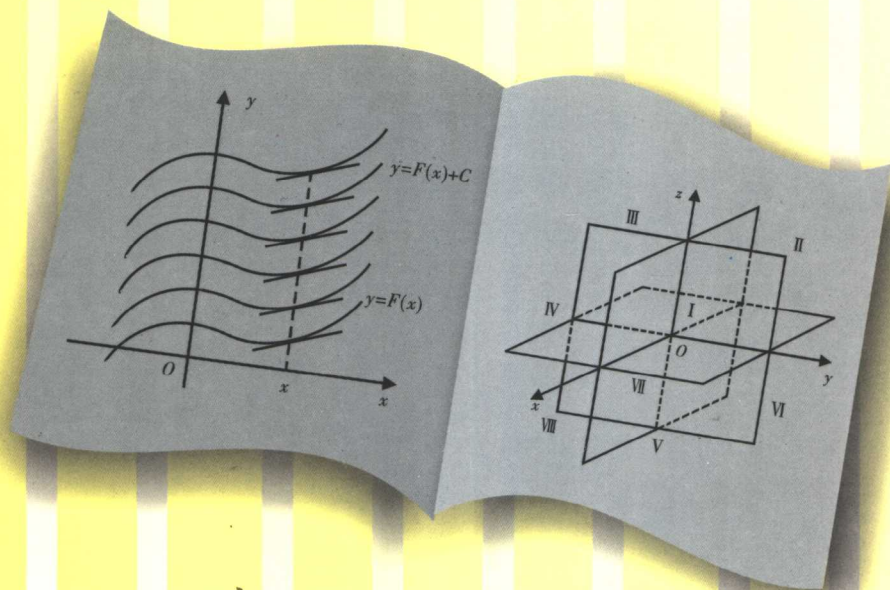


# 高等数学

■ GAODENGSHUXUE

■ 主编 王卫平 霍本瑶 张滨燕



郑州大学出版社



# 高等数学

GAODENGSHUXUE

主 编 王卫平 霍本瑶 张滨燕

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王卫平,霍本瑶,张滨燕主编. —郑州:郑州大学出版社,2003.9  
ISBN 7-81048-820-1

I. 高… II. ①王…②霍…③张… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 068286 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号

出版人:谷振清

全国新华书店经销

郑州文华印刷厂印制

开本:787 mm × 1 092 mm

印张:21.75

字数:510 千字

版次:2003 年 9 月第 1 版

邮政编码:450052

发行部电话:0371-6966070

1/16

印次:2003 年 9 月第 1 次印刷

---

书号:ISBN 7-81048-820-1/G·69

定价:32.80 元

本书如有印装质量问题,由承印厂负责调换

## 作者名单

主 编:王卫平 霍本瑶 张滨燕  
副主编:田长申 郝艳莉 王艳红  
潘晓伟  
编 委:田长申 王卫平 霍本瑶  
张滨燕 郝艳莉 王艳红  
姚晓辉 孙全宝 李洪敏  
刘燕廷 潘晓伟

## 内容提要

本书概念简明、内容丰富、浅显易懂,每章节均有丰富的例题与习题,书后还配有习题答案及附录。是一本可供高职、高专及成人高校的教学用书,也可作为理工类自考学生的用书。

全书共十一章,其主要内容包括:极限与连续、导数与微分及应用、不定积分与定积分及应用、无穷级数、微分方程、空间解析几何、多元函数微分法、二重积分与曲线积分等。

## 前 言

教材建设是高职、高专院校教学的一项基本建设,为适应高职、高专院校的发展,根据全日制大学专科教学大纲以及《全国高职、高专机制专业统编教材(高等数学)编写大纲》,结合高职、高专院校特点,本着理论课时“够用、管用、实用”的“三用”原则,编写了这本教材。

本书内容精练,重点突出,概念简明,浅显易懂,涵盖面宽。与同类教材相比,内容进行了合理取舍,既照顾教材本身的知识体系又紧密联系专业实践,突出了“三用”原则,在编写中淡化了逻辑推理,强化了概念教学;淡化了技巧,突出了能力的培养,注重导数、微分、积分的教学,尽量立足于生产实践。

