普通高等教育基础课规划教材

线性代数与空间解析几何

陈仲堂 靖新 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

线性代数与空间解析几何

主编　陈仲堂　靖　新
参编　刘玉柱　戚　中
　　　范弘毅　缪淑贤　李汉龙
主审　樊复生

机械工业出版社

本书是为适应21世纪的教学模式及现代科技对线性代数的需求，按照2004年教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会重新制订的“线性代数”的基本要求编写的.

全书分为八章，包括行列式、矩阵及其运算、空间解析几何与向量代数、n维向量、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换、基本代数结构简介.每一章均有基本内容、习题、实验与提高三个部分，以适应不同层次学生分级教学的需求.书中把空间解析几何与线性代数融合在一起，并增加了数学实验内容，在内容中注重体现现代科技的内涵.

本书可作为高等院校理、工、经济、管理等专业的教材或教学参考书，也可供科技人员和自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何/陈仲堂，靖新主编.—北京：机械工业出版社，2005.8

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 7-111-17241-8

Ⅰ.线… Ⅱ.①陈…②靖… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材②空间几何：解析几何－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第095040号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
责任编辑：张祖凤　版式设计：冉晓华
责任印制：杨　曦　责任校对：李秋荣
北京机工印刷厂印刷
2005年9月第1版第1次印刷
1000mm×1400mm B5·9印张·337千字
定价：22.50元

前　言

“线性代数”是一门重要的基础课，对于学生的逻辑思维、抽象综合及创新能力的培养，以及学生后续课程的学习起着重要的作用．随着我国高等教育由“精英教育”向“大众化教育”的转变，高等教育的模式已经发生了根本的变化．现代科学技术的迅速发展以及计算机的日益普及，对“线性代数”这门课程的教学提出了更高的要求．以往线性代数的教学模式及教学内容已不能完全适应现代科技的需求．为此，2004 年 5 月教育部非数学类专业教学基础课程教学指导分委员会重新修订了“线性代数”的教学基本要求．此要求把空间解析几何与线性代数融合在一起，并在内容中体现了一些现代科技的内涵．本书就是按新的基本要求，结合建筑类大学的特点编写的．

本书共分为八章，每一章均有基本内容、习题、实验与提高三个部分．前六章的基本内容与习题保证了新的“线性代数”教学基本要求的全面贯彻实施，是发展共性的内容，是通过统一教学来完成的．第 7 章、第 8 章及实验与提高是为对该课程要求较高的专业(如信息与计算机科学)的学生以及那些学有余力，又有兴趣，希望扩大知识面、继续深造的学生准备的，这一部分主要包括各章所涉及的数学实验、现代科技在相关部分的应用及满足学生进一步提高学习要求等内容，其主要目的是为学生的个性发展营造一个良好的氛围．

本书编写力求突出以下几个方面：

(1) 遵循教育学和教学法的原理，符合教学过程中学生的认知规律，贴近我国大学低年级学生的实际水平．在有关题材的处理上，侧重基础知识和基本能力的训练，突出重点，尽量做到由易到难、由具体到抽象、由特殊到一般，如由几何空间到 n 维向量空间，再到线性空间等，力求通俗易懂，便于学生在教师指导下自学．

(2) 整合了线性代数与解析几何两部分内容．在现代工程技术的许多领域里，由于计算机及其图形显示的强大功能，几何问题的代数化处理，代数问题的可视化处理，把代数与几何更加紧密地结合在一起，代数与几何综合的方法在工程技术中的应用已经相当地广泛和深入．这些都对理工科非数学专业的教学提出了新的要求．而且，整合线性代数与解析几何，不但可以使学生由看得见、摸得着的解析几何的事实易于推广到线性代数的抽象概念、理论，又能从线性代数的高度更深刻地理解解析几何的内容．在整合的方式上，本书不求水乳交融，而是在保持两部分内容相对独立的基础上，加强相互呼应、联系和渗透．

(3) 致力于以近、现代数学思想、观点和语言处理有关题材，并使其内容比

传统的工科相应教材有较大的拓宽、充实、更新和提高，尽量体现现代科技的内涵. 例如，在线性方程组之后，介绍广义逆矩阵，从而使线性方程组的理论更趋完整与统一；在相似对角化之后，介绍矩阵的 Jordan 标准形(相应的理论证明省略)；最后一章初步介绍一些基本的代数结构——群、环、域等.

