海外优秀数学类教材系列丛书

PEARSON
Addison Wesley

翻译版

# A History of Mathematics

## An Introduction

(Second Edition)

# 数学史通论（第2版）

□ VICTOR J. KATZ
□ 李文林 邹建成 胥鸣伟 等译
□ 胥鸣伟 李文林 校

高等教育出版社
Higher Education Press

海外优秀数学类教材系列丛书

翻译版

# A History of Mathematics
## An Introduction
### (Second Edition)

# 数学史通论（第2版）


□ VICTOR J.KATZ

□ 李文林 邹建成 胥鸣伟
杨宝珊 刘建军 李培廉
刘向晖 吴发恩 袁 敏
王 辉 郑 权 杨浩菊 译

□ 胥鸣伟 李文林 校



高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01－2001－2249号

VICTOR J. KATZ

A History of Mathematics: An Introduction, 2e

ISBN: 0－321－01618－1



**图书在版编目（CIP）数据**

数学史通论 / （美）卡茨（Katz,V.J.）著；李文林等译. —2版. —北京：高等教育出版社，2004

书名原文：A History of Mathematics：An Introduction，2e

ISBN 7-04-014253-8

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①卡…②李…　Ⅲ. 数学史　Ⅳ. 011

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第002142号

**责任编辑**：赵天夫、徐　可　**封面设计**：王凌波　**版式设计**：杨　明　**责任印制**：陈伟光

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-64054588 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-82028899 | | http://www.hep.com.cn |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　　刷 | 涿州市星河印刷厂 | | |
| | | 版　　次 | 1980年10月第1版 |
| 开　　本 | 850×1168　1/16 | | 2004年2月第2版 |
| 印　　张 | 43 | 印　　次 | 2004年2月第1次印刷 |
| 字　　数 | 1140000 | 定　　价 | 52.00元 |

# 序　　言

## 处理方法和指导思想

美国数学协会(MAA)下属教师数学教育委员会在其《呼唤变革:关于数学教师的数学修养的建议书》中,提议所有未来中小学数学教师

> 注意培养自身对各种文化在数学思想的成长与发展过程中所作的贡献有一定的鉴赏能力;对来自各种不同文化的个人(无论男女)在古代、近代和现代数学论题的发展上所作的贡献有所研究;并对中小学数学中主要概念的历史发展有所认识.

根据 MAA 的观点,数学史方面的知识能向学生表明,数学是一项非常重要的人类活动.数学不是一产生就像我们教科书中那样完美的形式,它常常是出于解决问题的需要,以一种直观的和实验性的形式发展出来的.数学思想的实际发展历程能有效地被用来激励和启迪今天的学生.

这本新的数学史教科书是基于这样一种认识产生的,就是,不仅未来的中小数学教师,即便是未来的大学数学教师,为了更有效地给他们的学生教好这门课,都需要对历史背景有所了解.因此这本书是为那些主修数学、今后打算在大学或高中任教的低年级或高年级的学生设计的,所以内容集中于中小学或大学本科教学计划中通常包含的那些数学课题的历史.因为一门数学课题的历史会为讲解这一课题提供非常好的思路,为了使未来的数学教师能在历史的基础上开展课堂教学,我们会对每一个新概念作充分细致的解说.实际上,许多习题就是要求读者去讲一堂课.我希望这些学生以及未来的教师能从本书获得一种关于数学的来龙去脉的知识,一种对数学中许多重要的概念有更深入的理解的知识.

## 本书特色

### 材料组织的灵活

尽管本书主要是按年代顺序划分成若干时期来进行组织的,但在每一时期内则是按专题来进行组织的.通过查阅详尽的细节标题,读者可以选择某一特定的专题,对其历史的全程进行跟踪.例如,想研究方程求解时,就可以研究古代埃及人和巴比伦人的方法,希腊人的几何解法,中国人的数值解法,伊斯兰人用圆锥截线求解三次方程的方法,意大利人所发现的求解三次方程和四次方程的一套算法,拉格朗日为解高次多项式方程而研究出来的一套判据,高斯在求解割圆方程方面所作的工作,以及伽罗瓦用置换来讨论求解方程的工作,这一工作我们今天称之为伽罗瓦理论.

### 关注教科书

全书对各个不同时期的一些重要教科书都给予了足够的重视.从事数学研究,发现新的定理和技巧是一回事.以一种使其他人也能掌握的方式来阐述这些定理和技巧则又是一回事.因此几乎在每一章中都会讨论一种或几种那个时代的重要的教科书.这是这样一些著作,学生们能够通过它们

来学习那些伟大的数学家们的思想.今天的学生将能够看到某些论题在过去是怎样被处理的,并能将这些处理方法与当今教科书中的方法加以比较,而且还能看到许多年前的学生想要解决的是什么样的问题.

