



袖珍经典

# 对称

[德] 赫尔曼·外尔 著 冯承天 陆继宗 译

上海世纪出版集团

# 对称

[德] 赫尔曼·外尔 著 冯承天 陆继宗 译

世纪出版集团 上海科技教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

对称 / (德)外尔(Weyl, H.)著;冯承天,陆继宗译.

—上海:上海科技教育出版社,2005.4

(世纪人文系列丛书)

ISBN 7-5428-3788-5

I. 对... II. ①外...②冯...③陆... III. 对称

IV. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 010058 号

---

责任编辑 潘 涛 何妙福

装帧设计 陆智昌

---

**对 称**

[德]赫尔曼·外尔 著

冯承天 陆继宗 译

出 版 世纪出版集团 上海科技教育出版社  
(200235 上海冠生园路 393 号 www.ewcn.cc)

发 行 上海世纪出版集团发行中心

印 刷 山东新华印刷厂临沂厂

开 本 787 × 965 mm 1/32

印 张 5.875

插 页 4

字 数 106 000

版 次 2005 年 4 月第 1 版

印 次 2005 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7-5428-3788-5/N·656

图 字 09-2000-306 号

定 价 15.00 元

## 世纪人文系列丛书编委会

主任

陈 昕

委员

丁荣生	王一方	王为松	王兴康	包南麟	叶 路
张晓敏	张跃进	李伟国	李远涛	李梦生	陈 和
陈 昕	郁椿德	金良年	施宏俊	胡大卫	赵月瑟
赵昌平	翁经义	郭志坤	曹维劲	渠敬东	潘 涛

## 出版说明

自中西文明发生碰撞以来，百余年的中国现代文化建设即无可避免地担负起双重使命。梳理和探究西方文明的根源及脉络，已成为我们理解并提升自身要义的借镜，整理和传承中国文明的传统，更是我们实现并弘扬自身价值的根本。此二者的交汇，乃是塑造现代中国之精神品格的必由进路。世纪出版集团倾力编辑世纪人文系列丛书之宗旨亦在于此。

世纪人文系列丛书包涵“世纪文库”、“世纪前沿”、“袖珍经典”、“大学经典”及“开放人文”五个界面，各成系列，相得益彰。

“厘清西方思想脉络，更新中国学术传统”，为“世纪文库”之编辑指针。文库分为中西两大书系。中学书系由清末民初开始，全面整理中国近现代以来的学术著作，以期为今人反思现代中国的社会和精神处境铺建思考的进阶；西学书系旨在从西方文明的整体进程出发，系统译介自古希腊罗马以降的经典文献，借此展现西方思想传统的生发流变过程，从而为我们返回现代中国之核心问题奠定坚实的文本基础。与之呼应，“世纪前沿”着重关注二战以来全球范围内学术思想的重要论题与最新进展，展示各学科领域的新近成果和当代文化思潮演

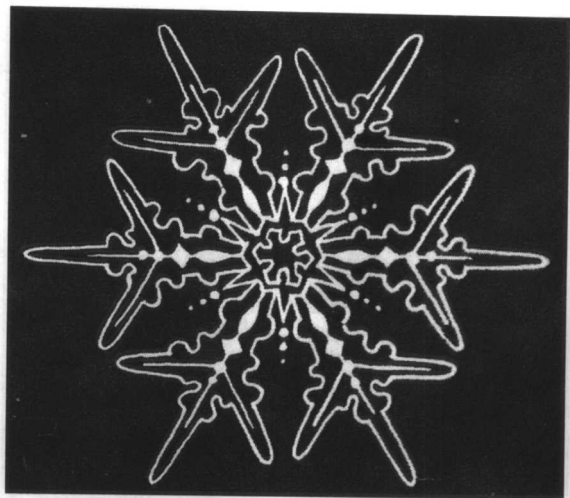
化的各种向度。“袖珍经典”则以相对简约的形式，收录名家大师们在体裁和风格上独具特色的经典作品，阐幽发微，意趣兼得。