本书由王卫平、霍本瑶、张滨燕主编,田长申、郝艳莉、王艳红、潘晓伟为副主编,参加编写的还有孙全宝、姚晓辉、李洪敏、刘燕廷。具体分工如下。

第一章由田长申、潘晓伟编写,第二章由田长申、孙全宝编写,第三章由王卫平、姚晓辉编写,第四章由王卫平编写,第五章由张滨燕编写,第六章由张滨燕、李洪敏编写,第七章由霍本瑶、王艳红编写,第八章由霍本瑶编写,第九章、第十章由郝艳莉编写,第十一章由田长申、刘燕廷编写。

全书由田长申统稿。

本教材是河南职业技术学院教改教材,在编写过程中,得到了河南职业技术学院领导及诸多同志的通力合作和大力支持,在此谨致深切的谢意。

编写高职、高专教材是一种新的尝试。由于本书的编印比较仓促,不当之处在所难免,恳请社会各界的有关专家及广大读者批评指正。

编委

2003年6月

## 目 录

第一章 极限与连续 .....	(1)
第一节 初等函数 分段函数 .....	(1)
一、区间与邻域 .....	(1)
二、函数的概念 .....	(2)
三、函数的几种特性 .....	(3)
四、反函数 .....	(4)
五、基本初等函数及图像和性质 .....	(5)
六、复合函数 .....	(9)
七、初等函数 .....	(9)
八、分段函数 .....	(9)
第二节 函数的极限 .....	(11)
一、数列的极限 .....	(11)
二、函数的极限 .....	(12)
第三节 极限的四则运算法则 .....	(16)
第四节 两个重要极限 .....	(18)
一、极限存在准则 .....	(18)
二、两个重要极限 .....	(19)
第五节 无穷大与无穷小 .....	(20)
一、无穷小 .....	(21)
二、无穷大 .....	(21)
三、无穷小的比较 .....	(22)
第六节 函数的连续性与间断点 .....	(24)
一、函数的连续与间断的概念 .....	(24)
二、连续函数的运算与初等函数的连续性 .....	(26)
三、闭区间上连续函数的性质 .....	(27)
第一章综合练习 .....	(29)
第二章 导数与微分 .....	(31)
第一节 函数的变化率、导数的概念 .....	(31)
一、导数的定义 .....	(31)
二、求导举例 .....	(34)
三、导数的几何意义 .....	(35)
四、函数可导性与连续性的关系 .....	(36)
第二节 初等函数的微分法 .....	(37)



一、导数的四则运算法则 .....	(37)
二、反函数的求导法则 .....	(38)
三、复合函数求导法则 .....	(39)
第三节 高阶导数 .....	(41)
第四节 隐函数及参变量函数的导数 .....	(42)
一、隐函数的求导方法 .....	(42)
二、参变量函数的求导方法 .....	(43)
第五节 微分及其简单应用 .....	(44)
一、微分的概念 .....	(44)
二、微分的几何意义 .....	(46)
三、微分基本公式与运算法则 .....	(46)
四、微分在近似计算中的应用 .....	(48)
第二章综合练习 .....	(49)
第三章 导数的应用 .....	(51)
第一节 中值定理 .....	(51)
第二节 未定式的极限(洛必达法则) .....	(54)
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限 .....	(54)
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限 .....	(56)
三、其他类型未定式的极限 .....	(57)
第三节 函数的单调性与极值 .....	(60)
一、函数单调性的判定 .....	(60)
二、函数的极值及其求法 .....	(63)
三、函数的最大值和最小值 .....	(66)
第四节 曲线的凹凸及拐点 渐近线 函数作图 .....	(69)
一、曲线的凹凸及拐点 .....	(70)
二、渐近线 .....	(71)
三、函数作图 .....	(73)
*第五节 曲率 .....	(76)
一、曲率的概念 .....	(76)
二、曲率半径 曲率圆 .....	(79)
第三章综合练习 .....	(80)
第四章 不定积分 .....	(82)
第一节 不定积分的概念与性质 .....	(82)
一、原函数 .....	(82)
二、不定积分 .....	(83)
三、不定积分的性质 .....	(84)