**天文和数学**

有两章是完全用来讲数学方法的,也就是讲数学是怎样用于解决人类其他活动领域内的问题的.这两章,一章是关于希腊时期的,另一章则涉及文艺复兴时期,它们相当大的部分是讲述天文学的.事实上,在古代,数学家和天文学家常常是同一个人.要想了解希腊数学的主要内容,关键是要了解希腊人关于天体的模型,以及怎样借助这个模型用数学来得出预言.类似地,我们还会讨论哥白尼-开普勒的天体模型以及文艺复兴时期的数学家们是怎样用数学来研究它的.

**非西方数学**

我们还下了特别的功夫来讨论数学在世界上除欧洲以外一些地区的发展.于是有相当多的材料是有关中国、印度和伊斯兰世界的数学的.还安排了一个“插入章”,在该章中比较了大约在 14 世纪之交时各主要文明的数学.接着讨论了在世界各地各种其它社会中的数学.读者会看到,有些数学概念在很多地方出现过,尽管也许并不是在我们西方称之为“数学”的背景中出现.

**按专题分类的习题**

每一章均含有许多习题,为了便于选取,这些习题都是按专题分类汇集的.有些习题只是简单的计算,有些则是填补正文中数学论证的空白.讨论题是一种无明确答案的漫谈式问题,其中有些可能要做些研究才能回答.很多这一类的问题要求学生动脑筋思考怎样利用在课堂上学到的历史材料.(大多数计算习题的答案可在书后的答案小节中找到.)有许多习题即使读者不打算做,他们也至少应该阅读一下这些题,以便对该章的内容有更全面的了解.

**焦点论坛**

**小传**　为了便于参阅,对许多我们谈到过他们工作的数学家,其小传被放在独立于正文的栏框中.特别是,尽管由于种种原因参与到数学研究中来的妇女为数不多,我们还是写了几位重要的女数学家的小传.妇女通常都是在克服了重重困难后才能成功地对数学事业作出贡献.

**专题**　还有一些特殊论题以加框文字的形式散见于全书.其中有这样一些条目,如:埃及人对希腊数学影响问题的讨论,托勒密著作中函数概念的讨论,各种连续概念的比较.还有这样一些加框读物,它们把重要的定义汇集在一起以便于查阅参考.

**补充教学资料**　每一章的开始有一段相关引语和对一桩重要数学“事件”的描述.每一章的末尾都有一张讲到过的数学家的简短的编年表,这将有助于学生组合他们的知识.每章还有一份附加了注释的参考文献,学生们从这些文献中可以获得更多的信息.最后,在前面有一张数学史的**大事年表**和一张标明了正文提到过的一些重要地点的位置的**地图**.

## 预备知识

学过一年微积分,具备了可资实用的知识,就足以理解本书的头十二章,以后的几章要求更多一些数学上的准备,但是各节的标题就清楚地表明了需要哪些数学知识.例如,要想充分理解第 14 章和第 15 章,就要求学生学过抽象代数.

## 本版更新之处

本书第一版获得了广泛友好的接受,这鼓励我保持它的基本体系和内容.然而,我仍力图在本书的内容及表述的清晰性两方面作出一系列的改进.改进的根据是许多使用本书第一版的人所提出的意见以及在新近文献中所刊载的有关数学史中的一些新发现.实际上每一小节都有一些小小的改动,较大的改动则有以下一些:有关伊斯兰传统组合学的新材料;牛顿对他的世界体系的推导,19 世纪和 20 世纪中的线性代数,以及 19 世纪中的统计概念.我力求改正史实上的全部错误,并杜绝新的错误,但对任何人指出本书还余留的错误,我将深表感谢.每章还增加了一些新的问题,其中有些比较简单.参考文献方面也尽可能作了更新.还增加了一些新的邮票作为插图.不过应当注意到,任何这种试图表现 16 世纪前数学家的邮票上的画像——别处的画像实际上也一样——都是想像的.至今还没有哪一张这种人物的画像是有可靠证据的.

## 课程内容的弹性

本书包括的材料远远超过了普通一学期的数学史的课程.实际上,它的材料适合一学年的课程.前一半内容是讲述直到 17 世纪末微积分发明为止的这一时期的.后半部分内容则是讲 18、19 和 20 世纪数学的.然而对于那些只有一个学期学时的教师来说,有几种使用本书的方式:第一种方式可以选前十二章中的绝大部分内容,然后简单地以微积分作结束;第二种方式是,可以选一到两个专题的全部历史.以下是可供选择的专题以及相应的章节:

