算通常在变形后化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 在计算 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式时, 宜将无穷小因子等价代换成形式简单的无穷小因子, 而极限非零的因子先行算出极限, 再利用罗必达法则, 达到有效地简化计算的目的. 但应注意在加、减的环境下, 慎作或无把握时不作无穷小的等价代换.

例 20 (03, 1) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

[分析] 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x \rightarrow 1$, $\ln(1+x^2) \rightarrow 0$, 因而极限是 1^∞ 型不定式.

[详解] 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$, 而当 $x \rightarrow 0$ 时 $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x^2) \sim x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \frac{1}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

故原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

[点评] 若 $\lim_{x \rightarrow \Delta} u(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \Delta} v(x) = \infty$, 并且 $\lim_{x \rightarrow \Delta} u(x)v(x) = k$, 则 $\lim_{x \rightarrow \Delta} (1+u(x))^{v(x)} = e^k$, 其中 $\Delta = x_0$ 或 ∞ . 因 $\lim_{x \rightarrow \Delta} (1+u(x))^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow \Delta} e^{v(x)\ln(1+u(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow \Delta} v(x)\ln(1+u(x))}$, 而 $\lim_{x \rightarrow \Delta} v(x)\ln(1+u(x)) = \lim_{x \rightarrow \Delta} u(x)v(x) = k$. 本例中 $u(x) = \cos x - 1$, $v(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$.

例 21 (93, 1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$.

[分析] 本题为 1^∞ 型不定式, 当用例 20 的方法计算.

[详解] $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1\right)\right)^x$. 因

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1\right)x \xrightarrow{t=x^{-1}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t} \xrightarrow{\text{罗必达}} \lim_{t \rightarrow 0} (2\cos 2t - \sin t) = 2.$$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x = e^2$.

例 22 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

[分析] 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\arcsin x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$, 极限为 1^∞ 型不定式.

[详解] 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\arcsin x - x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 而