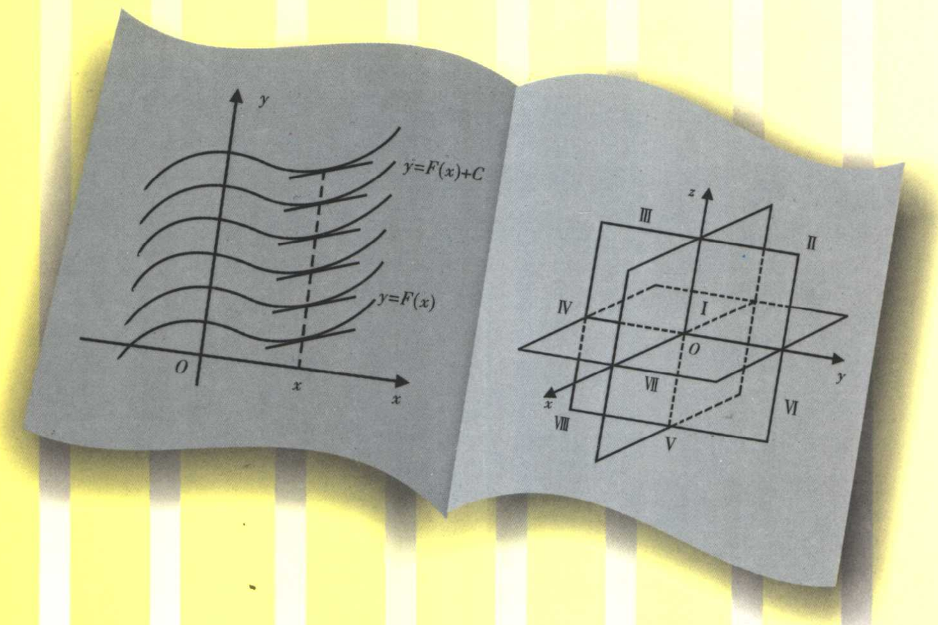
高等数学

■ GAODENGSHUXUE

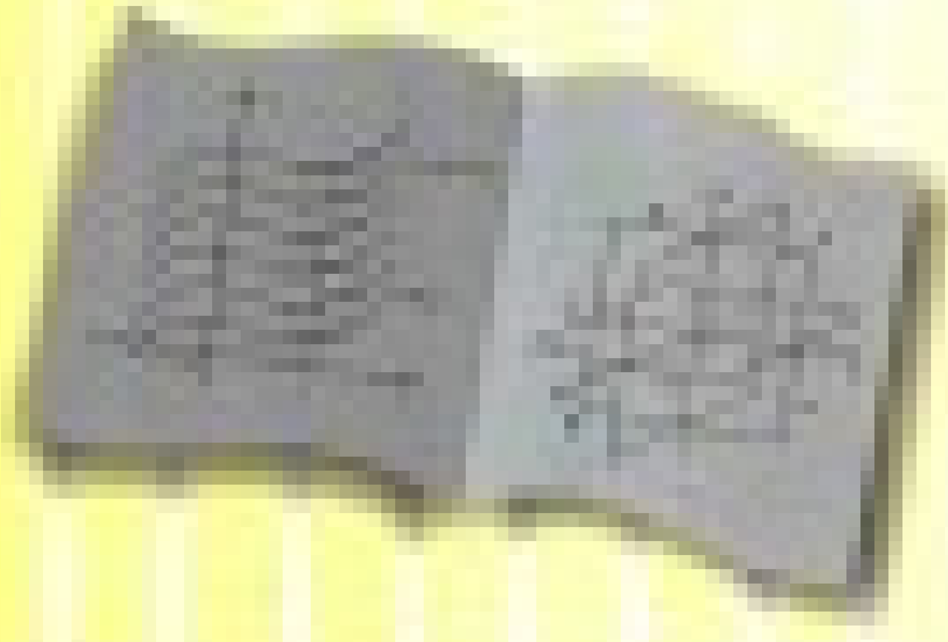
■ 主编　王卫平　霍本瑶　张滨燕



郑州大学出版社

高等数学

GAODENGSHUXUE



高 等 数 学

GAODENGSHUXUE

主 编 王卫平 霍本瑶 张滨燕

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王卫平,霍本瑶,张滨燕主编.—郑州:郑州大学出版社,2003.9
ISBN 7-81048-820-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.①王…②霍…③张…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 068286 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:谷振清　　发行部电话:0371-6966070
全国新华书店经销
郑州文华印刷厂印制
开本:787 mm×1 092 mm　　1/16
印张:21.75
字数:510 千字
版次:2003 年 9 月第 1 版　　印次:2003 年 9 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-81048-820-1/G·69　　定价:32.80 元