遵循现代人文教育和公民教育的理念，秉承“通达民情，化育人心”的中国传统教育精神，“大学经典”依据中西文明传统的知识谱系及其价值内涵，将人类历史上具有人文内涵的经典作品编辑成为大学教育的基础读本，应时代所需，顺时势所趋，为塑造现代中国人的人文素养、公民意识和国家精神倾力尽心。“开放人文”旨在提供全景式的人文阅读平台，从文学、历史、艺术、科学等多个面向调动读者的阅读愉悦，寓学于乐，寓乐于心，为广大读者陶冶心性，培植情操。

“大学之道，在明明德，在新民，在止于至善”（《大学》）。温古知今，止于至善，是人类得以理解生命价值的人文情怀，亦是文明得以传承和发展的精神契机。欲实现中华民族的伟大复兴，必先培育中华民族的文化精神；由此，我们深知现代中国出版人的职责所在，以我之不懈努力，做一代又一代中国人的文化脊梁。

上海世纪出版集团  
世纪人文系列丛书编辑委员会  
2005年1月

# 对 称





## 序言及文献评注

从对称性等于各部分比例之和谐(symmetry = harmony of proportions)这一多少有点含混的观念出发,我在本书的四讲中首先通过对称性的几种形式,如双侧对称性、平移对称性、旋转对称性、装饰对称性和结晶对称性等,逐步展示出对称性的几何概念,最后上升到作为所有这些特殊形式基础的一般观念:组元的构形在其自同构变换群(group of automorphic transformations)作用下所具有的不变性(invariance)。我的目的有两个:一方面展示出对称性原则在艺术以及无机界和有机界中的大量应用;另一方面我将逐步阐明对称性观念的哲理性的数学意义。为了达到后一目的,我们必须接触有关对称性和相对性的一些概念和理论;而使正文生色不少的大量插图将帮助我们达到前一目的。

本书不只是为学者和专家们写的,我心目中的读者面要广泛得多。虽然我并不回避数学(否则就达不到我们的目的),但是为了不超过本书预定的深度,我对书中

论述的大多数问题并不作详细的处理，尤其是不作完备的数学处理。1951年2月，我在普林斯顿大学的瓦尼克桑讲座(Louis Clark Vanuxem Lectures)作了几次演讲。本书就是把这些演讲稍作修改，再加上了给出一些数学证明的两个附录而编成的。

这一领域中的其他一些书，例如耶格(F. M. Jaeger)的经典著作《关于对称原理及其在自然科学中的应用》(*Lectures on the Principle of Symmetry and its Applications in Natural Science*, Amsterdam and London, 1917)，或者更近一些的由尼科勒(Jacque Nicolle)撰写的篇幅小得多的小册子《对称性及其应用》(*La symétrie et ses Applications*, Paris, Albin Michel, 1950)，虽然涉及的内容方面都更为详尽一些，但只论述了部分题材。在汤普森(D'Arcy Thompson)的巨著《论生长与形式》(*On Growth and Form*, New Edition, Cambridge, Engl., and New York, 1948)中，对称性只不过是一个枝节问题。施派泽(Andreas Speiser)的专著《有限阶群论》(*Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 3. Aufl. Berlin, 1937)以及他的其他一些论著，给出了这一课题中有关美学方面和数学方面的重要梗概。汉比奇(Jay Hambidge)的《动态对称性》(*Dynamic Symmetry*, Yale University Press, 1920)只是在书名上与本书几乎相同而已。在内容上与本书最为接近的，也许是德文期刊《*Studium Generale*》1949年7月号论述对称性的那一期(Vol. 2, pp. 203~278, 今后引作

*Studium Generale*)。

在本书末尾，可以找到书中插图来源的一份完整的清单。

我极其感谢普林斯顿大学出版社及其编辑们，感谢他们对出版这本小书所给予的里里外外的极大关切，我也同样感谢普林斯顿大学校方赐与我机会，使我在从高等研究院退休前夕有幸能作这最后一次的演讲。

