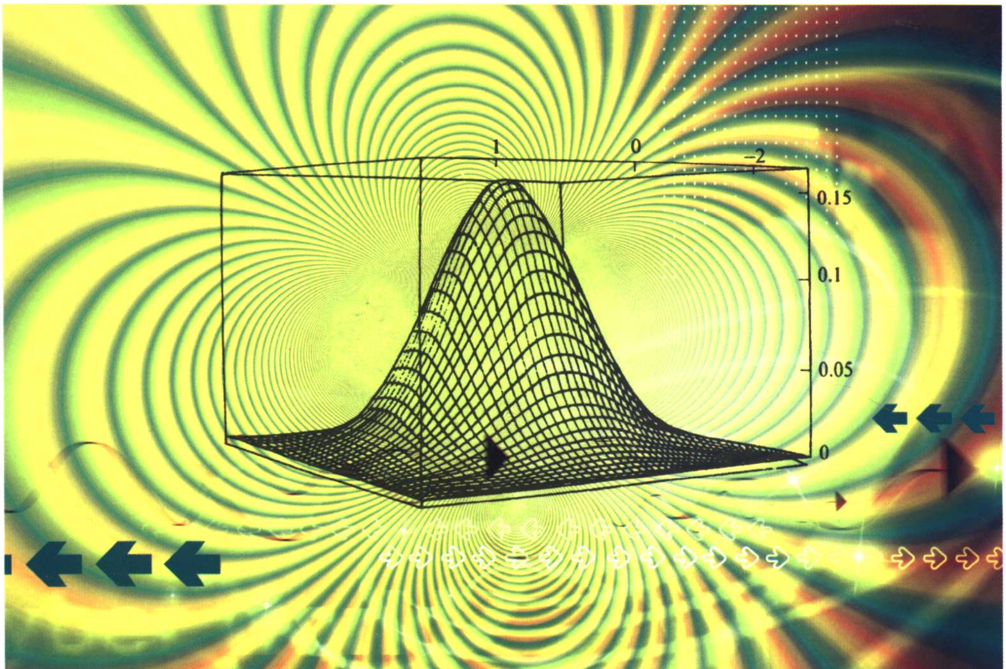
21世纪高等学校教材

GAILULUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主编　马洪宽　张华隆



上海交通大学出版社

21 世纪高等学校教材

概率论与数理统计

马洪宽　张华隆　主编
蒋凤瑛　主审

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书分9章，内容包括随机事件与概率、一维随机变量、多维随机变量、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。每章附有习题，书末还附有一系列数学用表、习题答案。本书深入浅出、逻辑清晰、理论严谨、叙述明确，以生产生活实践为背景引入数学概念，便于学生理解掌握。

本书可作为高等院校概率论与数理统计课程的教材或教学参考书，也可供工程技术人员参考。由于编者长期处在教学第一线并拥有多年指导学生考研及参加全国数学建模竞赛的背景，本书对有志考研的读者不无益处。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 马洪宽、张华隆主编. —上海：上海交通大学出版社，2005
21世纪高等学校教材
ISBN 7-313-04065-2

Ⅰ.概...　Ⅱ.①马...②张...　Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第088340号

概率论与数理统计
马洪宽　张华隆　主编
上海交通大学出版社出版发行
（上海市番禺路877号　邮政编码200030）
电话:64071208　出版人:张天蔚
昆山市亭林印刷有限责任公司印刷　全国新华书店经销
开本:787mm×960mm　1/16　印张:15.75　字数:291千字
2005年8月第1版　2005年8月第1次印刷
印数:1－10050
ISBN 7－313－04065－2/O·125　定价:22.00元

编者的话

概率论与数理统计都是研究随机现象统计规律性的数学学科。概率论是对随机现象统计规律的演绎的研究,而数理统计是对随机现象统计规律的归纳的研究,它们互相渗透,互相联系。概率论与数理统计是高等院校的一门基础课。

编者根据自己多年的教学心得编写此书。我们致力于从易学的角度出发,讲清楚最基本的概念和方法。为了达到这个目的,同时也为了说明这门学科在实际生活中的广泛应用,我们在本书的编写中力求深入浅出、逻辑清晰、理论严谨、叙述明确,以生产生活实践为背景引入数学概念,便于学生理解掌握。为此,我们精心挑选了大量例题。由于编者长期处在教学第一线并拥有多年指导学生考研及参加全国数学建模竞赛的背景,本书对有志于考研的读者不无益处。