作者名单

主　编：王卫平　霍本瑶　张滨燕
副主编：田长申　郝艳莉　王艳红
　　　　潘晓伟
编　委：田长申　王卫平　霍本瑶
　　　　张滨燕　郝艳莉　王艳红
　　　　姚晓辉　孙全宝　李洪敏
　　　　刘燕廷　潘晓伟

内容提要

本书概念简明、内容丰富、浅显易懂，每章节均有丰富的例题与习题，书后还配有习题答案及附录。是一本可供高职、高专及成人高校的教学用书，也可作为理工类自考学生的用书。

全书共十一章，其主要内容包括：极限与连续、导数与微分及应用、不定积分与定积分及应用、无穷级数、微分方程、空间解析几何、多元函数微分法、二重积分与曲线积分等。

前　言

教材建设是高职、高专院校教学的一项基本建设，为适应高职、高专院校的发展，根据全日制大学专科教学大纲以及《全国高职、高专机制专业统编教材（高等数学）编写大纲》，结合高职、高专院校特点，本着理论课时“够用、管用、实用”的“三用”原则，编写了这本教材。

本书内容精练，重点突出，概念简明，浅显易懂，涵盖面宽。与同类教材相比，内容进行了合理取舍，既照顾教材本身的知识体系又紧密联系专业实践，突出了“三用”原则，在编写中淡化了逻辑推理，强化了概念教学；淡化了技巧，突出了能力的培养，注重导数、微分、积分的教学，尽量立足于生产实践。

本书由王卫平、霍本瑶、张滨燕主编，田长申、郝艳莉、王艳红、潘晓伟为副主编，参加编写的还有孙全宝、姚晓辉、李洪敏、刘燕廷。具体分工如下。

第一章由田长申、潘晓伟编写，第二章由田长申、孙全宝编写，第三章由王卫平、姚晓辉编写，第四章由王卫平编写，第五章由张滨燕编写，第六章由张滨燕、李洪敏编写，第七章由霍本瑶、王艳红编写，第八章由霍本瑶编写，第九章、第十章由郝艳莉编写，第十一章由田长申、刘燕廷编写。

全书由田长申统稿。

本教材是河南职业技术学院教改教材，在编写过程中，得到了河南职业技术学院领导及诸多同志的通力合作和大力支持，在此谨致深切的谢意。

编写高职、高专教材是一种新的尝试。由于本书的编印比较仓促，不当之处在所难免，恳请社会各界的有关专家及广大读者批评指正。

编委

2003 年 6 月

目　录

第一章　极限与连续

极限概念是高等数学中最重要、最基本的概念之一,极限方法也是高等数学中分析和研究问题的基本方法,高等数学中许多重要概念如连续、导数、微分、积分、级数等都要用极限来描述,它们的性质也要用极限的方法来论证,因此掌握极限的概念、基本性质及基本计算方法是十分重要的.

本章将讨论函数及初等函数的有关概念,然后讨论数列的极限和函数的极限的相关概念、基本性质及计算方法,而后再对无穷小量作详细讨论.

函数的连续性是与极限概念密切联系的另一个重要的概念,本章在引进函数连续概念的基础上,介绍间断点及其分类,并对初等函数的连续性作必要的讨论.

第一节　初等函数　分段函数

一、区间与邻域

在高等数学中,经常用区间和邻域去表示一些数集,因此,我们对区间与邻域的概念加以介绍.

1. 区间

区间是介于两实数之间的一切实数构成的数集,这两个实数称为区间的端点.