四、基本积分公式 .....	(85)
第二节 换元积分法 .....	(88)
一、第一类换元积分法(凑微分法) .....	(88)
二、第二类换元积分法 .....	(94)
第三节 分部积分法 .....	(100)
第四章综合练习 .....	(104)
<b>第五章 定积分</b> .....	<b>(106)</b>
第一节 定积分的概念和性质 .....	(106)
一、引例 .....	(106)
二、定积分的概念 .....	(109)
三、定积分的性质 .....	(111)
第二节 微积分基本公式 .....	(113)
一、变上限定积分函数及其导数 .....	(113)
二、积分中值定理 .....	(116)
三、牛顿-莱布尼兹公式 .....	(116)
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法 .....	(120)
一、定积分的换元积分法 .....	(120)
二、定积分的分部积分法 .....	(122)
第四节 广义积分 .....	(124)
一、无穷区间上的广义积分 .....	(124)
二、无界函数的广义积分 .....	(126)
第五章综合练习 .....	(129)
<b>第六章 定积分的应用</b> .....	<b>(131)</b>
第一节 定积分的微元法 .....	(131)
第二节 平面图形的面积 .....	(132)
第三节 旋转体的体积 .....	(136)
第四节 平面曲线的弧长 .....	(139)
一、直角坐标情形 .....	(139)
二、参数方程情形 .....	(140)
第五节 定积分的物理应用 .....	(141)
一、变力作功 .....	(141)
二、液体的侧压力 .....	(143)
第六节 平均值 .....	(145)
第六章综合练习 .....	(147)
<b>第七章 无穷级数</b> .....	<b>(149)</b>
第一节 数项级数的概念和性质 .....	(149)
一、数项级数及其敛散性 .....	(149)
二、级数收敛的必要条件 .....	(151)

第二节 正项级数 .....	(152)
一、正项级数收敛的条件 .....	(152)
二、正项级数收敛的判别法 .....	(153)
第三节 任意项级数 .....	(157)
一、交错级数 .....	(157)
二、绝对收敛与条件收敛 .....	(159)
第四节 函数项级数 .....	(160)
一、函数项级数的概念 .....	(160)
二、幂级数及其收敛性 .....	(161)
三、幂级数的运算 .....	(164)
第五节 函数的幂级数展开 .....	(166)
一、麦克劳林级数 .....	(166)
二、函数直接展开成幂级数 .....	(168)
三、间接展开法 .....	(170)
四、函数的幂级数展开式的应用 .....	(172)
*第六节 傅立叶级数 .....	(174)
一、三角级数、三角函数系的正交性 .....	(174)
二、函数展开成傅立叶级数 .....	(175)
*第七节 正弦级数和余弦级数 .....	(181)
一、奇函数和偶函数的傅立叶级数 .....	(181)
二、函数展开成正弦级数或余弦级数 .....	(182)
*第八节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数 .....	(184)
第七章综合练习 .....	(186)
第八章 微分方程 .....	(187)
第一节 微分方程的基本概念 .....	(187)
一、实例 .....	(187)
二、微分方程的基本概念 .....	(188)
第二节 一阶微分方程 .....	(190)
一、可分离变量的一阶微分方程 .....	(190)
二、齐次方程 .....	(192)
三、一阶线性微分方程 .....	(194)
四、贝努利(Bernoulli)方程 .....	(197)
第三节 可降阶的高阶微分方程 .....	(199)
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型微分方程 .....	(199)
二、 $y''=f(x,y')$ 型微分方程 .....	(199)
三、 $y''=f(y,y')$ 型微分方程 .....	(200)
第四节 二阶线性微分方程通解结构 .....	(202)
一、二阶线性齐次微分方程的解的结构 .....	(202)

二、二阶线性非齐次微分方程的解的结构 .....	(203)
第五节 二阶常系数线性微分方程的解法 .....	(204)
一、二阶常系数线性齐次微分方程的解法 .....	(205)
二、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 .....	(207)
第八章综合练习 .....	(211)
第九章 向量代数与空间解析几何 .....	(213)
第一节 空间直角坐标系 .....	(213)
一、空间直角坐标系 .....	(213)
二、空间两点的距离 .....	(214)
第二节 向量 .....	(216)
一、向量的概念 .....	(216)
二、向量的线性运算 .....	(216)
三、向量的坐标 .....	(218)
第三节 数量积 向量积 .....	(221)
一、向量的数量积 .....	(221)
二、向量的向量积 .....	(223)
第四节 平面及其方程 .....	(226)
一、平面的点法式方程 .....	(226)
二、平面的一般方程 .....	(226)
三、两平面的夹角 .....	(227)
第五节 空间直线及其方程 .....	(229)
一、空间直线的点向式方程和参数方程 .....	(229)
二、空间直线的一般方程 .....	(230)
三、两直线的夹角 .....	(231)
*第六节 曲面和空间曲线 .....	(231)
一、曲面及其方程 .....	(231)
二、空间曲线及其方程 .....	(235)
三、二次曲面 .....	(236)
第九章综合练习 .....	(239)
第十章 多元函数微分法 .....	(241)
第一节 多元函数的概念 .....	(241)
一、多元函数的定义 .....	(241)
二、二元函数的几何意义 .....	(243)
三、二元函数的极限 .....	(243)
四、二元函数的连续性 .....	(244)
第二节 偏导数 .....	(245)
一、偏导数的概念 .....	(245)
二、偏导数的求法 .....	(246)