**方程求解**:1.4, 1.8, 1.9, 2.4.3, 2.5, 5.2, 6.3, 6.4, 6.7, 6.8, 7.2, 8.3, 9.3, 9.4, 11.2, 14.2.4, 15.2

**微积分思想**:2.3.2, 2.3.3, 2.4.9, 3.2, 3.3, 7.2.4, 7.4.4, 8.4, 10.5, 12, 13, 16.1, 16.2, 16.3, 16.4

**几何学的概念**:1.5, 1.8, 2.1, 2.2, 2.4, 3.3, 3.4, 3.5, 4.3, 5.3, 7.4, 8.1, 10.1, 11.1, 11.5, 14.3, 17, 18.2

**三角学、天文学和测量**:1.6, 4.1, 4.2, 6.2, 6.6, 7.5, 8.1, 10.2, 10.3, 12.5.6, 13.1.3

**组合学、概率论和统计学**:6.8, 7.3, 8.2, 11.3, 14.1, 16.5

**线性代数**:1.4, 14.2.2, 14.2.4, 15.5, 17.4, 18.3.3, 18.4.7

**数论**:2.1.1, 2.4.7, 5.1, 11.4, 14.2.3, 15.1

**近世代数**:6.8, 7.2, 8.3, 9.1, 9.2, 14.2, 15.2, 15.3, 15.4, 18.3, 18.4.4, 18.4.6, 18.4.8

第三种方式,可以讲授前十章绝大部分的内容,然后再按某个专题,从后面的章节中选几个概念来讲.我们还可以给个别学生或学习小组指定阅读章节,并让他们做读书报告.

## 致　谢

和任何一本书一样,要不是有许多人的帮助,本书是不可能写成的.下面各位对本书的第一版颇多贡献,他们的投入继续对本书的改进发挥作用:Mancia Asher(Ithaca 学院),J. Lennart Berggren(Simon Fraten 大学),Robert Kreiser(A. A. U. P),Robert Rosenfeld(Nassau 社区大学)和 John Milcetich(哥伦比亚特区大学).

很多人对本书的第二版作了详尽的建议,尽管我没有全部采纳(这使我颇觉遗憾),我真诚地感谢他们为改进本书所提出的想法,这些人中有 Ivor Grattan-Guinness, Kim Plofker, Eleanor Robson,

Richard Askey, William Anglin, Claudia Zaslavsky, Rebekka Struik, William Ramaley, Joseph Albree, Calvin Jongsma, David Fowler, John Stillwell, Christian Thybo, Jim Tattersall, Judith Grabiner, Tony Gardiner, Ubi D'Ambrosio, Dirk Struik, 和 David Rowe. 我衷心地感谢所有这些人.

对书稿审阅的很多人也以他们细致深入的评论给了我很大的帮助,使本书增色不少,没有他们的帮助本书就不会是现在这个样子.

**第一版的审稿人有**: Duane Blumberg, 西南路易斯安那大学; Walter Czarnec, Framingham 州立大学; Joseph Dauben, Herbert Lehman 学院 - CUNY; Harvey Davis, 密执安州立大学; Joy Easton, 西弗吉尼亚大学; Carl FitzGerald, 加州大学圣地亚哥分校; Basil Gordon, 加州大学洛杉矶分校; Mary Gray, 美国大学; Branko Grunbaum, 华盛顿大学; William Hintzman, 圣地亚哥州立大学; Barnabas Hughes, 加州州立大学 - Northridge; Israel Kleiner, York 大学; David E. Kullmam, 迈阿密大学; Robert L. Hall, 威斯康星大学, Milwaukee 分校; Richavd Marshall, 东密执安大学; Jerold Mathews, 衣阿华州立大学; Willard Parker, 堪萨斯州立大学; Clinton M. Petty, Missouri-Columbia 大学, Howard Prouse, Mamkato 州立大学; Helmut Rohrl, 加州大学圣地亚哥分校; David Wilson, 佛罗里达大学; 以及 Frederick Wright, 北卡罗来纳大学 Chapel 分校.

**第二版的审稿人有**: Salvatore Anastasio, 纽约州立大学, New Platy 分校; Bruce Crauder, Oklahoma 州立大学; Walter Czarnec, Framingham 州立大学; William England, 密西西比州立大学; David Jabon, 东华盛顿大学; Charles Jones, Ball 州立大学; Michael Lacey, 印地安那大学; Harold Martin, 北密执安大学; James Murdock, 衣阿华州立大学; Ken Shaw, 佛罗里达州立大学; Sverre Smalo, 加州大学, Santa Barbara 分校; Domina Eberle Spencer, Connecticut 大学; Jimmy Woods, North Georgia College.