本书的第一部分为概率论,包括第1、2、3、4、5章。第二部分为数理统计,包括第6、7、8、9章。本书由马洪宽、张华隆任主编,郭白妮任副主编。

在本书的编写过程中,得到许多朋友、家人和同事的支持和帮助,特别是数学系副主任蒋凤瑛教授在百忙之中抽空仔细审阅了本书并提出许多宝贵的意见,在此谨表感谢。

由于编者的水平有限,书中有许多不足之处,敬请读者批评指正。

编　者

2005年初夏于同济大学

引　言

在自然界和人类社会中存在着两种不同的现象。一类为在一定的条件下必然会发生或必然不会发生的事情。例如:“太阳必然是从东方升起,西方落下”;“上抛的石头必然要下落”;“同性电荷必然不会互相吸引”等。所有这类现象我们称为确定性现象。但在自然界和人类社会中还广泛存在着与确定性现象有本质区别的另一类现象:在一定的条件下可能出现这种结果也可能出现那种结果,而在试验或观察之前不能预知确切的结果。例如:“上抛一枚一元的硬币,落地时,可能是币值面(以后记为‘正面’)朝上,也可能是花面(以后记为‘反面’)朝上”,在其着地前是无法断言哪一面朝上的;“一个射手用同一支枪向同一个目标射击,在一次射击前,无法预测成绩到底是几环”;“从一企业生产的一批产品中,任取一件,它是合格品还是不合格品”;“本地区今晚是否下雨”等。但人们经过长期实践并深入研究之后发现,这类现象在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现某种规律性。例如:重复上抛一枚硬币得到正面朝上的次数大致是总上抛次数的一半;一个地区每年的年降雨量有一定的规律。这些在大量重复试验或观察中所呈现的固有规律性称为统计规律。这类在个别试验中其结果呈现不确定性,在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,称为随机现象。概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律的数学学科。由于随机现象的普遍性,使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用。

目 录

第 1 章　随机事件与概率

本章介绍了概率论中的基本概念——随机事件与概率，并讨论了条件概率、事件的独立性及贝努里概型.

1.1　随机事件与样本空间

1.1.1　集合

1. 集合的概念

为了更好地理解随机事件的概念及其运算，我们先回顾一下集合的概念. 一些具有确定性质的对象的全体称为一个**集合**. 例如：

“某班的全体同学”；“全体正整数”；“小说《三国演义》第 86 页上所有的字”；“区间$[a, b]$上的所有的点”等都是集合的例子. 集合里的各个对象称为集合的**元素**. 集合的元素可能是各种各样的对象，如上面例子中的人、数、字、点等. 为了区别，一般用大写字母 A,B,C 等表示集合，用小写字母 a,b,c 等表示集合的元素，$a\in A$ 表示 a 是 A 的元素，$a\notin A$ 表示 a 不是 A 的元素.

2. 集合的表示方法

集合的表示方法有**列举法**和**描述法**.

把集合中的元素一一列举出来并写在大括号内，这种表示集合的方法称为**列举法**. 例如，向前高级中学的高三(2)班有两个共产党员王英和李进，则用列举法表示向前高级中学的高三(2)班的全体共产党员这个集合为{王英，李进}.

把集合中的元素的共同特性描述出来并写在大括号内，这种表示集合的方法称为描述法. 例如，小于 5 的自然数这个集合为$\{x\in \mathbf{N} \mid x<5\}$.

含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限个元素的集合称为**无限集**. 如“某班的全体同学”就是一个有限集，“全体正整数”就是一个无限集. 如果一个无限集中的元素可以与正整数集合一一对应，则称此集合为**可数集**或**可列集**. 例如：

$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$就是一个可数集，有限集与可数集都可以表示为$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$. 如果一个无限集合的元素个数与$[0,1]$中的点一一对应，则此无限集合称为**不可数集合**或**连续集合**. 不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$.

3. 集合与集合的关系

(1) 子集

对于两个集合A,B，如果集合B中的任何一个元素都是集合A中的元素，那么集合B称为集合A的子集，记作$B\subseteq A$. 例如，高三(2)班的全体共产党员这个集合是高三(2)班的全体同学这个集合的子集.

