中国数学史论文集

（三）

吴文俊 主编

山东教育出版社

中国数学史论文集

（三）

吴文俊 主编

中国数学史论文集

（三）

吴 文 俊 主编

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂德州厂印刷

*

787×1092毫米16开本 10.125印张 3插页 214千字

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数 1—480

ISBN 7-5328-0109-8

G·66

书号 7275·070 定价 2.30 元

前　言

本集共收入十四篇学术论文，这里不仅发表了关于中国古代数学的研究论文，也发表了中国近现代数学的研究论文，还发表了外国数学史和中外比较数学史方面的研究论文。在这十四篇论文中，有十三篇是在各种学术会议上宣读过的论文，经作者修改后，发表在这里。另一篇，是吴文俊先生于1986年7月在美国加州大学伯克莱分校召开的国际数学家大会（ICM86）上应邀向4000名数学家所作的演讲稿，原稿是用英文写成的，今译为中文，发表在这里，以飨读者。

编　者

一九八七年五月

目　录

近年来中国数学史的研究*

吴 文 俊

一、绪 论

本文的讨论限于对从远古时代至公元十四世纪的中国古代数学的研究。近年来，国内外学者对中国古代数学的研究已经蓬勃开展起来，对中国古代数学所取得的成就有了更深刻的认识。笔者在此将随意引用其中一些成果，对文中所表述的观点，概由笔者本人负责。

在中国古代数学史研究中，有两条需要严格遵守的原则，即：

原则一：所有研究结论应该在幸存至今的原著基础上得出。

原则二：所有结论应该利用古人当时的知识、辅助工具和惯用的推理方法得出。

本文将引用下列著作：

《九章算术》，成书于公元一世纪。

《九章算术注》，刘徽著，成书于公元263年。

《海岛算经》，刘徽著，成书于公元263年。

《数书九章》，秦九韶著，成书于公元1247年。

就原则二来说，因为中国古代数学中没有使用代数符号演算和添加平行线证明几何题的传统，所以我们强调应该在代数和几何的推理中禁止使用诸如此类的“现代”方法。中国古代数学独立于古希腊数学和作为其延续的西方数学，有着自身发展的清晰主线，其发展过程、思考方法和表达风格亦与西方数学迥然不同。笔者在开始对中国古代数学成就进行叙述之前，首先在此指出中国古代数学的一些特点。

第一，古代中国人没有用纸笔作为计算工具，而是在算板上用算筹进行一切计算。为了使算筹运算成为可能，早在远古时期，我们祖先已经使用了十分完善的十进位位值制。只要把筹摆在板上的适当位置即可准确表示一个整数，特别地，十进整数中的零和零本身都通过在相应位置上空位表示。事实上，我国古代把数学称作“算术”，正好反映了这种计算的方法。

*本文是1986年7月在美国加州大学伯克莱分校召开的数学家大会（ICM86）上特邀讲演的讲稿之译稿。

第二，结果通常是由独立问题的形式来表示。每个问题由以下条目构成：(一)叙述具体数值的问题；(二)问题的数值解答；(三)术文，叙述获得结果所用的方法，在大多数场合相当于现在的“算法”，但有时也相当于现今的公式或定理。值得注意的是，(一)中的具体数值，在术文中并不起特殊作用，以其他数值代入运算也同样成立，因此，术文是一般方法，条目(一)中的具体数值只是作为举例说明之用。(四)有时有“注”或“按”，解释术文所依据的理论。宋代以后的算书中，常会有条目(五)演草，抄录获得最终结果所进行运算的详细步骤。

二、关于整数理论的研究

本部分整数系指正整数。

在中国古代数学中，未曾出现素数、因数分解等概念，但是发明了求两整数的最大公因数的方法——更相减损术。其算法如下：

“以少减多，更相减损，求其等也。”

在中国古代数学中，将最大公因数称作“等”。

举个简单的例子，用更相减损术求得24和15的最大公因数是3，其步骤如下：

$$(24,15)\longrightarrow(9,15)\longrightarrow(9,6)\longrightarrow(3,6)\longrightarrow(3,3)。\qquad(1)$$