赫尔曼·外尔

1951年12月于苏黎世

## 目录

序言及文献评注 / 1

双侧对称性 / 1

平移对称性、旋转对称性和有关的  
对称性 / 43

装饰对称性 / 91

晶体·对称性的一般数学观念 / 129

附录 A 确定三维空间中由真旋转  
构成的所有有限群 / 159

附录 B 计入非真旋转 / 167

致谢 / 169

## 双侧对称性

如果我没有搞错的话，**对称性**一词在日常用语中有两种含义。一种含义是，对称的(symmetric)即意味着是非常匀称和协调的；而对称性(symmetry)则表示结合成整体的好几部分之间所具有的那种和谐性。**优美**(beauty)是与对称性紧密相关的，例如波利克莱托斯(Polykleitos)\* (写过一本论述匀称的书，其雕塑作品之和谐完美也深为古希腊人所称颂)就用过这一字眼，而后来丢勒(Albrecht Dürer)\*\* 仿效他为人体形态的比例制定了一套标准。<sup>1</sup> 就此意义来说，对称性涉及的范围决不只限于空间中的物体。当用于声学 and 音乐，而不是几何对象时，它的同义词“和谐”(harmony)更能说明情况。德语中的 *Ebenmass* 一词很能表达希腊语中对称性的意思。因

---

\* 波利克莱托斯，公元前5世纪古希腊雕塑家。他对理想的男性古典美规定了一套标准。——译者

\*\* 丢勒(1471~1528)，德国油画家、版画家、雕塑家和建筑师。——译者

为像后者一样，它也有“中庸程度”这一涵义，根据亚里士多德(Aristotle)\*的《伦理学》(Nicomachean Ethics)，这是有贤德的人在其行动中应予追求之美德。而盖仑(Galen)\*\*在他的《论气质》(De temperamentis)一书中把它描述为一种与两个极端都等距的心灵境界(σύμμετρον ὀπίρ' ἰκατέρου τῶν ἄκρων ἀπέχαι)。

天平的形象使我们能自然地联系到对称一词的第二种含义(这是近代使用对称这词所指的意思)。天平具有**双侧对称性**(bilateral symmetry)，即左和右的对称性。这种对称性在高等动物(尤其是人体)结构中是很明显的。现在这一双侧对称性是一个严格的几何概念，它不同于前面讨论过的那种含混的对称观念，是一个绝对精确的概念。一个物体，即一个空间构形，如果在关于给定平面  $E$  的反射下变成为其自身，我们就说它关于  $E$  是对称的。取垂直于  $E$  的任意直线  $l$  以及  $l$  上的任意一点  $p$ ，那么此时在  $l$  上(在  $E$  的另一侧)就存在一点  $p'$  (且只存在一点  $p'$ ) 与  $E$  有同样的距离。仅当  $p$  在  $E$  上，点  $p'$  才与  $p$  重合。关于  $E$  的反射是空间到其自身上的映射(mapping)  $S: p \rightarrow p'$ ，这一映射把任意点  $p$  变为它关于  $E$  的镜像  $p'$ 。每当确立了一个规则，而由此规则每一点  $p$  都有一个像  $p'$  与之对应，这就定义了一个映射。再举