如果集合B是集合A的子集，且集合A中至少有一个元素不属于集合B，则集合B称为集合A的真子集，记作$B\subset A$. 例如，高三(2)班的全体共产党员这个集合是高三(2)班的全体同学这个集合的真子集.

如果集合B是集合A的子集，且集合A又是集合B的子集，即$B\subseteq A$与$A\subseteq B$同时成立，则称集合A与集合B**相等**，记为$A=B$.

(2) 并集

由集合A与集合B的所有元素合并在一起所组成的集合，称为集合A与集合B的**并集**，记为$A\cup B$.

由并集的定义，有$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$.

(3) 交集

由集合A与集合B的所有公共元素所组成的集合，称为集合A与集合B的交集. 记为$A\cap B$或AB.

由交集的定义，有$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4) 补集

全集：在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合称为**全集**，用符号U表示.

已知全集U，集合$A\subseteq U$，由U中所有不属于集合A的元素所组成的集合，称为集合A在集合U中的**补集**，记为C_UA，或$\overline{A}$.

由补集的定义，有$A\cup\overline{A}=U$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$.

(5) 差集

由所有属于集合A且不属于集合B的元素所组成的集合，称为集合A与集合B的**差集**，记作$A-B$.

(6) 笛卡尔积

称集合$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$为集合$A$与集合$B$的**笛卡尔积**.

4. 集合的运算规律

① 交换律 $A\cup B=B\cup A$,

$A\cap B=B\cap A$;

② 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

③ 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

④ 对偶律 [德莫根(De Morgan)定理]

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些规律可以推广到任意多个集合上去.

证明 我们仅证明:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

因任取 $a\in\overline{A\cup B}$,有 $a\in\overline{A\cup B}$, $a\notin A\cup B$,即 $a\notin A$ 且 $a\notin B$,所以 $a\in\overline{A}$ 且 $a\in\overline{B}$,故 $a\in\overline{A}\cap\overline{B}$,这就证明了

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}.$$

同理,我们可以证明 $\overline{A\cup B}\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

5. Venn 图

全集 U 常表示为一个长方形内部的点所组成的集合,在这种情况下,U 的子

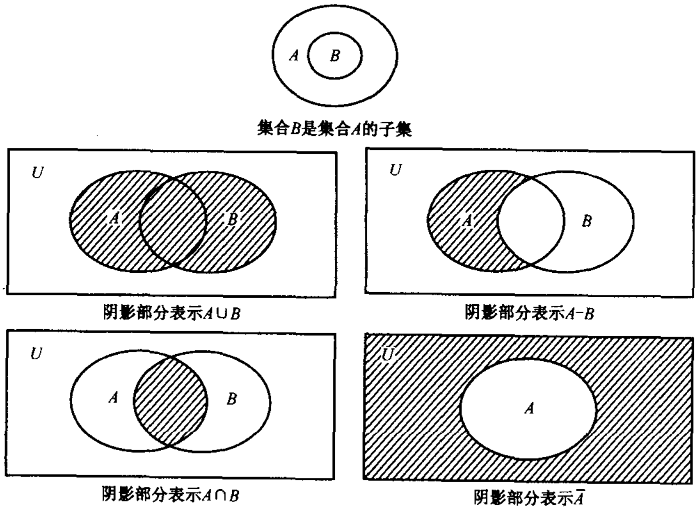


图 1.1

集由长方形内部的圆内部的点所组成的集合来表示，这样的图称为 Venn 图(见图 1.1)，关于集合之间的关系，Venn 图提供了直观的解释.

1.1.2 随机事件

1. 随机事件的定义

我们知道在科学研究和工程项目的工作中，试验是很重要的. 并且我们也知道在许多问题中，如果在相同的条件下进行重复试验，就能得到基本相同的结果. 但不知道大家是否注意到也存在着一类试验，虽然条件是相同的，而试验的结果却相差很大. 先做两个试验：

试验 1 在一个盒子中放入 10 个完全相同的白球，搅匀后盖上布，然后把手伸入布下，任意摸取一球.

做这个试验，在球没有取出之前，就能确定取出的必定是白球. 在试验之前就能断定试验有一个确定的结果，这种类型试验所对应的现象就是我们前面所说的确定性现象.

试验 2 在一个盒子中放入 10 个形状完全相同的球，5 个是白色的，5 个是黑色的，搅匀后盖上布，然后把手伸入布下，任意摸取一球.