正如刘徽在《九章算术注》中所说：“其所以相减者，皆等数之重叠。”此术所依据的原理是在更相减损过程中整数值逐渐变小，而最大公因数不变。

中国古代虽然未出现过素数概念，但却从不同于西方数学的角度对整数理论进行了相当广泛和深入的的研究。我们将引用南京大学莫绍揆和西北大学李继闵的两项研究工作。

在中国古代数学发展的漫长过程中，勾股形一直是数学家们研究的偏爱对象。特别是勾、股、弦三边长度所组成的三重整数组已经完全可以确定。例如经典算书《九章算书》“勾股”章中就出现了以下八个三重数组：(3，4，5)，(5，12，13)，(7，24，25)，(8，15，17)，(20，21，29)，(20，99，101)，(48，55，73)，(60，91，109)。这些三重数组的出现不是偶然的，在勾股章第十四问中已隐含给出这种数组的一般组成形式。今将此题照录如下：

今有二人同所立，甲行率七，乙行率三。乙东行。甲南行十步而邪东北与乙会。问甲乙行各几何。”

术文为：“令七自乘，三亦自乘，并而半之，以为甲斜行率。斜行率减于七自乘，余为南行率。以三乘七为乙东行率。”

如前所述，数字7和3仅起举例说明的作用，可以用满足$m>n>0$的任意数对m、 n替换它们。术文所说就是三边成这样的比例：

$$勾：股：弦=\left[m^2-\frac{m^2+n^2}{2}\right]:mn:\frac{m^2+n^2}{2}。$$

上述八个三重数组就可以用下数对来决定：$(m, n)=(2,1)$，$(3,2)$，$(4,3)$，$(4,1)$，$(5,2)$，$(10,1)$，$(8,3)$，$(10,3)$。

刘徽在《九章算术注》中，依据出入相补原理对此问作了几何证明。本文第三部分将详细讨论出入相补原理。刘徽的证明表明m：n即股弦和与勾之比当且仅当勾股弦的长度成一个整数比时，m：n是一个整数比。因此，利用术文所给的方法，可以列出由勾股弦长度所组成的详尽数表。

中国古代数学中对整数理论研究的第二个例子是大衍求一术，即著名的中国剩余定理。最近的研究表明大衍求一术算法来源于汉代以来的历法计算，直到公元1247年秦九韶《数书九章》的问世，有一条相当清晰的发展路线。秦九韶在书的序言中指出："独大衍法不载《九章》，未有能推之者，历家演法颇用之。"秦九韶第一次系统地解释了大衍求一术算法。《数书九章》卷一、二共九问，内容有历法计算，修筑河堤，计算财物，租税分配，出售谷物，计点军队，土木建筑，甚至还有一个盗窃案例。如果使用现代符号表示，那么所有问题都可归结为以下形式：

$$u\equiv u_j(\bmod M_j),\quad 1\leqslant j\leqslant r。\tag{2}$$

其中u_j、M_j已知。秦九韶称模M_j为定母（不必两两互素），秦给出一种方法，可以反复运用更相减损术把定母化为两两互素，因此这里只考虑模M_j两两互素的情况。

在现代数学中这一问题可以这样解决：

令$Ph_j(N)$表示整数N的欧拉函数，此函数可以将N进行素因数分解得到。

令$M=M_1\cdot M_2\cdot\cdots Mr$，

$$N_j=\left(\frac{M}{M_j}\right)^{Ph_j(N_j)},\qquad 1\leqslant j\leqslant r,\tag{3}$$

则(2)的解为

$$u\equiv\sum_j(u_j\cdot N_j)(\bmod M)。$$

读者可以参看Knuth：Art of Computer Programming卷2第250页。

(3)的方法和结果似乎很简洁漂亮，然而用此法计算秦九韶的九个问题，即使有现代计算机辅助，得到最终结果也是相当困难的。

现在，我们介绍秦九韶的解法。

第一步，令R_j为$\frac{M}{M_j}$模M_j后的余数，称为奇数，决定K_j，使之满足，

$$K_j\cdot R_j\equiv 1\ (\bmod M_j)。\tag{4}$$

最后结果：$u\equiv\sum_{j}\left(u_{j}\cdot k_{j}\cdot\frac{M}{M_{j}}\right)\pmod{M}$ 。　　　　（5）