设 a,b 为两个实数,且 $a<b$.

(1)我们把满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体叫做开区间,记作 (a,b).

(2)我们把满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间,记作 $[a,b]$.

(3)我们把满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 x 的全体叫做半开半闭区间,记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$.

为了能用区间表示 $x>a$ 或 $x\leqslant b$ 及全体实数集,我们引入记号"$+\infty$"与"$-\infty$";"$+\infty$"表示正无穷大,"$-\infty$"表示负无穷大,但"$+\infty$"与"$-\infty$"不是数,不能作为区间的端点,可以把满足不等式 $x>a$ 或 $x\leqslant b$ 的全体实数 x 记作 $(a,+\infty)$ 或 $(-\infty,b]$,显然全体实数就可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$.

2. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体叫做点 a 的 δ 邻域,点 a 叫做这个邻域的中心,δ 叫做邻域的半径,记作 $U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$,或简记为 $U(a)$.

同时把满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的空心邻域,记作

$$U^0(a,\delta)=\left\{x\,\middle|\,0<|x-a|<\delta\right\}$$

或简记为 $U^0(a)$.

从邻域的定义我们容易发现以下几个问题.

(1)点 a 的空心邻域不包括 a 点,点 a 的邻域包括 a 点,有时也叫做 a 的实心邻域.

(2)点 a 的邻域实际上就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$,点 a 的空心邻域就是开区间 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

二、函数的概念

1. 函数的概念

在某一自然现象或某变化过程中所遇到的各种变量,通常不是彼此独立变化的,而是彼此存在着一定的联系,这种关系也就是我们所说的函数关系,下面我们通过几个例子给出函数的定义.

例 1 在自由落体运动中,物体下降的路程随着下降时间的变化而变化,s 与 t 由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

联系着,t 的值确定了,s 的值就随之确定.设物体落地时间为 T,则当 t 取 $[0,T]$ 之间的任何值时,由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 就计算得 s 为 $[0,\frac{1}{2}gT^2]$ 之间的某一值.

例 2 在气象观测站的气温自动记录仪,记录了气温 T 与时间 t 之间在某一天的变化曲线如图 1-1 所示.

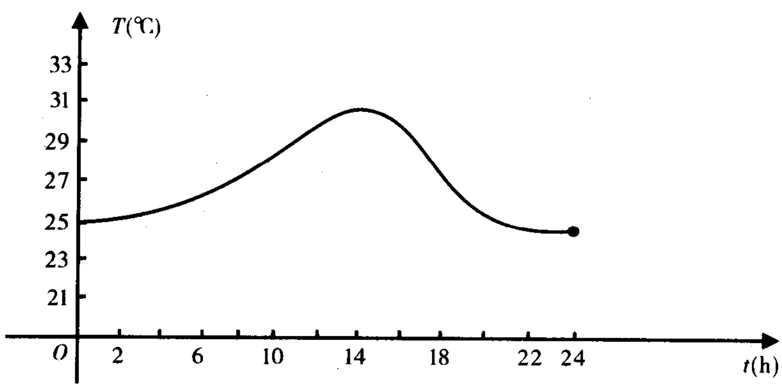


图 1-1

根据这条曲线,我们就能知道这一天内时间 t 从 0 时到 24 时的气温 T 的变化情况.

例 3 某运输公司规定货物吨公里运价为 a 公里以内每公里 k 元,超过 a 公里时超出部分为每公里 $\frac{4}{5}k$ 元,运价 P 与里程 s 之间的关系为

$$P=\begin{cases} ks; & 0\leqslant s\leqslant a \\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a); & a<s \end{cases}$$

据此关系,我们就可以得到任何里程的运价.

由上面几例我们可以看出,不论例子中的量的实际意义如何,它们都表达了两个变量之间的相依关系.这种关系给出了一种对应法则,按这一法则,当一个变量在某数集内取值时,另一变量就有惟一的一个值与之对应,这种对应关系就是函数关系,因此有以下定义.