做本试验，在取出球之前，不能确定取出的球是白色的还是黑色的. 在一次试验之前无法断定这次试验的结果，该类型试验所对应的现象即我们前面所说的随机现象.

一个试验如果满足下列条件：

① 试验可以在相同的条件下重复进行；

② 试验所有的可能结果是明确可知道的，并且不止一个；

③ 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在一次试验之前却无法确定这次试验会出现哪一个结果.

称这个试验是一个**随机试验**，在不引起误解时，也简称为**试验**. 上边的试验 2 就是一个随机试验. 下面我们再看一些随机试验的例子：

例 1.1 向上抛一枚硬币，着地时或者出现正面朝上，或者出现反面朝上.

例 1.2 掷一粒骰子，试验的结果将出现$\{1,2,3,4,5,6\}$中的一个.

例 1.3 检查某企业生产的一批产品(共 N 个)质量，其中正品的个数是$\{1,2,\cdots,N\}$.

例 1.4 测量某企业生产的一件电子元件的寿命，试验的结果将出现$[0,+\infty)$中的一个数.

随机试验的每一个可能的结果，称为**基本事件**(**或样本点**)，记为 ω. 因为随机

试验的所有可能结果是明确的，所以所有的基本事件也是明确的，所有的基本事件的全体称为**样本空间**，记为Ω. 则

例 1.1 中，$\omega_1=\{正\}$，$\omega_2=\{反\}$是两个基本事件，样本空间为$\Omega=\{正,反\}$.

例 1.2 中，$\omega_1=\{1\}$，$\omega_2=\{2\}$，$\cdots$，$\omega_6=\{6\}$是 6 个基本事件，样本空间为$\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

例 1.3 中，任何一个自然数 $0,1,2,\cdots$，都是一个基本事件，样本空间为$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 1.4 中，任何一个非负实数都是一个基本事件，样本空间为$\Omega=[0,+\infty)$. 虽然一个电子元件的寿命肯定是一个有限的数，但一般说来人们从理论上很难定出一个电子元件的寿命的有限上限. 为了方便，我们把上限记为无穷大.

在随机试验中，我们常常关心的是带有某些特征的基本事件是否发生. 如在例 1.2 中，讨论：(a) 点数 1 的面出现；(b) 点数为偶数的面出现；(c) 点数小于 3 的面出现. (a) 是一个基本事件，(b)和(c)是由数个基本事件组成的，称为**复杂事件**. 不管是基本事件还是复杂事件，它们在随机试验中发生与否都带有随机性，所以都称为随机事件，不误解时简称为事件. 事件通常用大写字母 A,B,C 等表示. 如 $A=\{1\}$，$B=\{点数为偶数的面\}$，$C=\{点数小于 3 的面\}$. 在试验中，如果出现 A 中包含的某个基本事件，则称为事件 A **发生**，否则称为事件 A **不发生**.

样本空间包含了全体基本事件，随机事件是由具有某些特征的基本事件组成的，因此一个随机事件是样本空间的子集.

因为样本空间Ω是由所有的基本事件组成的，而在任何一次试验中，总要出现Ω中的某个基本事件，所以在任何一次试验中Ω必然会发生，所以也用样本空间Ω表示一个必然事件. 同样，空集$\varnothing$是样本空间Ω的子集，但不可能含有基本事件$\omega\in\varnothing$，即在任何一次试验中$\varnothing$不可能发生，所以$\varnothing$是不可能事件，不可能事件也用$\varnothing$表示. 必然事件与不可能事件的发生与否已经没有了不确定性，本质上它们不是随机事件，但为了方便，把它们作为随机事件的两个极端情形.

2. 事件之间的关系和运算

对随机现象的研究，许多情况下主要是研究随机事件发生的规律. 一个样本空间中可能有很多的随机事件，有的较简单，有的较复杂，有的可能已知，有的可能还是未知的. 为了能通过较简单的事件讨论较复杂的事件，从已知的事件探索未知的事件，需要研究事件之间的关系和事件之间的一些运算. 由于事件就是集合，因此事件之间的关系和运算就是集合之间的关系和运算，下面叙述事件之间的关系和运算. 以后如果不特别强调时，我们总假设样本空间Ω已经给定，并且给定了Ω中的一些事件，如 $A,B,A_i(i=1,2,\cdots)$等.