K_j称为乘率，求K_j满足（4）的算法被秦氏称为大衍求一术。此术的第一步是将四个已知数1、0（留作空白）、R_j和M_j分别放在正方形左上角(LU)，左下角(LL)，右上角(RU)，右下角(RL)：

$$\boxed{\begin{array}{cc} LU & RU \\ LL & RL \end{array}} = \boxed{\begin{array}{cc} 1 & R_j \\ & M_j \end{array}}$$

这四个数满足下列同余式：

$LU\cdot R_j\equiv RU \pmod{M_j}$，

$LL\cdot R_j\equiv -RL \pmod{M_j}$。　　　　（6）

算法第二步是对正方形四个数进行一定的运算，不断减小右方的数值，但保持同余式（6）的成立。经过有限次运算后，右上角的数值将减小为1，由（6）知左上角的数值就是所求的乘率K_j。通过下面对算法的详细叙述，读者不难看出，大衍求一术所依据的原理本质是与求两数最大公因数的更相减损术相同，只不过大衍求一术比更相减损术复杂得多罢了。求乘率的算法如下：

“以奇为右上，定母为右下，立天元一于左上。先以右行上下两位以少减多，所得商数，乃递互乘内左行，使右上得一而止。左上为乘率。”

今以秦书第九问为例。这是一个盗窃问题。负责此案的官员使用这种算法，就可判断出三个盗贼每人所窃的稻谷数量。计算其中一盗贼所窃物时，其相应乘率：

$$\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 14 \\ & 19 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 14 \\ & 5 \end{array}} \xrightarrow{1} \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 14 \\ 1 & 5 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{array}}$$

$$\xrightarrow{2} \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}}$$

$$\xrightarrow{3} \boxed{\begin{array}{cc} 15 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}} \longrightarrow$$ 停止，$K=15$。

读者可将这一过程与（1）的计算过程作一番比较，便不难体会大衍求一术与更相减损术的异同之处。

此例的数值是秦书九问中最简单的，但若用（3）的方法计算则不是一桩易事。另有三问中出现了庞大的天文数字，如用（3）的方法最终将鞭长莫及，但秦九韶用大衍求一

术轻松地解决了这九个问题。

三、几　　何

通常认为，中国古代没有几何学。事实上却不是这样，中国古代在几何学上取得了极其辉煌的成就。人们的误解可能是因为中国古代几何学在内容和形式上都与欧几里得几何迥然不同的缘故。这种不同表现在以下几方面：

第一，中国古代几何没有采用定义——公理——定理——证明这种欧氏演绎系统，取公理而代之的是几条简洁明了的原理，在此基础上推导出各种不同的几何结果，刘徽在《九章算术注》中就是这样做的。

第二，中国古代几何与欧氏几何研究的侧重点不同。我们祖先对直线的垂直性感兴趣，而欧氏几何重视平行性的研究。在中国古代数学数千年的发展过程中，勾股形在几何研究中始终占据着主要地位。其次，古代中国人对角缺乏兴趣，重视对距离的研究，而欧氏几何则把角的研究放在重要地位。

第三，中国古代几何学总是与应用问题紧密相联，测量、面积和体积的研究占据了研究的中心地位。

第四，中国古代的几何总是与代数互相渗透，具有几何代数化的特点。中国古代数学的几何代数化在宋元时期达到了顶峰。李约瑟指出，几何代数化是解析几何产生的前奏曲（也是关键的一步）。