本书由沈阳建筑大学陈仲堂、靖新主编. 各章编写人员如下：刘玉柱(第 1 章)，戚中(第 2 章)，范弘毅(第 3 章)，缪淑贤(第 4 章)，陈仲堂(第 5 章、第 8 章)，靖新(第 6 章)，李汉龙(第 7 章). 全书由陈仲堂具体组织、构思及统纂.

衷心感谢本书主审樊复生教授！他花费了大量的时间，认真细致地审阅了书稿，提出了很多宝贵的意见. 此外，沈阳建筑大学教务处，特别是贾连光处长，为本书的顺利出版做了大量的工作，在此深表谢意！

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请有关专家、同行及广大读者批评指正.

编　者

目　录

第1章　行　列　式

在线性代数研究的某些问题中，如线性方程组、矩阵等，常要利用行列式作工具，在数学的其他分支中也常常要用到行列式. 本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法，同时介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则. 此外在实验与提高部分，将介绍 Matlab，Mathematica 的行列式计算和拉普拉斯定理.

1.1　全排列、逆序数与对换

先看一个例子.

引例　用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解　这个问题相当于说，把三个数字分别放在百位、十位与个位上，有几种不同的放法？

显然，百位上可以从 1、2、3 三个数字中任选一个，所以有 3 种放法；十位上只能从剩下的两个数字中选一个，所以有 2 种放法；而个位上只能放最后剩下的一个数字，所以只有 1 种放法. 因此，共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

这 6 个不同的三位数是：123，231，312，132，213，321.

数学上常把考察的对象叫做元素.

例如上例中的数字 1、2、3 就是元素，因此上述问题相当于：把 3 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

对于 n 个不同的元素，也可以提出类似的问题：把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（也简称排列）.

n 个不同元素的所有排列的种数，常用 P_n 表示，由引例的结果可知

$$P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

为了得出计算 P_n 的公式,可以仿照引例进行讨论.

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上,有 n 种取法;又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上,有 $n-1$ 种取法……这样继续下去,直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上,只有 1 种取法,于是

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

读为"n 阶乘". 例如:$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $5! = 120$.

对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序,通常对 n 个不同的自然数,我们选定 $1,2,\cdots,n$ 的次序,即按由小到大的顺序排列起来的排列叫做标准排列.

在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数就称为这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性,不妨设 n 个元素为自然数 1 至 n,设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数.

例 1-1 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中,3 排首位,逆序数为 0;2 的前面比 2 大的数有一个(3),故逆序数为 1;5 是最大数,逆序数为 0;1 的前面比 1 大的数有三个(3、2、5),故逆序数为 3;4 的前面比 4 大的数只有一个(5),故逆序数为 1,于是这个排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$$

把一个排列中任意两个元素的位置互换,而其余的元素不动,就得到另一个排列,这样一个变换叫做对换. 例如,经过 1、2 对换,排列 2431 就变成了 1432,排列 2134 就变成了 1234. 将相邻两个元素对换,叫做相邻对换.

定理 1-1 一个排列中的任意两个元素对换,排列奇偶性改变.

证 先证相邻对换的情形. 排列

$$a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m \tag{1-1}$$

对换 a 与 b 变成

$$a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m \tag{1-2}$$

显然，在排列式(1-1)中 a、b 与其他的元素构成逆序，则在排列式(1-2)中仍然构成逆序；如不构成逆序，则在式(1-2)中也不构成逆序，不同的只是 a、b 的次序. 如果原来 a、b 组成逆序，那么经过对换，逆序数就减少一个；如果原来 a、b 不组成逆序，那么经过对换，逆序数就增加一个. 不论增加 1 还是减少 1，排列的逆序数的奇偶性总是变了. 因此，对于相邻对换的情形，定理是对的. 再证一般对换的情形. 设排列为

$$a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n \tag{1-3}$$

经过对换 a、b，排列式(1-3)变成

$$a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n \tag{1-4}$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻的对换来实现. 从式(1-3)出发，把 b 与 b_m 对换，再与 b_{m-1} 对换，也就是说，把 b 一位一位地向左移动. 经过 $m+1$ 次相邻位置的对换，排列式(1-3)就变成

$$a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n \tag{1-5}$$

从式(1-5)出发，再把 a 一位一位地向右移动，经过 m 次相邻位置的对换，排列式(1-5)就变成了排列式(1-4).