① 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$.

在例 1.2 中，事件 A"点数 1 的面出现"，事件 C"点数小于 3 的面出现"，则 $A\subset C$.

② 如果两个事件 A,B 总是同时发生或同时不发生，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$，或者如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，同时事件 B 发生必然导致事件 A 发生，则称事件 A 与事件 B 相等(验证两个事件是否相等时，常用这个方法).

在例 1.2 中，事件 $B=\{$点数为偶数的面$\}$，事件 $D=\{2,4,6\}$. 则 $B=D$.

③ 一个事件发生当且仅当事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的和事件(或并事件)，记此事件为 $A\cup B$.

在例 1.2 中，"点数为 1,2,4,6 的面"有一个出现，即为和事件 $A\cup B$ 发生.

④ 一个事件发生当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的积事件(或交事件)，记此事件为 $A\cap B$ 或 AB.

在例 1.2 中，"点数为 2 的面"出现，即为积事件 BC 发生.

⑤ 一个事件发生当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记此事件为 $A-B$.

在例 1.2 中，$C-B=\{1\}$，即"点数 1 的面"出现，为差事件 $C-B$ 发生.

⑥ 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互不相容. 此时 AB 是一个不可能事件，即 $AB=\varnothing$.

在例 1.2 中，事件 A 与事件 B 互不相容，"点数 1 的面"出现与"点数为偶数的面"出现一起发生是不可能的.

⑦ 如果一个事件发生当且仅当事件 A 不发生，则称此事件为事件 A 的逆事件(或对立事件，有的书上也称为余事件)，记此事件为 $\overline{A}$.

因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，所以 A 与 $\overline{A}$ 两者只能发生其中之一，也必然发生其中之一. 并且 $\overline{\overline{A}}=A$，$A-B=A\overline{B}$.

同样，事件之间的运算也满足下列运算规律：

① 交换律 $A\cup B=B\cup A$，

$A\cap B=B\cap A$；

② 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

③ 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

④ 对偶律(德莫根定理)

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B};$$

这些规律可以推广到任意多个事件上去.

例 1.5 设 A,B,C 为三个事件，由事件之间的关系和运算，用 A,B,C 表示下列事件：

① A 发生且 B 与 C 至少有一个发生；

② A 与 B 都发生而 C 不发生；

③ A,B,C 中至少有一个发生；

④ A,B,C 中恰有一个发生；

⑤ A,B,C 都不发生；

⑥ A,B,C 不都发生.

解 ① $A(B\cup C)$.

② $AB\overline{C}$.

③ $A\cup B\cup C$.

④ $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

⑤ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$.

⑥ $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

例 1.6 试求事件“王英成绩好而赵雄成绩不好”的逆事件.

解 设 $A=\{$王英成绩好$\}$，$B=\{$赵雄成绩好$\}$，则 $A\overline{B}=\{$王英成绩好而赵雄成绩不好$\}$，而 $\overline{A\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup B$，因此事件“王英成绩好而赵雄成绩不好”的逆事件为事件“王英成绩不好或赵雄成绩好”.

1.2 概率与频率

在一次随机试验中，随机事件 A 可能发生也可能不发生，只讨论随机试验可能发生的结果是不够的，因此我们要讨论随机事件 A 发生的可能性. 表示随机事件 A 发生的可能性的数称为 A 发生的**概率**，记为 $P(A)$. 有了概率的概念，就能够对随机现象进行定量研究.

先定义事件发生的频率的概念，通过事件发生的频率的概念来引出概率的概念.

定义 1.1 如果随机事件 A 在 n 次的重复试验中，出现了 n_A 次，则称 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 为随机事件 A 在 n 次的重复试验中出现的**频率**.

在长期的实践中，人们发现，虽然一个随机事件 A 在一次随机试验中可能发

生也可能不发生，但在大量的重复试验中，这个事件的发生却呈现出明显的规律性——频率稳定性，即频率在一个固定的数附近上下波动. 历史上，有许多人做过重复上抛一枚硬币，记录着地时正面朝上的次数的试验，如下表所示.

实验者	试验次数 n	出现正面次数 n_A 次	出现正面频率 $f_n(A)$
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

由此表可以观察到当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于常数 0.5.