我们用下面几例来进一步阐述这些观点。

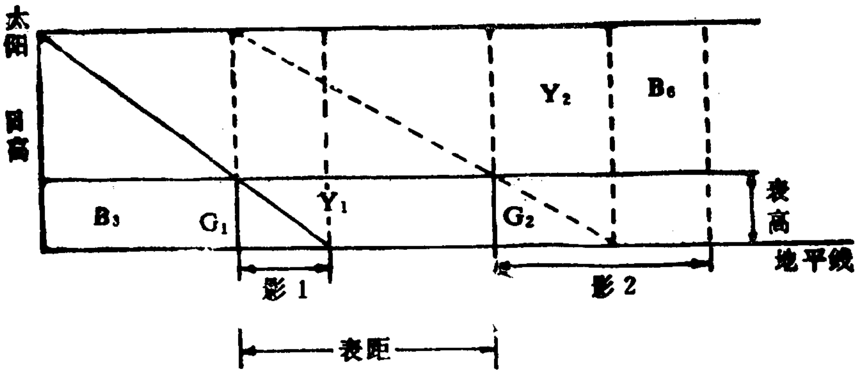
例1　日高术

“立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景。以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高即日去地也。”即

$$\text{日高}=\frac{\text{表高}\times\text{表面}}{\text{影差}}+\text{表高}。$$

在汉代的一些著作中已出现了这个公式，后来的历法书中也常引用它计算日高。显然，这个公式估值过于粗糙而实际上不能使用。刘徽用海岛代替日高术中的太阳，将日高术改造成为海岛公式，成为一个地面测量实际可行的精确公式。《海岛算经》包含九个类似公式，上面这个公式是第一个，也是最简单的。古代对这个古老公式曾有证明及附图，宋代书中记载了这一事实，以后便失传了。笔者根据三世纪赵爽所作的证明片断和残缺不全的彩图，按照逻辑顺序重排了语句，作出了日高术及海岛公式的证明。下图中Y代表黄色，B代表青色。

“黄甲（Y_1）与黄乙（Y_2）其实相等。黄甲与青丙（B_3）相连，黄与青己（B_6）

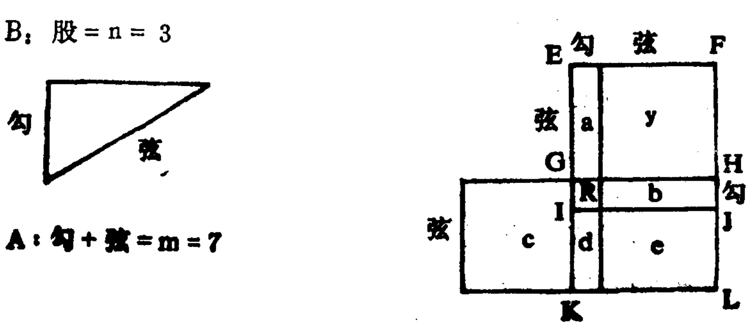


相连，其实亦等。青丙与青己其实亦等。以表高乘表相与为黄甲之实。以影差为黄乙之广而一，所得则变为黄乙之袤。上与日齐，按图当加表高。”

参看附图，证明是很清楚的。

例2 出入相补原理

例 1 中的面积相等关系是运用出入相补原理得出的。在经典著作《九章算术》中可以看出出入相补原理已经形成，并用简洁的语言清楚地表达出来。出入相补原理的含义为，一个平面或立体的图形被分割成几部分后，面积或体积的总和保持不变。这个简单的原理被古人成功地运用，解决了各种各样的复杂问题，有时问题解决的十分巧妙，例 1 仅是其中一例。仍以勾股形的三边为例。这三边可以形成几种和与差，例如勾股和、股弦差等等，连同三边有九个数。在《九章算术》勾股章中，有许多问题是已知这九个数中的两个利用出入相补原理求勾、股、弦。如第十四问已知勾弦和与股的比值，可得出整勾股数的一般公式，如同第二部分中已给出的公式。刘徽用出入相补原理证明了这一结果，如下图所示（R表示红色，Y表示黄色）：