我还在各种论坛上与许多数学史家们交谈过,从中获益匪浅.特别是那些定期参加由美国国家历史博物院数学馆前馆长 Uta Merzbach 组织的数学史年会的数学家们一定会认得出有些观点是在那些年会上讨论过的.本书还从多年来与其他一些人的讨论获益,其中有 Charles Jones(Ball 州立大学), V. Frederick Rickey(Bowling Green 州立大学), Florence Fasanelli(MAA), Israel Kleiner(York 大学), Abe Shenitzer(York 大学), Ubiratan D'Ambrosio(Estadual de Campinas 大学), 以及 Frank Swetz(Pennsylvania 州立大学).我在哥伦比亚特区大学数学史(及其他)班上的学生在澄清我的诸多观念上也给了我不少帮助.自然,我欢迎其他地方的学生和同事努力为进一步改进本书提出更多的意见和给我来信.

还要特别感谢哥伦比亚特区大学图书馆馆员们,特别是 Clement Goddard, 他总是设法通过馆际交流为我找到任何我想要的那些不见经传的书籍. Smithsonian 协会图书馆特别收藏部的 Leslie Overstreet 在寻找图片来源时对我的帮助特别大.

感谢 Harper Collins 出版社的前编辑 Steve Quigley, Don Gecewicz 和 George Duda, 他们帮助我完成了本书的第一版.

我还应感谢 Addison Wesley Longman 出版社本书的新编辑 Jennifer Albanese, 感谢她在完成本书的出版中所作的建议和表现出的耐心.还有 Rebecca Malone 和 Barbara Pendergast, 感谢她们在安排印装等生产方面的事务上所作的努力,还要感谢 Susan Holbert 在准备索引上所作的工作.

我的家庭在我撰写本书的多年中给了我极大的支持,我感谢我的父母对我的信任和耐心;感谢我的孩子 Sharon, Ari 和 Naomi, 他们常常给我帮助,特别是允许我使用我们的电脑;最后我要感谢我的妻子菲丽丝,不论白天还是夜晚都和我进行长时间的讨论,在我需要时总是在我身边,我欠她的远远超过我能偿还的.

V. J. 卡兹

# 目　　录

## 第二篇　中世纪的数学:500 - 1400



## 第三篇　早期近代数学:1400 - 1700

# 第四篇　近代数学:1700－2000

第一篇

6世纪前的数学

# 第1章 古代数学

精确计算,通向世间万物和一切奥秘的知识的大门.

——《兰德数学纸草书》引言[1]

美索不达米亚:大约3800年前在拉沙的一所培养书记员的学校里,有一位教师正在编撰一些数学问题给他的学生去做,以便他们练习一下刚刚讲过的关于直角三角形三边之间关系的结论.这位老师既要让这个计算有一定的难度,这样才能看出谁真正学懂了这些知识,又要让算出的结果为整数,以免学生的学习积极性受到挫伤.经过几个小时反复摆弄他所知道的不多几个能满足方程 $a^2 + b^2 = c^2$ 的三数组 $(a,b,c)$ 之后,他有了一个新的想法.他用笔尖在一块潮湿的泥板上划了几下,很快做了些计算,这使他相信自己已经发现了怎样来算出这种三数组,要多少就能算多少.在进一步整理了自己的思路之后,他取出一块新的泥板,不仅在上面记录下了15组这种三数组,而且简要地提示了某些计算步骤.但是他没有写出他的新方法的细节,这些要留到给同事们做报告时再说.那时他的同事们就不得不承认他的能力,这样他作为最好的数学教师之一的声誉就会传遍整个王国.

上面开头那句摘自一部古代埃及的珍稀数学文献的引语,以及那个讲叙巴比伦书记员的虚构故事表明了想准确描绘古代数学的某些难处.实际上,凡是有记载的古代文明就一定有数学,但是它总是落在那些受过专门训练的祭司和书记员以及政府官员们的手中,这些人的职务就是在收税、测量、营造、制订日历,祭仪等等领域内来发展和利用数学为政府谋取利益.尽管许多数学概念起源于它们在这些场合的应用,但是数学家们总是要发挥他们的好奇心,把他们的思想推进到超过实际需要的范围,不过由于数学是权力的工具,它的方法只传授给有特权的少数人,而且常常是通过口传.因此文字记载通常是很珍稀的,不大能提供细节内容.

近年来,学者们下了很大的功夫从一切可能找到的蛛丝马迹来重建古代文明中的数学.自然,他们不会在每一点上都意见一致,但已有足够的共识使我们能够对埃及,美索不达米亚,中国和印度的古代文明中的数学勾勒出一幅合情合理的图画.为了能清楚地看出这些古代文明中数学的相

似和差异,我们将不把这些文明分开来论述,而是围绕着下面一些关键性的论题来组织我们的讨论:计数,算术计算,线性方程,初等几何,天文和历法计算,平方根,“毕达哥拉斯”定理和二次方程.为了明了整个故事的背景,我们先来谈谈这些文明本身,谈谈我们从中获知它们的数学的材料来源.