定义 1.2(概率的统计定义)　当随机试验次数 n 增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 将稳定于某个常数 P，则称 P 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$.

实际应用中，常常就简单地把频率当作概率来使用，有时试验次数不是很大时，也这样使用。

概率统计定义的重要性，不在于它提供了一种定义概率的方法. 它实际上没有具体提供计算事件概率的方法. 因此不可能依据这一定义确切地给出任何一个事件的概率。概率的统计定义的重要性有两点：

① 一种估计概率的方法；

② 一种检验理论正确与否的准则(基于实践是检验真理的唯一标准).

例如，根据某一理论或假定算出了某事件 A 的概率为 p，这一理论或假定是否与实际相符合并无把握，因此只能从实践出发，进行大量重复的试验以观察事件 A 的频率 $f_n(A)$. 如果 $f_n(A)$ 与 p 接近，则可以认为这一理论或假定是正确的，如果 $f_n(A)$ 与 p 相差较大，则可以认为这一理论或假定是不太正确的.

1.3　古典概型

对一个随机事件 A，如何计算它的概率 $P(A)$，这是本章的一个主题. 要计算随机事件发生的概率是比较复杂的，而且不同类型的随机试验(又称为概型)常有不同的计算方法. 下面我们讨论两种最简单的概型——古典概型和几何概型.

1.3.1　古典概型

定义 1.3　若一个随机试验满足下列两个特征：

① 试验的样本空间中的基本事件的个数是有限的，即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$；

② 每个基本事件的发生是等可能的，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$，则称此试验为**等可能概型**.

由于这一概型最早被人们研究，故又称为**古典概型**. 1.1 中的例 1.1 和例1.2 这两个试验都是古典概型. 因为古典概型中，每个基本事件的发生概率是相同的，所以对有 n 个基本事件的样本空间，每个基本事件的发生概率是$\frac{1}{n}$. 对一个随机事件 A，n_A 为事件 A 中包含的基本事件的个数，则有

$$P(A)=\frac{n_A}{n},$$

此式也称为概率的古典定义或古典概率计算公式.

例 1.7 有一个袋子，内装形状相同的球 $a+b$ 只，其中 a 只为黑球，b 只为白球，任意摸出一球，求此球是黑球的概率.

解 因为从袋中任意摸出一球，而球的形状又完全相同，所以每个球被摸出的可能性是相等的，这是等可能概型或古典概型. 样本空间 $\Omega=\{$黑，黑，…，黑(共 a 个)，白，白，…，白(共 b 个)$\}$. 设“摸到黑球”为事件 A 发生，即 $A=\{$黑，黑，…，黑(共 a 个)$\}$. 利用上面的公式，所以，$P(A)=\frac{a}{a+b}$.

这个例子很简单，但它可以应用到许多实际问题中，例如产品的抽样检查. 产品的抽样检查技术在许多部门中被广泛采用. 许多企业的生产产量很大，对这些产品质量进行全面的逐件检验是不可能的. 另外，在有些情况下，产品的检验带有破坏性(如电子元件的寿命检验)，因此这样做也是不经济的. 所以最适宜的检验方法是采用抽样检查，即从产品中随机地抽出(这意思是每件产品以相等的可能性被取得)若干件来检验，根据检验结果来判断整批产品的质量. 假设产品的质量从表面上看不出来，而且我们又是随机抽样，那么任何一件产品被抽到的可能性都一样，这正是古典概型. 关于产品的质量，可以有多种多样的衡量标准. 最简单的情形就是把产品分成合格品和不合格品两个类型，正如刚才的例子，黑球为合格品，白球为不合格品. 复杂的可以分为一等品、二等品、三等品、四等品等. 这就如同一个袋子中装了好几种颜色的形状完全相同的球.

古典概型中许多概率的计算不像例 1.7 那么容易，有的甚至相当困难，需要一些技巧. 计算的要点是样本空间里的基本事件的总数及所求事件中包含的基本事件的个数，再利用公式及概率的性质进行解题. 并且当样本空间里的基本事件的总数较大时，通常不需要将样本空间里的基本事件一一列出，而只需要分别求出样本空间里的基本事件的总数及所求事件中包含的基本事件的个数. 下面再举一些计算古典概型的概率的例子，但是读者不一定要做很难的题.

例 1.8 从一副扑克牌中随机地抽取一张牌. 求下列各随机事件的概率.