$c+d=弦^2-勾^2=d+e=股^2=n^2$，

$2EFGH=EFKL=m^2+n^2=(勾+弦)^2+股^2$，

$$a + Y = 弦 \cdot m = 弦 \cdot （勾 + 弦），$$

$$b + R = EFIJ - EFGH = 勾 \cdot m = 勾 \cdot （勾 + 弦） = m^2 - \frac{m^2 + n^2}{2}。$$

在《数书九章》中有一个已知三角形三边求三角形面积的公式：

$$4 \cdot 三角形面积^2 = 短边^2 \cdot 长边^2 - \left(\frac{长边^2 + 短边^2 - 中边^2}{2}\right)^2。$$

这公式显然与海伦公式等价。以公式的繁琐与海伦公式的简洁比较，肯定此公式不是由海伦公式得出来的。笔者按照中国古代数学的传统风格，应用《九章算术》中基于出入相补原理的一些公式，重新构造了一个证明，可以很自然地得到秦九韶的公式。

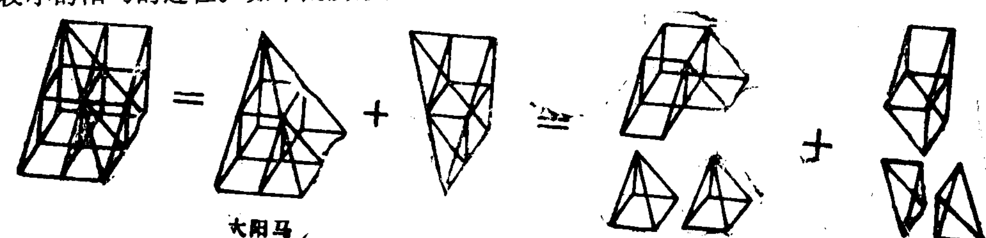
出入相补原理事实上也是中国古代求平方根或立方根方法和二次方程解法的基础，因而中国古代代数的本质是具有几何性的。用出入相补原理可以很自然地得出《海岛算经》中的所有复杂公式，但是如果用欧氏几何的方法推导这些公式就很困难，至少会使人有不自然的感觉。

例3 立体体积

运用出入相补原理可以决定多边形的面积，但不能决定所有多面体的体积。刘徽意识到这一点，并出色地解决了这个问题。斜解正方体成两个相等部分，叫做壍堵。斜解壍堵成两部分，其中锥形部分叫阳马，另一个四面体叫鳖臑。刘徽运用极限以清晰的逻辑推理过程，得出了结论，笔者将其命名为刘徽原理。

“阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。”

用刘徽原理和出入相补原理，可以求出任何多面体的体积。《九章算术》商功章的许多公式便是这样得出的。在刘徽对其原理的简洁严密的证明中，有将一个大壍堵分割为较小的阳马的过程。如下图所示：



大壍堵　　大阳马　　大鳖臑

从图中可以看出

一个大阳马－两个大鳖臑＝2（一个小阳马－两个小鳖臑）。

继续分割，则右边越来越小，最终可以忽略不计。正如刘徽所说：

“半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉。”

对阳马术的更详细的论述可参看Wagner的一篇出色论文，发表于Historia Math.6(1979)，P169—188。

刘徽还研究了曲面体求积问题，其中有著名的球体积问题。他得出的结论是：球的体积依赖于一个奇特的立体的体积，这个立体是一个立方体的两个内切圆柱的公共部分。刘徽不仅思维精密而且态度严肃，他自己虽然未能解决这个问题，但把这个问题留给后人。他说："欲陋形指意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者。"

公元五世纪，大数学家、天文学家和工程学家祖冲之的儿子祖暅，继续了刘徽的工作，终于得到了最后结果。祖暅发现了一条原理，等价于后来重新发现的Caralieri 原理，即

"缘幂势既同，则积不容异。"

在此不准备用较多篇幅叙述祖暅球体积公式的精采证明。刘徽虽然没有明确提出这一原理，但他在多种简单曲面体体积的推导中确实使用了这一原理。有鉴于此，笔者倡议以"刘祖原理"取代我们中国学者常用的"祖暅原理"的命名。