## 1.1　古代文明

世界上最古老的文明可能就是美索不达米亚文明,它大约在 3500 B.C. 出现于底格里斯和幼发拉底的两河流域.在随后的 3000 年中,这个区域先后出现过许多王国,其中有一个建于巴比伦城,它的国王罕谟拉比(Hammurapi)在大约 1700 B.C.左右征服了这整个地区(图 1.1).这个时期的文明已经有了忠于国家的政治观念和众神的思想,这里包括恩里尔(Enlil)神,它是美索不达米亚传统宗教首府尼普尔(Nippur)的市神,还有马尔杜克(Marduk),它是巴比伦城的市神.出现了官僚集团和职业军队,而且在农民大众和王室官员之间一个由商人和工匠组成的中间阶级崛起了.此外,作为会计工具,书写被发明出来了,它随后又被用于协助政府维持对广大地区的集中统治.书写是用一支尖笔在泥板上进行的.在过去的 150 年中共挖出了成千上万件这样的泥板(图 1.2).第一个能够将这种楔形文字翻译出来的是罗林森(Henry Rawlinson,1810—1895),他在 19 世纪 50 年代中期,通过比较分别用波斯文和巴比伦文来描述国王大流士一世一次军事胜利事迹的碑文做到了这一点,碑文刻写在贝希斯敦(Behistun,今伊朗境内)的一块岩壁上.

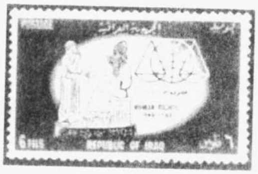



**图 1.1**　一张伊拉克邮票上的罕谟拉比(Hammurapi).


**图 1.2**　一张奥地利邮票上的巴比伦泥板.

有大量这种泥板上刻有数学问题及其解,或专刻有数学表.有几百片已被传抄、翻译并得到阐释.它们的形状通常为长方形,但有时也有圆的.它们拿起来很合手,厚度约为一英寸左右,尽管它们有的小得像张邮票,有的又大得像本百科全书.这种泥板不易毁,这真是一件幸事,因为它是我们了解美索不达米亚数学惟一的来源.这些文字记载的传统在希腊人的统治下于公元前的几个世纪就失传了.这种状况一直持续到了 19 世纪.绝大部分挖掘到的泥板都是来自罕谟拉比时期的.当然也有一小部分来自美索不达米亚文明的最早期,还有来自 1000 B.C.左右几个世纪和在 300 B.C.左右的塞琉古时期的.本章中的讨论多半是有关“古巴比伦”时期(罕谟拉比时期)的,不过,我们使用“巴比伦的”这个形容词指的是美索不达米亚文明和文化.尽管巴比伦只在一段有限的时间内是这个地区的重要城市,这在数学史中已成为一个惯例了.

大约 7000 年以前在埃及的尼罗河流域就出现农业.但是同时统治着**上埃及**(河谷地区)和**下埃及**(尼罗河三角洲地区)的第一个王朝出现于 3100 B.C.左右.第一代法老们遗留下来的是一群由官员和祭司组成的精英,一座富有的宫廷,还有,为这些国王们自身留下了一个介于人与神之间的地位.这种地位促进了埃及不朽的巨型建筑的发展,包括作为王室寝陵而建造的金字塔以及在卢克索和卡纳克建造的大寺庙(图 1.3).那些书记员们逐步创造出象形文字,它们点缀着陵墓和寺庙.商博良


**图 1.3**　吉瑟地方的金字塔.

(Jeam Champollion,1790—1832) 在 19 世纪初作为主要贡献者首次翻译了这种文字.他是借助于多语种的碑文 —— 罗赛塔石碑 —— 来完成这项工作的,这些碑文用的是象形文、希腊文,以及稍后出现的通俗文字,一种类似于纸草书上僧侣用的那种简化象形文字(图 1.4).


**图 1.4** 丁 · 商博良与罗赛塔石碑.

不过我们关于古埃及数学的知识大多数不是来自那些寺庙里的象形文字,而是来自两本纸草书,其中收集有数学问题及其解答:一本是《兰德数学纸草书》,它是苏格兰人兰德(A.H.Rhind,1833—1863) 于 1858 年在卢克索购得的,故以他命名;另一本是《莫斯科数学纸草书》,它是戈罗尼雪夫(V.S.Golenishchev,殁于 1947) 于 1893 年购得,随后赠给了莫斯科艺术精品博物馆.前者是由僧人阿默士(A'h-mose) 在 1650 B.C.左右从距当时 200 余年前的一部原著上抄录的,它长约 18 英尺,高约 13 英寸.后一纸草书差不多也属同一时期,长 15 英尺多,高只有 3 英寸多一点.和美索不达美亚泥板的情况一样,多亏了埃及气候干燥,使得这两本纸草书和其他几百件纸草书得以幸存下来,因为恰恰又是希腊人在公元开始前后的几个世纪里对埃及的统治导致了埃及本土简化象形文字的消亡(图 1.5).