三、高阶偏导数 .....	(248)
第三节 全微分的概念 .....	(250)
一、全微分的定义 .....	(250)
二、全微分在近似计算上的应用 .....	(251)
第四节 多元复合函数与多元隐函数微分法 .....	(252)
一、多元复合函数求导法则 .....	(252)
二、多元隐函数求导公式 .....	(255)
第五节 偏导数的几何应用 .....	(256)
一、空间曲线的切线与法平面 .....	(256)
二、曲面的切平面与法线 .....	(258)
第六节 多元函数的极值 .....	(260)
一、多元函数的极值 .....	(260)
二、多元函数的最大、最小值问题 .....	(261)
三、条件极值 .....	(262)
第十章综合练习 .....	(263)
<b>第十一章 重积分与曲线积分</b> .....	(265)
第一节 二重积分的概念与性质 .....	(265)
一、二重积分的概念 .....	(265)
二、二重积分的性质 .....	(267)
第二节 二重积分的计算法 .....	(269)
一、二重积分在直角坐标系中的计算方法 .....	(269)
二、二重积分在极坐标系中的计算方法 .....	(274)
第三节 曲线积分的概念与计算 .....	(278)
一、对弧长的曲线积分的概念与计算 .....	(279)
二、对坐标的曲线积分的概念与计算 .....	(281)
三、格林公式, 对坐标的曲线积分与路径无关的条件 .....	(285)
第十一章综合练习 .....	(290)
<b>附录</b> .....	(291)
<b>习题答案</b> .....	(309)

## 第一章 极限与连续

极限概念是高等数学中最重要、最基本的概念之一,极限方法也是高等数学中分析和研究问题的基本方法,高等数学中许多重要概念如连续、导数、微分、积分、级数等都要用极限来描述,它们的性质也要用极限的方法来论证,因此掌握极限的概念、基本性质及基本计算方法是十分重要的.

本章将讨论函数及初等函数的有关概念,然后讨论数列的极限和函数的极限的相关概念、基本性质及计算方法,而后再对无穷小量作详细讨论.

函数的连续性是与极限概念密切联系的另一个重要的概念,本章在引进函数连续概念的基础上,介绍间断点及其分类,并对初等函数的连续性作必要的讨论.

### 第一节 初等函数 分段函数

#### 一、区间与邻域

在高等数学中,经常用区间和邻域去表示一些数集,因此,我们对区间与邻域的概念加以介绍.

##### 1. 区间

区间是介于两实数之间的一切实数构成的数集,这两个实数称为区间的端点.

设  $a, b$  为两个实数,且  $a < b$ .

(1) 我们把满足不等式  $a < x < b$  的一切实数  $x$  的全体叫做开区间,记作  $(a, b)$ .

(2) 我们把满足不等式  $a \leq x \leq b$  的一切实数  $x$  的全体叫做闭区间,记作  $[a, b]$ .

(3) 我们把满足不等式  $a < x \leq b$  或  $a \leq x < b$  的一切实数  $x$  的全体叫做半开半闭区间,记作  $(a, b]$  或  $[a, b)$ .

为了能用区间表示  $x > a$  或  $x \leq b$  及全体实数集,我们引入记号“ $+\infty$ ”与“ $-\infty$ ”;“ $+\infty$ ”表示正无穷大,“ $-\infty$ ”表示负无穷大,但“ $+\infty$ ”与“ $-\infty$ ”不是数,不能作为区间的端点,可以把满足不等式  $x > a$  或  $x \leq b$  的全体实数  $x$  记作  $(a, +\infty)$  或  $(-\infty, b]$ ,显然全体实数就可以用区间表示为  $(-\infty, +\infty)$ .

##### 2. 邻域

设  $a$  与  $\delta$  是两个实数,且  $\delta > 0$ ,满足不等式  $|x - a| < \delta$  的实数  $x$  的全体叫做点  $a$  的  $\delta$  邻域,点  $a$  叫做这个邻域的中心, $\delta$  叫做邻域的半径,记作  $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$ ,或简记为  $U(a)$ .