总而言之，古代中国人以令人陶醉的方式运用出入相补原理、刘徽原理和刘祖原理，这些原理已足以建立起立体——无论是否曲面体——的整个体积理论。

四、代　　数

代数无疑是中国古代数学中最发达的部门。应该指出，中国古代的代数实际上是方程解法的同义语。探究方程源流，可以发现方程问题是由两个不同方面发展而来的。其一是远古时期的物物交换导致的盈不足术发展而成方程术。《九章算术》的方程章叙述了联立线性方程组的解法，这时引入了负数概念。刘徽在注文中说："并引为行，故谓之方程。"因而可以这样解释："方程"的"方"即是正方形或矩形，"程"是将数字以矩阵形式排列在算板上。

《九章算术》所给出的解联立线性方程组的解法，是进行行列之间的运算，类似于今天的消去法。在刘徽注中还可以看到将数字矩阵变为标准形的详细过程。

方程的第二个来源是测量和几何问题。在求太阳高度时，产生了日高公式和太阳距观测者水平距离的公式。太阳与观测者的距离是利用勾股定理和开平方运算得出的。勾股定理和开平方法的证明都可用出入相补原理推出。《九章算术》第九章中有一问由出入相补原理自然导出了一个二次方程，并将解法命名为"带从开平方法"，这一名称不仅揭示了解此类方程的方法，而且也显露了其根源。

唐朝初年，我国已有了三次方程解法，宋代高次方程的数值解法发展到了高峰，这时的解法与1819年霍纳发明的方法本质上完全相同。

宋元时期（十至十四世纪）最重要的数学成就是天元概念的引进。天元相当于今天的未知数。尽管在数千年的数学历史发展中，方程解法始终占据着中心地位，但是直到宋元时期才第一次引进未知数的清晰概念和使用系统的方程解法。当时的数学家已认识

到了天元术的巨大作用。朱世杰在其著作中写道："今以天元演之，明源活法，省功数倍。"

这一时期，天元术不断发展，最终产生了四个未知数的高次联立方程组的解法，几何代数化、多项式运算和消去法也随之得到了发展。方程发展的两条主线到此时合二为一，解方程的理论更接近现代代数的有关内容。由于当时所有的运算要在算板上进行，多项式不同类项的系数要摆在板上的不同位置，这就将未知数的个数限制为最多是 4 。在当时与外部世界如阿拉伯的交流日益加强的情况下，如果放弃算板而采用其他系统，数学将面临一个空前繁荣的时代。但事与愿违，由于种种原因，到元朝末年，深入的研究工作停止了，数学处于停滞不前的境地。当明末利玛窦到中国时，几乎没有一个中国高级知识分子懂得《九章算术》！

五、结束语

本文因篇幅所限，不讨论极限概念、高阶内差公式和级数求和等成就。简而言之，中国古代数学的大多数成就具有构造性、算法化和机械化的性质，因此大多数的"术"可以无困难地转化为程序用计算机来实现。中国古代数学家善于从简明的事实得出深刻的结论，并总结成简洁的原理。正是这些简单易明、而应用广泛的原理，形成了中国古代数学的独特风格。中国古代数学的研究方法是从研究具体问题入手，从中提出简单明了的原理和一般方法。代数化和十进位位值制这样杰出的成就也是在这种思想的指导下取得的。总之，中国古代数学有其自身的长处，当然也有传统的不足。我们既不能象明先祖们那样妄自菲薄，漠视我们祖先所取得的成就，亦不可仿效唐人，妄自尊大，拒绝接受外国的先进技术。只要我们充分认识我们传统思想方法的威力，同时吸收外国的先进科学技术，可以预见中国数学将进入一个辉煌灿烂的新时代。

（高素娟译）

中国数学史中的未解决问题

李　迪

中国数学史的研究，从“五四”运动前后开始算起，到现在差不多有将近70年的历史，由于中外学者的努力取得了许多重要成果，解决了一些难题。但是中国数学史和其它学科一样，至今尚未解决的问题还很多。这些问题的彻底解决，将有助于中国数学史的发展。