定义 1　设 x,y 是某一变化过程中的两个变量,若按某一确定的对应法则,在 x 允许取值的范围内任给一个数 x,都有惟一的一个数 y 与它相对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记作

$$y=f(x)$$

其中 x 叫做自变量,y 叫做因变量,把自变量所允许取值的范围叫做函数的定义域,通常用 D 表示.当自变量 x 取遍定义域内的每一个值时,对应的函数值 y 的全体叫做函数的值域,通常用 M 表示.

若自变量取某一数值 x_0 时,函数 $y=f(x)$ 有确定的值与之对应,则称函数在点 x_0 处有定义,且记 x_0 处的函数值为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

由定义 1 可知,函数的定义域 D 和对应法则是构成函数的两个重要因素,而相应的函数值随着 D 和对应法则的给定而确定,因此,要判定两个函数是否是相同函数,就要看这两个函数的定义域和对应法则是否相同,至于自变量用什么字母表示是没有关系的.而函数定义域的确定,则需要应用相关的代数知识,例如函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$,其定义域就是使分式的分母不为零的 x,即 $x-1\neq 0,x\neq 1$,希望同学们根据已掌握的知识会求函数的定义域,这里不再详细分析.

三、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 上有定义,(1) 若对于区间 $(-l,l)$ 内任一 x,总有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为区间 $(-l,l)$ 内的奇函数;(2) 若对于区间 $(-l,l)$ 上的任一 x,总有 $f(-x)=f(x)$;则称函数 $f(x)$ 为区间 $(-l,l)$ 上的偶函数;(3) 若 (1)、(2) 均不成立,则称这个函数 $f(x)$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

例如 $y=\sin x$ 是奇函数;函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是偶函数;而函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 既不是奇函数也不是偶函数.

从图像上看,奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1-2 所示.

2. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在一个常数 $M>0$,使当 x 取 I 内任何值

时，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立. 则称函数$f(x)$在区间I上是有界的，如果M不存在，称函数$f(x)$无界.

例如$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的. $y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内有下界而无上界.

如果函数$y=f(x)$在区间I上有界，称这个函数为有界函数.

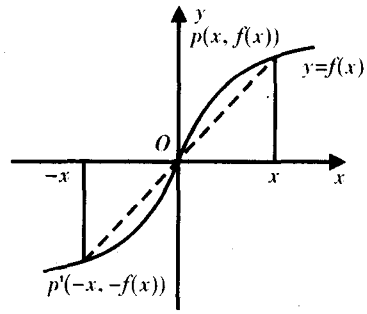


图1－2

3. 函数的单调性

设函数$f(x)$在区间I上有定义，若对I内任意两点x_1,x_2，当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间I上严格单调递增；若对I内任意两点x_1,x_2，当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间I上严格单调递减.

单调增函数和单调减函数统称为单调函数，区间I叫做单调区间.

例如，函数$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内是单调增函数；函数$y=x^2$在$(-\infty,0)$内是单调减，在$(0,+\infty)$内是单调增.

4. 函数的周期性

对于给定的函数$f(x)$，若总存在一个不为零的常数T，使得对于其定义域内的任何x，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数$f(x)$为周期函数，T是$f(x)$的周期.

例如，$y=\sin x$是以2π为周期的函数；$y=\tan\frac{x}{2}$是以2π为周期的函数.

从周期函数的定义我们不难看出，若函数$f(x)$以T为周期，则$-T,\pm 2T,\pm 3T\cdots$也是函数$f(x)$的周期. 因此，周期函数的周期有无穷多个，通常把周期函数的最小正周期叫做函数的周期.

四、反函数

在研究两个变量之间的依赖关系时，有时可根据具体情况选定其中一个为自变量，另一个为因变量. 比如在研究自由落体问题中下落距离s与下落时间t之间的关系，如果想从时间来确定下落距离，则选定t为自变量，s就是t的函数，且$s=\frac{1}{2}gt^2$；如果想从下落距离来确定下落时间，则选s为自变量，t就是s的函数，且$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，其中$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$就是由$s=\frac{1}{2}gt^2$来确定的，这时称$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$为函数$s=\frac{1}{2}gt^2$的反函数.

下面给出反函数的定义.

定义2 设函数$y=f(x)$是给定的函数，定义域为D，值域为M；若对于变量y在M中