**图 1.5** 阿门霍特普,一个埃及高官和书记员(公元前 15 世纪).

虽然有传说把中国的文明推溯到五千多年以前,但是这个文明最早的可靠证据是由黄河附近的安阳出土文物所提供的,其年代定在 1600 B.C.左右."甲骨文" 就属于以该处为中心的商代社会,这是一些奇异的骨片,上面刻有远古时代的文字,它们是那个时期的祭司们用来祭神的.这些甲骨是我们关于中国计数制知识的来源.大约在公元前第一个千禧年开始,商朝被周朝取代,它随后又分裂成为许多互相对立的封建国家.在公元前 6 世纪,出现了一个百家争鸣的时期,其中最有名的哲学家就是孔子.在好些国家里都建立了学者们的学术团体,在由于铁器的使用而引导的技术成长时期,个别学者还被别的封建诸侯聘用来当他们的谋士.

随着一些弱小的诸侯国逐渐被强国所吞并,这个封建战国时代就结束了,最后到 221 B.C.秦始皇统一了全中国.在他的领导下,中国转变成了一个高度集中的官僚体制的国家.他强化了严厉的法制,公平税赋,统一货币和度量衡,特别是统一了文字.传说认定,秦始皇曾下令焚烧先前传下来的所有的书籍以压制异议,但是我们有一定的理由怀疑这个法令是不是真的实施了.秦始皇死于 210 B.C.,他的王朝很快就被推翻,并为汉朝所取代,这个汉朝维持了近 400 年.汉朝建立了由训练有素的公务人员组成的机构,为此需要有相应的教育体系.在用于培训的教科书中有两本数学著作,可能是在汉朝的早期编就的,一本叫《周髀算经》,一本叫《九章算术》.要想准确地确定这两本书所包含的数学内容的发现日期是不可能的,但是有一些零星的更古老的资料记载了类似于九章的内容,一般认为至少有些内容周代伊始在中国就已经存在了.自然,必须牢记,即使按这个判断年代,我们所讨论的中国数学的发展至少比在美索不达米亚和在埃及的发展晚好几百年.这些文明是否有些东西传到过中国谁也不知道.

公元前 3000 年在印度河两岸有一个叫做哈拉帕的文明兴起了,但没有看到有关于其数学的直接证据.有这种证据的最早的印度文明是由迟至公元前 2000 年从亚洲草原地带迁徙过来的雅利安部落在恒河两岸形成的.在大约公元前 8 世纪,君主政体的国家在这个地区建立起来了,而且他们还得管理复杂的系统,例如城堡建设,集中化的行政管理以及大型灌溉工程.这些国家有等级森严的社会制度,由国王和僧侣(婆罗门) 来统治.婆罗门的文学多少代以来都是口述,以一种叫做"吠

陀”的长诗的形式来表达.尽管这些诗歌可能在公元前 600 年就已经取得了眼下的形式,但在纪元以前还没有书写的记载(图 1.6)

图 1.6　一份《吠陀》原稿.

一些吠陀时代的材料描绘了祭司们繁褥的献祭仪式.就是在这些叫《绳法经》(Sulvasutras)的著作中,我们发现了数学的概念.奇怪的是,尽管这里数学是讨论用砖来造祭坛的理论的,但早期的吠陀文明并没有制砖工艺的传统,而哈拉帕文化却有.因此《绳法经》中的数学有可能是在哈拉帕时期创造的,虽然至今还不清楚它们是怎样传承到这后一时期的.不管怎么讲,我们有关印度数学知识的来源就是《绳法经》.

尽管在公元前一千年以前世界上其它地方也有文明,但迄今所发现的资料对它们的数学并未提供什么线索.因此只有等到有了新的考古发现后才能来作进一步的讨论.

## 1.2　计　数

最简单的数学概念 —— 这可能在有文明以前就已存在 —— 就是计数,用话语来计数.或以更永久的方式用书写的符号来计数.虽然研究各种不同语言中的数目字也是很有意思的(见 1.1),我们在此仅限于讨论数的符号.这些符号的书写有几种不同的组织方法.一种方法叫编组法.最简单的编组形式就是用一道斜杠 / 来代表数 1;作特定的重复就可以表示较大的数.这种数的表示法最早出现在扎伊尔的伊尚果(Ishango)地方发现的一块骨化石上,用碳测定年代法定出其年代大约在公元前 20 000 年左右.不清楚这些骨头上的划痕或缺口具体表示什么东西的数目,但是一位仔细研究过这种骨化石的学者认为,它们是对月亮的某些周期进行计数.[3] 早期人用这种初步的数量表示方式来记载天文现象这一点能进一步证实 —— 如我们在晚得多的时期所看到的那样 —— 数学的发展是与天文学的发展携手并进的.在欧洲的中部也发现了类似于伊尚果骨的人工制品,年代可能在 8000 B.C.,上面有规则分组的刻槽,可能也是表示天文观察结果的.