中国数学史中到底有多少未解决的问题？很难回答。本文列出的仅是经过初步选择的50个问题，供研究者参考。这些问题，分属于七个方面。

一、数学工具及其有关问题

1.中国最早的计（或记）数实物。人类最早的计数工具，一般说有两种，即结绳与刻契。前者不易长期保存，没有最早的实物流传到现在；后者较好保存，目前见到的有四千年前带刻口的骨片、一万多年前的“山顶洞人”的刻符骨管等[1]，这不可能是最早的计数工具。实际上，时代还可往上推，推到何时，是个问题。至于记数实物，有山西朔县出土的两万多年前骨片上刻的道道，被认为是数目，陕西半坡出土的六千年前的陶片上有点点，也有记数的意义，是否最早呢？无法断定。

2.筹算的起源。中国历史上长期用筹进行计算，沈康身认为“我国大约从西周开始已使用竹筹在毡毯上或在算板上进行各种运算。”[2]李迪认为“算筹是长期演变而成的，至迟在西汉时已普遍使用”，未说起源于何时[3]。李俨和杜石然说：“至迟在春秋战国的时候，人们已经可以熟练地运用算筹来进行计算了。”[4]还有其他主张。

3.是否有专用的筹算板。过去严敦杰曾专门讨论过筹算板问题，没有得到明确结论[5]，沈康身认为有，但证据不够充分。至今没有发现实物，也没有找到确切的文字记载，但由此而否定也过于武断。

4.中国传统规、矩的样子和用法。“规矩”一词在历史上用的很多，但没有详细说明过它们的样子和用法。在一些汉代的壁画上有形象图，不太清楚，明代《三才图会》中有规、矩图形，李迪认为我国古代有一种在长竹片上打孔插笔的圆规[6]。

5.《数术记遗》中的算具及其　　　《数术记遗》中记有3种算具，人们对其看法

和评价相差较远。钱宝琮等认为：这是“杜撰的方法不是从实践中产生出来的，也不能应用到计算工作中去，因而在后世数学的进展中没有起任何作用。”[7]李培业则持不同的见解，并对3种算具的算法进行了研究[8]。

6.《数术记遗》的作者和真伪。现传《数术记遗》卷首题“汉徐岳撰，北周汉中郡守前司隶臣甄鸾注”，南宋刻本徐岳前无“汉”字。钱宝琮认为此书决不是徐岳的著作，而是甄鸾依托徐岳伪造的书[9]。在此之前，李俨认为：“相传会稽刘洪因述天目先生之语，徐岳为成数术记遗一卷。”[10]虽然语句有些含糊，但并没说不是徐岳所撰。李迪则提出：《数术记遗》“是否伪书，尚待研究”[11]。就是说钱氏认为该书作者为甄鸾而非徐岳，李俨认为可能是徐岳，李迪未下结论。姜克华明确提出是徐岳而非甄鸾，并对钱氏论点进行了批驳[12]。宛吉善发表过一篇对该书的真伪和评价的文章[13]，笔者未见，不知他持何见解。周全中的看法与姜克华相近。

7.《谢察微算经》的真伪和价值。原书早佚，仅在清代的《古今图书集成》中收有片断，在宋刻《张邱建算经》“百鸡”问题之末添入了“算学教授并谢察微拟立术算”。片断中提到与现代形式相同的珠算盘的记载，因此从算具的角度应对此书进行研究。但是数学史家们如李俨、钱宝琮、沈康身、李迪等在著作中基本上都未提此书，显然对其评价是低的。笔者对此书的看法有所改变，认为它不可能是伪书，而是有较高水平的书。