同时把满足不等式  $0 < |x - a| < \delta$  的实数  $x$  的全体称为点  $a$  的空心邻域,记作

$$U^0(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

或简记为  $U^0(a)$ .

从邻域的定义我们容易发现以下几个问题.

- (1) 点  $a$  的空心邻域不包括  $a$  点, 点  $a$  的邻域包括  $a$  点, 有时也叫做  $a$  的实心邻域.
- (2) 点  $a$  的邻域实际上就是开区间  $(a - \delta, a + \delta)$ , 点  $a$  的空心邻域就是开区间  $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ .

## 二、函数的概念

### 1. 函数的概念

在某一自然现象或某变化过程中所遇到的各种变量, 通常不是彼此独立变化的, 而是彼此存在着一定的联系, 这种关系也就是我们所说的函数关系, 下面我们通过几个例子给出函数的定义.

**例 1** 在自由落体运动中, 物体下降的路程随着下降时间的变化而变化,  $s$  与  $t$  由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

联系着,  $t$  的值确定了,  $s$  的值就随之确定. 设物体落地时间为  $T$ , 则当  $t$  取  $[0, T]$  之间的任何值时, 由公式  $s = \frac{1}{2}gt^2$  就计算得  $s$  为  $[0, \frac{1}{2}gT^2]$  之间的某一值.

**例 2** 在气象观测站的气温自动记录仪, 记录了气温  $T$  与时间  $t$  之间在某一天的变化曲线如图 1-1 所示.

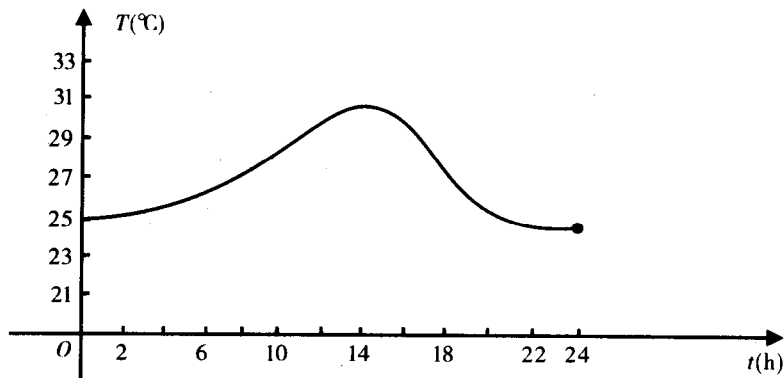


图 1-1

根据这条曲线, 我们就能知道这一天内时间  $t$  从 0 时到 24 时的气温  $T$  的变化情况.

**例 3** 某运输公司规定货物吨公里运价为  $a$  公里以内每公里  $k$  元, 超过  $a$  公里时超出部分为每公里  $\frac{4}{5}k$  元, 运价  $P$  与里程  $s$  之间的关系为

$$P = \begin{cases} ks; & 0 \leq s \leq a \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a); & a < s \end{cases}$$

据此关系,我们就可以得到任何里程的运价.

由上面几例我们可以看出,不论例子中的量的实际意义如何,它们都表达了两个变量之间的相依关系.这种关系给出了一种对应法则,按这一法则,当一个变量在某数集内取值时,另一变量就有惟一的一个值与之对应,这种对应关系就是函数关系,因此有以下定义.

**定义 1** 设  $x, y$  是某一变化过程中的两个变量,若按某一确定的对应法则,在  $x$  允许取值的范围内任给一个数  $x$ , 都有惟一的一个数  $y$  与它相对应,则称变量  $y$  是变量  $x$  的函数,记作

$$y = f(x)$$

其中  $x$  叫做自变量,  $y$  叫做因变量,把自变量所允许取值的范围叫做函数的定义域,通常用  $D$  表示.当自变量  $x$  取遍定义域内的每一个值时,对应的函数值  $y$  的全体叫做函数的值域,通常用  $M$  表示.

若自变量取某一数值  $x_0$  时,函数  $y = f(x)$  有确定的值与之对应,则称函数在点  $x_0$  处有定义,且记  $x_0$  处的函数值为  $f(x_0)$  或  $y|_{x=x_0}$ .