\* 亚里士多德(公元前384~前322)，古希腊哲学家和科学家。——译者

\*\* 盖仑(约129~200)，古希腊医师、自然科学家和哲学家。——译者

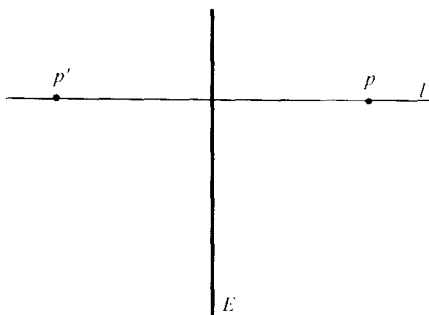


图 1 关于  $E$  的反射

一个例子：例如绕一垂直轴旋转  $30^\circ$ ，这一旋转将空间的每一个点  $P$  变为另一点  $P'$ ，因此也定义了一个映射。如果图形在绕轴  $l$  的所有旋转下，仍变为其自身，那么我们就称该图形关于轴  $l$  有旋转对称性 (rotational symmetry)。这样，双侧对称性就作为几何对称性的第一实例出现了，几何对称性就是指诸如反射和旋转那样的操作。毕达哥拉斯(Pythagoras)\* 学派认为，平面中的圆周、空间中的球面是最完美的几何图形，因为它们有着全部的旋转对称性。而亚里士多德认为天体是球形的，因为任何其他图形都会有损于它们作为天国的完美性。正是承袭了这一传统，在一首近代诗中<sup>2</sup> 上帝被赞誉为“汝，伟大的对称”：

---

\* 毕达哥拉斯(约公元前 580~前 500)，古希腊数学家和哲学家。在西方，他首先提出了勾股定理。——译者

伟哉对称是上帝，  
爱欲深激于吾身，  
悲情同时油然而生。  
年华虚度日复日，  
皆因方式失匀称，  
祈乞赐吾完美形。

不管你把对称性定义得是宽还是窄，它一直都是人们长时期以来用以理解和建立秩序(order)、优美(beauty)和完善(perfection)的一种概念。

我的讲演安排如下：首先我将较为详尽地讨论双侧对称性和它在有机界和无机界以及艺术中的作用。然后将按我们旋转对称性的例子所表明的方向，逐渐推广这一概念。即首先局限在几何的范围中讨论，接着通过数学抽象过程来超越这一界限，沿着这一条道路最终使我们能得到一个非常一般性的数学概念，这可以说是在对称性的所有个别表现和应用背后的柏拉图(Plato)\* 式的观念。在某种程度上来说，这种做法是所有理论认识的共有特征：我们从某个一般而又含混的原则(第一种意义下的对称性)开始，然后去寻找一个重要的实例，在其中我们的概念会有一个具体而精确的意义(双侧对称性)，

---

\* 柏拉图(公元前 427~前 347)，亚里士多德的老师。他的哲学思想对西方哲学的影响极大。主要著作有《理想国》、《法律篇》等。——译者



并且由此出发，主要依靠数学构造和抽象的指引（比受哲学幻想的指导要多得多），再逐渐地上升为一般性。而且，如果幸运的话，我们最终得到的概念的普适性将不会比我们原始的那个概念差。也许此时情感上的吸引力已丧失殆尽，但是这种概念在思维的领域中却具有同样的、甚至是更强的统一力量，而且它是精确无误的，而不再是含混不清的。

我们从欣赏“祈祷的男孩”（图2），一座公元前4世纪的高雅的希腊雕像、艺术上的上乘之作，开始讨论双侧对称性，并以此作为一个象征让你感受到此种对称性在生命和艺术中所具有的巨大意义。人们可能会问，对称性的美学价值是否是由其生命力价值所决定的：这位雕塑家是否发现了大自然根据某种内在的法则赋予其造物以对称性，然后再复制和完善大自然以不完整的形式所呈现出来的那种对称性？抑或对称性的美学价值有其完全独立的根源？我和柏拉

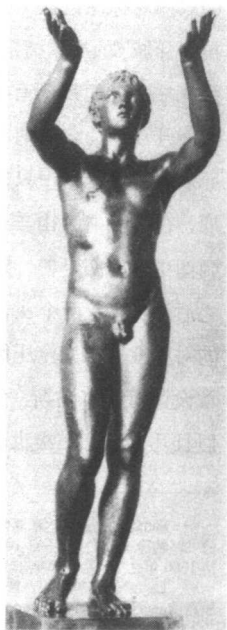


图2