用编组法表示数的一个更为复杂的例子是埃及人在大约 5000 年前发明的.在这个象形体系中,十的头几次幂由不同的符号表示.开始用我们熟悉的一竖表示 1.然后用∩来表示 10,用𓍢表示 100,用𓆼表示 1000,用𓂭表示 10 000.通过适当地重复这些符号就可表示任意的整数.例如,为了表示 12 643 这个数,埃及人就会把它写成 |||∩∩∩∩𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓆼𓆼𓂭.(注意通常习惯是把小的数位放在前面.)

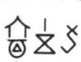
象形数系是用来写在寺庙墙壁上或刻在柱子上的.但是当书记员要在纸草本上书写时,他们就需要一种手写书法,为此他们创造出了一种简化的象形数系,成为符号记数系统的一个例子.在这种数系中从 1 到 9 的每一个数字都有一个特定的符号,同样从 10 到 90 的每一个 10 的倍数以及从 100 到 900 每一个 100 的倍数也都有各自的特定符号,由此类推,一个给定的数,例如 37,就是在 7 的符号之后写上 30 的符号.由于 7 的符号是 ,而 30 的符号是 ,37 就写成 .又如,由于 3 是写成 ,40 写成 ,以及 200 写成 ,于是 243 的符号就是 .虽然在符号数系中不一定要有表示零的符号,埃及人还真有这样一个符号.不过它并不是出现在数学纸草书中,而是出现在关于建筑的纸草书中,在那里它是用来标记金字塔结构中底部水平线的,这样的符号还出现在记载会计帐目的纸草书中,用来在平衡表中表示支出和收入相等.[4] 在希伯来文和希腊文中使用了类似的符号数系,在这两种语言中所有特定的符号都是直接用字母表中的字母来表示.

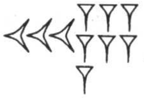
补遗 1.1

**不同语言中的数目字**

| | | |
|---|---|---|
| | **18** | |
| 英文 | eighteen | 8.10(eight = 8, teen ⇒ ten = 10) |
| 威尔士文 | deu naw | 2 × 9(deu 来自 dou = 2, naw = 9) |
| 希伯来文 | shmona-eser | 8.10(shmona = 8, eser = 10) |
| 约鲁巴文 | eeji din logun | 20 减 2(ogun = 20, eeji = 2) |
| 中文 | shih-pa | 10.8(shih = 10, pa = 8) |
| 梵文 | asta-dasa | 8.10(asta = 8, dasa = 10) |
| 玛雅文 | uaxac-lahun | 8.10(uaxac = 8, lahun = 10) |
| 拉丁文 | duodeviginti | 20 去 2(duo = 2, viginti = 20) |
| 希腊文 | okto kai deka | 8 和 10(okto = 8, deka = 10) |
| | **40** | |
| 英文 | forty | 4 × 10(这里 10(ten) 变为 ty) |
| 威尔士文 | de-ugeint | 2 × 20(de 来自 dau = 2, ugeint = 20) |
| 希伯来文 | arba-im | 4*s*(arba = 4, im 是复数字尾) |
| 约鲁巴文 | ogoji | 20 × 2(ogun = 20, eeji = 2) |
| 中文 | szu-shih | 4 × 10(szu = 4, shih = 10) |
| 梵文 | catvarim-sat | 4 × 10(eatvarah = 4, sat 来自 dasa = 10) |
| 玛雅文 | ca-ikal | 2 × 20(ca = 2, kal 是 20 的字尾) |
| 拉丁文 | quadraginta | 4 × 10(quad = 4, ginta 来自 decem = 10) |
| 希腊文 | tettarrakonto | 4 × 10(tettara = 4, kunta 来自 deka = 10) |

本表列出了在九种古代和现代语言中表示 10 和 40 的词,并对其字源作了语义分析[2].

自有史料记载的时期以来中国人就使用了一种累积式的记数方法,也是以 10 的幂为基础的.就是说,他们创造了一套记数符号来分别表示从 1 到 9 的各个数和 10 的各次幂.于是,例如,数 659 的写法就是:将 6 的符号(个)附加到代表 100 的符号(⊚)之上,然后与 5(⊠)和 10 的符号(/)放到一起,最后是写代表 9 的符号 ʓ: .这种记数系统的发展可能与早先使用的算板有关,在这种算板上算筹排成竖列,代表 10 的各个幂次(见补遗 1.2).于是,很自然地把 659 看成在代表 100 的列中有 6,在代表 10 的列中有 5,而在代表 1 的列中有 9,在书写形式中就各用一个特殊的符号来代表每一列.