总之，a、b 对换可以通过 $2m+1$ 次相邻对换来实现. $2m+1$ 是奇数，相邻对换改变了排列的奇偶性. 故这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列调成自然顺序的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1-1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而自然排列是偶排列(逆序数为 0)，因此知推论成立.

1.2 行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先来研究二阶、三阶行列式.

1. 二阶行列式

由 2×2 个数构成的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

叫做二阶行列式，它表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-7}$$

其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1-6)的元素,元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.

例 1-2 计算二阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-2\\3&5\end{vmatrix}$

解 $D=\begin{vmatrix}1&-2\\3&5\end{vmatrix}=1\times5-(-2)\times3=11$

由式(1-7)可知:

(1) 二阶行列式是一些项的代数和,每一项都是两个元素的乘积,这两个元素位于不同的行,不同的列.

(2) 每一项的两个元素的行标成自然排列 12 时,列标都是 1,2 的某一排列,这样的排列共有 2 种,故二阶行列式共有 2 项.

(3) 带正号的一项列标排列是 12,是偶排列,带负号的列标排列是 21,是奇排列.

2. 三阶行列式

由 3×3 个数构成的式子

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix} \tag{1-8}$$

叫做三阶行列式,它定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-9}$$

它可这样来记忆:如图 1-1,图中实线看作是平行于主对角线的连线,虚线看作是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

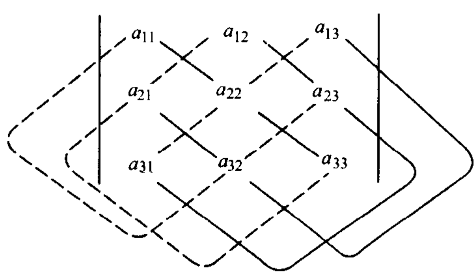

图 1-1

通常称这种计算行列式方法为三阶行列式对角线展开法.

例 1-3 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=2\times 3\times 5+1\times 1\times 2+2\times(-4)\times 3-$$

$$2\times 3\times 2-1\times(-4)\times 5-2\times 1\times 3$$

$$=30+2-24-12+20-6=10$$

由式(1-9)可见,三阶行列式定义有如下特征:

(1) 三阶行列式的每一项都是由不同行、不同列的三个元素的乘积.

(2) 每一项的三个元素的行标排成自然排列 123 时,列标都是 1,2,3 的某一排列,这样的排列共有 6 种,故三阶行列式共有 6 项.

(3) 带正号的三项的列标排列是 123,231,312.

经计算可知,它们全为偶排列.

带负号的三项的列标排列是 132,213,321.

经计算可知,它们全为奇排列.

于是,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有的排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

由以上分析可得 n 阶行列式定义:

定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

并冠以符号 $(-1)^t$,即

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

的代数和. 这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数. 记作:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这里$\sum$表示对$1,2,\cdots,n$所有的排列求和. 显然n阶行列式共有$n!$项的代数和. n阶行列式可简记作$\det(a_{ij})$. 数a_{ij}称为行列式$\det(a_{ij})$的元素.

当$n=1$时,为一阶行列式,$|a_{11}|=a_{11}$. 注意不要与绝对值记号相混淆.

下面根据定义计算两个最基本也是最简单的行列式.

例 1-4 证明对角形行列式(其中未写出的元素都是零,)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{2}$$

证 第(1)式依定义是显然的. 下面只证第(2)式.