由定义 1 可知,函数的定义域  $D$  和对应法则是构成函数的两个重要因素,而相应的函数值随着  $D$  和对应法则的给定而确定,因此,要判定两个函数是否是相同函数,就要看这两个函数的定义域和对应法则是否相同,至于自变量用什么字母表示是没有关系的.而函数定义域的确定,则需要应用相关的代数知识,例如函数  $y = \frac{1}{x-1}$ , 其定义域就是使分式的分母不为零的  $x$ , 即  $x-1 \neq 0, x \neq 1$ , 希望同学们根据已掌握的知识会求函数的定义域,这里不再详细分析.

### 三、函数的几种特性

#### 1. 函数的奇偶性

设函数  $f(x)$  在区间  $(-l, l)$  上有定义, (1) 若对于区间  $(-l, l)$  内任一  $x$ , 总有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称函数  $f(x)$  为区间  $(-l, l)$  内的奇函数; (2) 若对于区间  $(-l, l)$  上的任一  $x$ , 总有  $f(-x) = f(x)$ ; 则称函数  $f(x)$  为区间  $(-l, l)$  上的偶函数; (3) 若(1)、(2)均不成立, 则称这个函数  $f(x)$  既不是奇函数, 也不是偶函数.

例如  $y = \sin x$  是奇函数; 函数  $y = \sqrt{1-x^2}$  是偶函数; 而函数  $y = \frac{1-x}{1+x}$  既不是奇函数也不是偶函数.

从图像上看, 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于  $y$  轴对称, 如图 1-2 所示.

#### 2. 函数的有界性

设函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 如果存在一个常数  $M > 0$ , 使当  $x$  取  $I$  内任何值



时,都有

$$|f(x)| \leq M$$

成立. 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上是有界的, 如果  $M$  不存在, 称函数  $f(x)$  无界.

例如  $y = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是有界的,  $y = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  内是无界的.  $y = x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有下界而无上界.

如果函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有界, 称这个函数为有界函数.

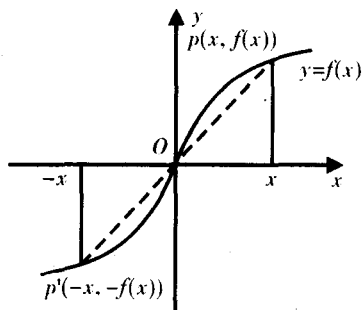


图 1-2

### 3. 函数的单调性

设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 若对  $I$  内任意两点  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 总有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上严格单调递增; 若对  $I$  内任意两点  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 总有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上严格单调递减.

单调增函数和单调减函数统称为单调函数, 区间  $I$  叫做单调区间.

例如, 函数  $y = x^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是单调增函数; 函数  $y = x^2$  在  $(-\infty, 0)$  内是单调减, 在  $(0, +\infty)$  内是单调增.

### 4. 函数的周期性

对于给定的函数  $f(x)$ , 若总存在一个不为零的常数  $T$ , 使得对于其定义域内的任何  $x$ , 都有

$$f(x+T) = f(x)$$

成立, 则称函数  $f(x)$  为周期函数,  $T$  是  $f(x)$  的周期.

例如,  $y = \sin x$  是以  $2\pi$  为周期的函数;  $y = \tan \frac{x}{2}$  是以  $2\pi$  为周期的函数.

从周期函数的定义我们不难看出, 若函数  $f(x)$  以  $T$  为周期, 则  $-T, \pm 2T, \pm 3T \dots$  也是函数  $f(x)$  的周期. 因此, 周期函数的周期有无穷多个, 通常把周期函数的最小正周期叫做函数的周期.

## 四、反函数

在研究两个变量之间的依赖关系时, 有时可根据具体情况选定其中一个为自变量, 另一个为因变量. 比如在研究自由落体问题中下落距离  $s$  与下落时间  $t$  之间的关系, 如果想从时间来确定下落距离, 则选定  $t$  为自变量,  $s$  就是  $t$  的函数, 且  $s = \frac{1}{2}gt^2$ ; 如果想从下落距离来确定下落时间, 则选  $s$  为自变量,  $t$  就是  $s$  的函数, 且  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ , 其中  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$  就是由  $s = \frac{1}{2}gt^2$  来确定的, 这时称  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$  为函数  $s = \frac{1}{2}gt^2$  的反函数.

下面给出反函数的定义.

**定义 2** 设函数  $y = f(x)$  是给定的函数, 定义域为  $D$ , 值域为  $M$ ; 若对于变量  $y$  在  $M$  中