这类记数系统的任一个,除了第一个以外,都是围绕着基数 10 来组织的.就是说,对 10 的整数幂都各有不同的符号,其他数的符号就是由这些符号来构成的.巴比伦人则用两种不同的基数为基础来构成他们的记数符号.首先他们采用以十为基础的编组系统来表示小于和等于 59 的数.于是在泥板上垂直的一笔划 𒁹 代表 1,而一个扭歪的笔划 𒌋 就代表 10.在编组记数法中 37 就表示成 .接着在公元前第三个千年间的某个时期,巴比伦人对大于 59 的数创造了第一个定位式或者说位值记数系统.在这个记数系统中,基数 —— 在此为 60—— 的幂不是由符号而是由"位置"来表示,而在每个位置上的数字表示这个位上幂的个数.这样,巴比伦人把 13 329(等于 $3 \times 60^2$

$+42\times60+9)$ 表示成 （今后我们将把它写成 3,42,05，而不用巴比伦人的笔划来表示）. 古代巴比伦人没有 0 的符号，但如果某个给定数中没有某一幂时，就在那里留一个空位. 在一个数的末位之后就没有空位了，因此就很难区分 $3\times60+42$(3,42) 与 $3\times60^2+42\times60$(3,42,00)，不过有时候他们会在这个数的后面加一个适当的数量词来指明它的绝对大小. 例如"3 42 六十"就表示 3,42，而"3 42 三千六百"就表示 3,42,00. 但是，巴比伦人从未用过一个符号来代表"无"这个意义上的零，有如我们写 $42-42=0$.

**补遗 1.2**

### 中国算板

中国算板就是在上面摆了一些算筹(长约 10 cm 的小竹笺)的台板，通过摆弄这些算筹来作各种计算. 用于表示小于 10 的整数的算筹有两种可能的排列：

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 𝍠 | 𝍡 | 𝍢 | 𝍣 | 𝍤 | 𝍥 | 𝍦 | 𝍧 | 𝍨 |
| 𝍩 | 𝍪 | 𝍫 | 𝍬 | 𝍭 | 𝍮 | 𝍯 | 𝍰 | 𝍱 |

为了表示大于 10 的数，中国人在算板上使用了一种进位系统. 把算筹排成一列一列，最右面的列表示个位，接下去的列为十位，再接下去的列为百位，以此类推. 在一排的列中，空列表示零. 为了使操作人员易于读数，上述算筹的两种排列方式交替使用. 竖排式用于个位、百位和万位，而横排式用于其余的位. 因此，1156 由𝍩𝍠𝍭𝍥来表示，而 6083 由𝍮 𝍰𝍢来表示.

算术运算的做法是，把要运算的数在算板上排成不同的行，然后作适当的操作. 例如，将 6 和 9，即𝍥和𝍨相加，两根水平筹加起来得十，而竖式的筹摆在一起得五. 多位数加与减的运算一般由左向右进行. 对于乘法，作运算的人要记住一些基础的相乘结果，然后计算过程也是从左到右进行，在每次相乘后再相加. 除法也是类似地来做.

负数在算板上的表示办法是，用某种特征来区别"负"筹与"正"筹. 一种办法是用红筹代表正数，用黑筹代表负数. 用筹来计算的办法本章稍后还要讲. 在算板上的运算终于发展成为这样一些方法，我们可以用它们来解线性方程组和求多项式方程的数值解.

巴比伦人把他们的 60 进位记数系统用于作计算. 但在日常用语中他们经常使用的是一个可能更老一些的记数系统，编组的方式略有不同，而且 1,10,60,100,600,1000,3600 等等都各有不同的符号. 这个记数系统可能是从粘土票券上的记号发展过来的，这种土制票券在公元前三千纪时曾经在美索不达米亚地区使用过[5]，是用来记载从一处运送到另一处去的货物的数量的. 起初在这些票券上画有表示货物种类的象形文字，例如油罐. 这样五个椭圆就表示五罐油. 但是这个办法逐渐演变成只用一个符号代表货物，而用好几个符号来表示各种大小的数目. 如果该货物要用几种不同的单位来度量才比较方便(譬如谷物就是这种情况)，那么对每种单位就用不同的符号.

有些度量单位，当然不是所有的单位，它们之间有这样的关系，即一个"大的"单位等于 60 个"小的"单位. 那么到了一定的阶段这个记录数目的系统就会发展成这样的形式，同一个数字 1 也能代表 60. 我们不知道为什么巴比伦人要用一个大单位表示 60 个小单位，并采用这个办法来构成他们的记数系统. 一种猜想是，60 可以被很多较小的整数除尽. 因此这个"大"单位的分数值可以很容