8.珠算的起源。这是一个争论已久的问题，参与争论的人很多，有中国人也有日本人，西方人同样有涉及。关于起源的时间，观点相差甚远，上至汉代下迄元明。日人户谷清一根据周原遗址出土的陶丸推断，“在柱上串一个珠，根据该珠的移动位置来表示数的太一算和根据珠的集合来表示数的‘陶丸’的这两种方法结合起来的算法，可以认为是《数术记遗》中记载的珠算”[14]，似乎把中国珠算的起源推到了西周。余介石、华印椿、殷长生和李培业等都主唐代说[15]。梅荣照主宋代说[16]。L.C.Goodrich在约四十年前说十五世纪在中国普及算盘[17]。铃木久男、李书田（译音，Li Shu-Tien）O.Becker and J.E.Hofmann等都讨论过这个问题。现就目前情况看，明代说已被推翻。近年来，人们常引用的《新编对相四言》也从1436年上推到1371年的《魁本对相四言》，这是元朝灭亡后的第四年。最近程贞一（Joseph C.Y.Chen）认为原本《对相四言》应出于宋代[18]。还有中国珠算西来说与自创说之争，《数术记遗》中“珠算”的复原问题也是众说纷纭。

二、《九章算术》和它的注释者刘徽

1.《九章算术》的成书时代和作者。几年前，李迪曾详细讲述了这个问题[19]，不再重述。

2.《九章算术》的造术方法。《九章算术》中的术文相当于现代的定理或公式，但是都没有证明。当时是怎么建立起来的（造术）一直没有人认真研究过这个重大问题，只在一些著作中有零星的讨论，如别列兹金娜（Э.И.Березкина）[20]、李继闵[21]、吴文俊[22]、白尚恕[23]等都有涉及。1985年8月在第二届全国数学史年会上，一些年轻人提出了这方面的一批专门论文，有的到现在还在研究。目前离彻底解决，尚有一段很大的距离。

3.《九章算术》写作体例形成的原因。《九章算术》把246道数学问题分类编排在九卷里，与《几何原本》按形式逻辑的编法完全不同。这个问题至今没有人有意识地讨论过。

4.负数、零的概念和割圆术的起源。对于这三个问题，国内外学者大都有相近的看法，特别是负数和割圆术的起源较为一致，即负数起源于《九章算术》，割圆术为刘徽所创。李迪认为与数字相联系的“负”字是负数的“负”的起源，而且列于《九章算术》之前[24]。对割圆术的提出者李迪认为是赵君卿，并认为赵在刘徽之前[25]。K.L.Biernatzki则认为割圆术起源于《周髀算经》[26]。至于零的概念，严敦杰讨论过“零之由来”。最早的资料提到祖冲之《大明历》中以“初”字表零[27]，这只是从符号的角度考虑的，不能理解为是关于零概念的起源的主张。沈康身根据刘徽对“无入”的解释（“无入”“为无对也，无所得以减……”）得出“可见无入就是零”[28]。

5.新发现的竹简书《算数书》与《九章算术》的关系，它为什么在历史上没有记载？这是一个新出现的问题。1984年在湖北江陵张家山出土的汉简中有一部《算数书》，时代在西汉早期[29]，肯定在《九章算术》之前，其中有的题目内容和数据与《九章算术》中的完全一样[30]。两书肯定存在密切关系，但这种关系达到怎样程度，还不得而知。奇怪的是这部数学书在历史文献上没有任何记载，是什么原因呢？是一个值得探讨的问题。

6.刘徽到底求出几个圆周率值？可以肯定地说他求得了$\frac{157}{50}$，问题在于$\frac{3927}{1250}$是否为刘徽所求得。有些人认为是刘徽，有些人认为是祖冲之，几十年来迄无结果。最近又有人提出一新看法，即$\frac{3927}{1250}$可能在刘徽以前就有了[31]。

7.刘徽的籍贯与生平事迹。刘徽做为我国历史上最伟大的数学家之一，应当对其生平事迹有所了解。可是到目前为止，所知甚少。严敦杰“考得徽系淄人”[32]，后来又改为“还是以不可考为好”[33]。励乃骥以为刘徽系南北朝时刘休之祖，曾官正员郎，肖而广也有相近之看法[34]。多数人都认为刘徽为三国时魏人[35—37]，李迪认为刘徽是山东人[35]。