在第(2)个行列式中,不为零的项只有一项$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. 它们符号也不难确定. 为此,令$\lambda_i=a_{i,n-i+1}$,则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

由于$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$

故原式得证.

例 1-5 主对角线(从左上角到右下角的线)以上(下)的元素都是0的行列式叫做下(上)三角形行列式. 证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 这是n阶行列式,应有$n!$项. 但由于许多元素为零,故不等于零的项数大大减少. 我们先看一下,哪些项可能不为零,然后再来决定它们的符号. 项的一般形式为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

在行列式中的第一行元素除去 a_{11} 以外全为零,因此只考虑 $p_1=1$ 的项. 在第二行中除去 a_{21}、a_{22} 外,其余的元素全为零,所以只需考虑 $p_2=1,2$ 两种情形,但由于 $p_1=1$,因此 p_2 只有等于 2. 这样逐步推下去,不难看出,在展开式中,除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外,其余都为零,而这一项列标排列是偶排列,因此这一项的符号为正号($(-1)^t=(-1)^0=1$),于是

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这就是说,下三角行列式等于主对角线上元素的乘积. 同理,上三角形行列式也有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

在行列式的定义中,为了决定每一项的符号,我们把 n 个元素的行标排成自然顺序. 事实上,数的乘法是可以交换的,因而这 n 个元素的次序可以任意写. 一般地,n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1-10}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$,$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个全排列. 利用排列的性质,不难证明,式(1-10)的符号等于

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)} \tag{1-11}$$

事实上,为了根据定义来决定式(1-10)的符号,就要把这 n 个元素重新排一下,使得它们的行标成自然顺序,也就是排成

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'} \tag{1-12}$$

于是它的符号是

$$(-1)^{t(j_1'j_2'\cdots j_n')} \tag{1-13}$$

现在来证明式(1-11)与(式 1-13)是一致的. 我们知道,由式(1-10)变到式(1-12)可以经过一系列元素的对换来实现. 每作一次对换,元素的行标与列标所成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 就都同时作一次对换,也就是 $t(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $t(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性,因而它们的和

$$t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性不改变. 这就是说,对式(1-10)作一次元素的对换不改变式(1-11)的值. 因此,在一系列对换之后有

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{t(12\cdots n)+t(j_1'j_2'\cdots j_n')} = (-1)^{t(j_1'j_2'\cdots j_n')}$$

这就证明了式(1-11)与式(1-13)是一致的.

如果经过适当的对换元素,使得 $t(j_1j_2\cdots j_n)=0$,可以得到行列式的另外一种定义形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{1-14}$$

其中 t 为行标排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数.

1.3 行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题,也是一个很麻烦的问题. n 阶行列式一共有 $n!$ 项,计算它就需要做 $n!(n-1)$ 个乘法,特别是当 n 较大时,$n!$ 将是一个相当大的数字. 直接按定义来计算行列式几乎是不可能的,因此有必要讨论行列式的性质,利用这些性质简化行列式的计算.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

事实上,把 D^{T} 按式(1-14)展开就等于

$$D^{\mathrm{T}} = \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = D$$

性质 1 表明,在行列式中行与列的地位是对称的. 因此,凡是有关行的性质,对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

证 设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D = \det(a_{ij})$ 交换 i、$j(i<j)$ 两行得到的,于是

$$D_1 = \sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

其中 t_1 是 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数，令 t 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数，由对换的性质知 $(-1)^t = -(-1)^{t_1}$，故有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} \\ &= -\sum (-1)^{t} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = -D \end{aligned}$$

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零.

证　把相等的两行互换，有 $D = -D$

故有 $$D = 0$$

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

证　行列式的第 i 行元素都乘以数 k，则由定义有

$$\sum (-1)^{t} a_{1p_1} \cdots k a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = k \sum (-1)^{t} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = kD$$

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可提到行列式符号的外面.

注：计算行列式时，一定要注意利用本推论，可简化行列式的计算.

性质 4　行列式如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

利用上述推论即可证得.

性质 5　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则 D 等于两个行列式之和，而这两个行列式除这一行(列)以外全与原来行列式的对应行(列)一样. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按定义即可证明.

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行